

运动 稳定性

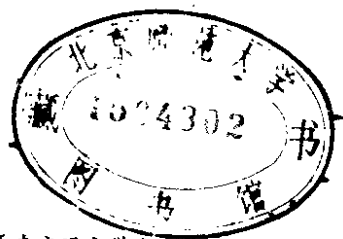


舒 仲 周

西南交通大学出版社

运 动 稳 定 性

舒 仲 周



西南交通大学出版社

内 容 提 要

本书从基本概念开始,由浅入深地系统阐述了运动稳定性的基本理论和近期发展,并且广泛介绍了运动稳定性在力学、自控、生态、大系统、不确定以及不连续系统等多方面的应用,大量反映了国内外,特别是我国92位研究者,包括作者本人的最新研究成果,使初学者能迅速进入前沿。本书取材精当,叙述详简得宜,颇多独到之处,并且每章附有习题,便于学习。可作为力学、数学、自控、机械、航空、航天、生物、管理、系统工程等大学生、研究生的教材及有关人员的参考用书。

运 动 稳 定 性

YUNDONG WENDING XING

舒 仲 周

*

西南交通大学出版社出版发行

(四川 峨眉山市)

西南交通大学出版社印刷厂印刷

四川省新华书店经销

开本: 850×1168 1/32 印张: 11.875

字数: 302千字 印数: 1—1500册

1989年2月第一版 1989年2月第一次印刷

ISBN 7-81022-066-7/O 013

定价: 3.00元

序

作者在主观上希望本书能达到以下三点要求：

(1) 能同时体现出运动稳定性的两大优点：理论的严谨性和应用的广泛性。因此本书不但要求具有完整的理论体系，而且用了整章整节的篇幅系统地介绍了运动稳定性理论在力学系统、控制系统、生态系统、大系统、不确定系统和不连续系统的应用和发展，并在其他章节列举了大量的实际例子，以满足理、工、管等各方面人员的需要。

(2) 能包括从基础到前沿阵地的某些主要内容。因此本书尽可能多地反映国内外，特别是国内的最新成果。介绍了我国 92 位研究者 134 篇著作与论文，并对其中若干成果作了详细的摘录甚至是全文引用（由于本书的需要而有所改动的都作了声明）。正是他们这些出色的工作丰富了本书的内容。

(3) 使初学者容易接受。本书力求做到由浅入深，深入浅出。只要具备常微分方程和线性代数初步知识的读者，即能顺利阅读本书。本书对理论部分划分了三个层次：基本的（一至三章）、中间的（八、九章）和发展的（十一、十二章），深度逐步增加，处理方法有所不同，以适应不同读者的需要。本书总是从简单的实际问题引出新的概念、新的理论，并且尽力揭露新理论之所以能产生的个中奥秘，使读者能从单调的数学推导中解脱出来。有不少例题是从如何建立数学模型开始，直到稳定性问题的解决，形成了一个完整的过程，以便于初学者能触类旁通。每章后面附有习题以加深理论的学习；其中有些问题引自近期文献，以提高读者的兴趣。

由于作者水平的限制，上述三点要求自未能完全实现，并且

还会有不少的缺点错误，恳请阅者批评指正。本书篇幅有限，加上作者的疏漏，使许多有价值的论文未能列入，敬请谅解。

本书的写作与出版，得到西南交通大学孙训方教授的热情关怀与帮助，还得到北京航空航天大学黄克累教授、清华大学王照林教授等的支持；西南交通大学谢建华、裘晓钢同志对本书的前身（西南交大研究生教材）作了部分资料的收集与整理工作；西南交通大学图书馆馆员、阅览部的张秩菊同志所作的《稳定及振动专题题录》节省了作者大量的时间；西南交通大学出版社在经费紧张的情况下同意出版此书；对于以上同志以及所有关心本书写作出版者，作者敬致衷心的感谢！

舒仲周

1988年7月

目 录

绪 言.....	1
第一章 运动稳定性的基本概念.....	3
§ 1.1 平衡稳定性的初步概念	3
§ 1.2 平衡的扰动运动微分方程	6
§ 1.3 平衡稳定性的严格定义	9
§ 1.4 运动的稳定性	17
§ 1.5 李雅普诺夫直接方法	23
习 题.....	23
第二章 驻定系统稳定性的基本定理.....	26
§ 2.1 驻定系统的基本特征和性质	26
§ 2.2 振动系统的总能量函数和系统的稳定性	29
§ 2.3 定号、常号、变号函数	32
§ 2.4 稳定的基本定理	36
§ 2.5 渐近稳定的基本定理	42
§ 2.6 渐近稳定定理的推广	48
§ 2.7 不稳定的基本定理	54
§ 2.8 全局稳定的基本定理	60
§ 2.9 李雅普诺夫函数	65
习 题.....	66
第三章 驻定系统的一次近似稳定性理论.....	69
§ 3.1 常系数线性微分方程的化简	69

§ 3.2	常系数线性微分方程的稳定性准则	75
§ 3.3	二次型李雅普诺夫函数的存在定理	81
§ 3.4	按一次近似判断稳定性的法则	91
§ 3.5	一切特征根具有负实部的判别准则	95
§ 3.6	在电力系统和其他系统中的应用	98
§ 3.7	平衡位置的失稳和分叉问题	106
习 题		108
第四章	驻定系统李雅普诺夫函数的构造法	112
§ 4.1	巴尔巴欣公式	112
§ 4.2	最优李雅普诺夫函数	116
§ 4.3	能量法·轨道稳定性	118
§ 4.4	类比法	123
§ 4.5	广义能量法	127
§ 4.6	首次积分的线性组合与加权 V 函数法	131
习 题		141
第五章	力学系统的稳定性	144
§ 5.1	有势力、耗散力、陀螺力	144
§ 5.2	保守系统的稳定性	147
§ 5.3	耗散力对于稳定的影响	156
§ 5.4	陀螺力的稳定作用	159
§ 5.5	其他力学系统的稳定性	168
习 题		174
第六章	控制系统的稳定性	177
§ 6.1	鲁里叶控制系统的绝对稳定性	177
§ 6.2	鲁里叶控制系统的第一、第二标准型	183

§ 6.3	鲁里叶控制系统的另一种简化形式	186
§ 6.4	常用的控制系统 (包括间接系统) 的绝对 稳定性	191
§ 6.5	一般直接控制系统的绝对稳定性	199
习 题		206
第七章 生态系统的稳定性		209
§ 7.1	Volterra 型生态系统的稳定性	209
§ 7.2	广义 Volterra 型生态系统的稳定性	213
§ 7.3	几种具体类型生态系统的稳定性	218
习 题		221
第八章 非驻定系统稳定性的基本定理		223
§ 8.1	稳定的基本定理	223
§ 8.2	渐近稳定的基本定理	227
§ 8.3	不稳定的基本定理	233
§ 8.4	非驻定系统稳定问题的复杂性	235
习 题		236
第九章 周期系数系统的稳定性		238
§ 9.1	线性的周期系数系统的特征方程	239
§ 9.2	线性的周期系数系统的化简	242
§ 9.3	线性的周期系数系统的稳定性准则及其应用 ——Hill 方程和 Mathieu 方程的稳定性	248
§ 9.4	按一次近似判断周期系数系统的稳定性	255
习 题		256

第十章 大系统的稳定性	257
§ 10.1 大系统的分解集结法之一: 加权 V 函数法	257
§ 10.2 构造矢量李雅普诺夫函数的简单例子	261
§ 10.3 关于矢量李雅普诺夫函数的一般理论	266
§ 10.4 大系统的分解集结法之二: 矢量李雅普诺夫函数法	275
习 题	282
第十一章 稳定性基本定理的推广与发展	283
§ 11.1 稳定概念的分类和稳定定理的推广	283
§ 11.2 渐近稳定性的分解和渐近稳定定理的发展	289
§ 11.3 不稳定的分解和不稳定定理的推广	300
§ 11.4 不可微的李雅普诺夫函数	312
习 题	320
第十二章 完全稳定性、部分变元稳定性、不确定系统、不连续系统的稳定性	323
§ 12.1 完全稳定性	323
§ 12.2 部分变元稳定性	326
§ 12.3 不确定系统的稳定性	333
§ 12.4 不连续系统的稳定性	338
习 题	348
参考文献	350
名词索引	366
文献作者索引	369

绪 言

运动稳定性的研究起源于力学。它的最早的一个原理是以 Torricelli 命名的：物体的重心处于最低位置的平衡是稳定的。后来逐步发展到研究运动的稳定性。而且所谓运动，也不限于物体的运动，任何事物的变化都是一种运动，都存在是否稳定的问题。因此运动稳定性的研究超出了力学的范围，而进入多种领域。

运动稳定性的研究往往成为一个工程能否实现的关键。以发射人造卫星为例，我们要求它按预定的轨道运行，如果运动不是稳定的，这个要求就无法实现，卫星的发射也不会成功。大量的工程都存在类似问题。因此运动稳定性的研究对于科学技术的发展具有重要意义。

运动稳定性的奠基人是俄国学者李雅普诺夫 (А. М. Ляпунов 1857—1918)。是他首次给出了运动稳定性的精确定义，建立了运动稳定性的一套严密的理论。他创立了两个方法，其中第二个价值最大，发展最快。因为第二方法无需求出运动微分方程的通解——精确的或者近似的，而只要利用一个函数（称为李雅普诺夫函数），即可直接判定运动的稳定性。这一方法叫做直接法。我们通常说的运动稳定性的理论，主要指的是直接法的理论。

在李雅普诺夫逝世以后，直接法的理论经过苏联学者 Н. Г. Четаев, И. Г. Малкин, А. И. Лурье, Н. Н. Красовский, В. В. Румянцев, В. М. Матросов 及美国学者 J. P. La Salle 等的相继研究，到现在有了很大的发展。在理论上，已经从原来的常微分方程发展到泛函微分方程、随机微分方程，从有限维空

间发展到无穷维空间；在应用上，已经从离散系统发展到连续介质系统，从力学领域发展到自控、机械、航空、航天、电力、化工、生态、经济、管理和系统工程等多个领域。

我国运动稳定性研究是在 50 年代由秦元勋以及张学铭、许淞庆等创导下开展起来的。三十年来许多研究者在力学系统的稳定性、控制系统的稳定性、大系统的稳定性以及基本理论等多个方面取得了突出的成绩。

运动稳定性是一门理论严谨、应用广泛、而且发展迅速的学科。为了体现它的这些特点，本书力求在理论上构成一个完整的体系，在应用上辟出大量的篇幅，并且尽可能多地介绍国内外特别是我国研究者的最新成果。

本书共计十二章六十节，可以划分为三个部分：

第一部分，主要是驻定系统的稳定性，它包括基本概念（第一章）、基本定理（第二章）、一次近似稳定性定理（第三章）、李雅普诺夫函数的构造法（第四章）、力学系统（第五章）、控制系统（第六章）和生态系统（第七章）的稳定性。

第二部分，非驻定系统的稳定性，它包括基本定理（第八章）、周期系数系统（第九章）和大系统（第十章）的稳定性。

第三部分是运动稳定性在理论和应用两方面的发展，它包括稳定性基本定理的推广和发展（第十一章）、完全稳定性、部分变元稳定性、不确定系统、不连续系统的稳定性（第十二章）等。

前两部分的四、五、六、七章和九、十两章，都是彼此独立的，读者可以根据不同需要进行选择。例如，对于仅仅希望了解一下运动稳定性的最基本内容的读者，可只学前三章；对于大学高年级学生，学习前三章外还可以根据不同专业的要求加学五、六、七中任一章（学第五章时最好先学 § 4.6-1）；对于研究生宜于加学第八章以及与本专业有关的章节。总之本书的编排使读者在选择上有很大的灵活性。

第一章 运动稳定性的基本概念

运动稳定性的概念是平衡的稳定性的推广。我们先从比较简单的平衡的稳定性谈起，给出它的严格定义，并对其中的难点作出详细的解释，然后引出运动稳定性的概念，给出运动稳定性的定义。

§ 1.1 平衡稳定性的初步概念

图 1-1(a) 与 (b) 表示两个单摆：(a) 为下垂摆，(b) 为倒立摆，它们是一条长为 l 的刚杆，其一端和质量为 m 的重球固结，另一端用圆柱形铰链和支座联结，并设刚杆质量不计，铰链是足够光滑的。

下垂摆有一个平衡位置，就是下垂的最低点，这时刚杆处于铅垂线上，重球所受的合力为零。如果重球初速为零，它将停留在这个位置上。这一现象是我们经常观察得到的。倒立摆也有一个平衡位置，

即重球的最高点，这时刚杆也处于铅垂线上，重球所受的合力为零。从理论上说，如果重球初速为零，也将停留在这个位置上。但这一现象一般是观察不到的，这是为什么呢？

设刚杆偏离平衡位置的角度为 θ (图 1-1)，所谓平衡位置是满足

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = 0$$

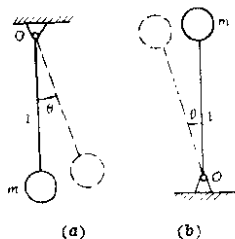


图 1-1

(在这里就是 $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$)

两个条件的位置。对于倒立摆来说,要人为地实现这两个条件,一般是不可能的,即总有微小的偏离

$$\theta_0 \neq 0, \dot{\theta}_0 \neq 0$$

存在,它们叫做初扰动(θ_0 是位置的初扰动, $\dot{\theta}_0$ 是角速度的初扰动)。即使偶而做到没有初扰动,在外界的干扰下(这是不可避免的)又会重新出现,这时,作用于重球的合力不为零,这个合力将使倒立摆对平衡位置的偏离 θ 和 $\dot{\theta}$ (叫做扰动)越来越大以致倾倒,因此一般观察不到倒立摆倒立于最高位置的现象。

下垂摆则不然。虽然初扰动也难以避免而使重球所受合力不为零。但这个合力使下垂摆作微幅摆动,如果再考虑到实际存在的铰链摩擦和空气阻力,摆幅将逐渐减小,最后停留在平衡位置上,因此我们能观察到这种现象。

为了进一步分析这个原因,下面分别写出它们的运动微分方程,即对平衡位置的扰动的微分方程,这方程称为扰动运动微分方程。

1. 无阻尼的下垂摆

它的扰动运动微分方程是

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \text{ 或 } \ddot{\theta} + k^2 \sin \theta = 0 \quad (1.1-1)$$

这里, $k^2 = g/l$, $k > 0$ 。

这个系统的总能量 E 是它的动能和势能之和,即

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

$$= ml^2 \left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + k^2(1 - \cos \theta) \right]$$

我们知道这个系统的总能量是守恒的,即

$$E = C \quad (C \text{ 为常数})$$

如果取 $C > 0$ 充分小, 并使 $|\cos \theta| < 1$, 则 $E = C$ 是相平面 (在这里是以 θ 和 $\dot{\theta}$ 为坐标轴的平面) 上的一族封闭曲线 (图 1-2 a_1), 其中任一条都是系统 (1.1-1) 的由某个初始点 $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ 出发的轨线。从图 (a_1) 显然看出, 只要初扰动 $|\theta_0|$ 和 $|\dot{\theta}_0|$ 充分小, 摆的幅度也就是很小的。

我们把这种情况叫做系统的平衡是稳定的。

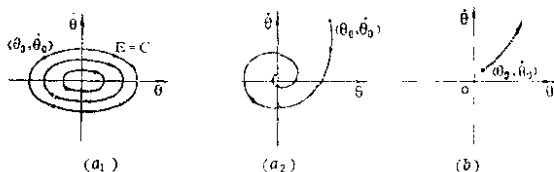


图 1-2

2. 有阻尼的下垂摆

假设阻尼和 $\dot{\theta}$ 成正比, 则得扰动运动微分方程

$$\ddot{\theta} + 2\mu\dot{\theta} + k^2 \sin \theta = 0 \quad (1.1-2)$$

式中, μ 是阻尼系数, $0 < \mu < k$ 。

这个系统的总能量仍如前一种情况一样, 但由于阻尼的存在, E 是随时间减小的, 最后减为零, 即摆停留在平衡位置上。这表明方程 (1.1-2) 的一切解在相平面的轨线是向原点 (平衡位置) 趋近的 (图 1-2 a_2)。

系统在这一情况当然是稳定的, 但比无阻尼情况有更强的性质, 我们把它叫做系统的平衡是渐近稳定的。

3. 倒立摆 (不计阻尼)

它的扰动运动微分方程是

$$\ddot{\theta} - k^2 \sin \theta = 0 \quad (k > 0) \quad (1.1-3)$$

当 $0 < \theta < \pi$ 时, $\ddot{\theta} > 0$, 因此角速度 $\dot{\theta}$ 随 θ 而增加, 设 $\theta_0 > 0$, $\dot{\theta}_0 > 0$, 无论初扰动 θ_0 、 $\dot{\theta}_0$ 多么小, 在摆达到最低点以前, 方程 (1.1-3) 的解在相平面上的轨线是离开平衡位置的 (图 1-2 b)。

这种情况叫做系统在平衡位置是不稳定的。

上述三种情况不但包含稳定性的粗略概念, 而且暗含着解决稳定性的简便方法。我们将在以后进一步说明这点, 并在第二章通过例 2.4-1、例 2.5-2 或 2.6-3 以及例 2.7-1 严格判定这三种情况的稳定性。

§ 1.2 平衡的扰动运动微分方程

单摆的扰动运动微分方程是一个二阶方程, 我们可以把它化成两个一阶微分方程。只要令 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, 方程 (1.1-1) ~ (1.1-3) 就化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k^2 \sin x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k^2 \sin x_1 - 2\mu x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = k^2 \sin x_1 \end{cases} \quad (1.2-1)$$

原点 $(0, 0)$ 是平衡位置 (由 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 求得), x_1 与 x_2 是对它的扰动。

大量的力学、电学系统、自动控制、生态系统等都可以用下列微分方程组描述:

$$\dot{x}_s = X_s(t; x_1, \dots, x_n) \quad (s=1, \dots, n) \quad (1.2-2)$$

其中, $X_s(t; 0, \dots, 0) \equiv 0$ 。我们称满足

$$\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0, \dots, \dot{x}_n = 0$$

的点为平衡位置。所以原点是平衡位置， $x_1, \dots, x_n$ 是对它的扰动。

方程组 (1.2-2) 叫做微分方程的范式，以后将对范式建立起稳定性理论。

例 1.2-1 n 阶线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = F(t) \quad (1.2-3)$$

式中， $y^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} y \quad (n \geq 1)$ ，把它写成范式。

解 令 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$ ，即得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + F(t) \end{cases}$$

这种形式的方程在控制理论中称为状态方程。

由扰动 $x_1, \dots, x_n$ 形成的空间叫做相空间（或状态空间），它是 n 维欧几里得空间，以 R^n 表示。方程 (1.2-2) 还有一维是时间，记为 I ，例如 I 表示 $t \geq 0$ 。因此 (1.2-2) 是某系统在乘积空间 $I \times R^n$ 描述的扰动运动微分方程。 $I \times R^n$ 是 $n+1$ 维欧几里得空间，叫做增广空间。

为了使记号简单，我们把坐标为 $(x_1, \dots, x_n)$ 的点记作 x ，并把它写成列阵

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^T$$

这里 T 表示转置。也可以把 x 看成由原点到点 $(x_1, \dots, x_n)$ 的矢径（图 1-3）。

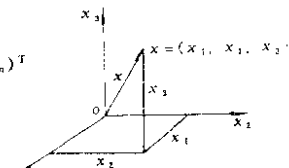


图 1-3

同理, 用 $\dot{x}$ 表示 $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^T$, 用 X 表示 $(X_1, \dots, X_n)^T$, 即

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

于是方程组 (1.2-2) 可以写成矩阵 (或矢量) 形式

$$\dot{x} = X(t, x) \quad (1.2-4)$$

并且注明 $x \in \mathbb{R}^n$ 。

方程 (1.2-4) 的函数 $X(t, x)$ 一般并不要求在整个增广空间内定义。例如我们往往只取时间 $t \geq 0$, x 也只在原点附近的某个范围内取值 (例如车辆的振动)。这个范围通过 x 的范数 (或模) $\|x\|$ 表示, 通常采用

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

任取常数 $r > 0$, 不等式

$$\|x\| \leq r$$

表示以原点为球心, r 为半径的球形区域, 称为原点的球邻域。

本书更多地采用所有 x_i 的绝对值中的最大值表示 $\|x\|$, 即

$$\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

任取常数 $r > 0$, 不等式

$$\|x\| \leq r$$

表示形心在原点, 边长为 $2r$ 的 n 维正方体, 记为 $\overline{B}_r$ (闭区域); $\|x\| < r$ 表示正方体的内部, 记为 B_r (开区域); 而以 b_r 表示正方体的边界。图 1-4 表示 $n=2$ 的情况。

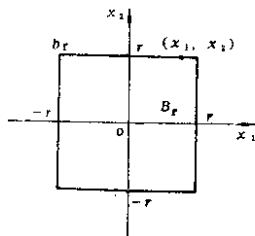


图 1-4

为了研究系统 (1.2-4)