运动稳定性

舒仲周

西南交通大学出版社

运 动 稳 定 性

舒 仲 周

西南交通大学出版社

内 容 提 要

本书从基本概念开始，由浅入深地系统阐述了运动稳定性的基本理论和近期发展，并且广泛介绍了运动稳定性在力学、自控、生态、大系统、不确定以及不连续系统等多方面的应用，大量反映了国内外，特别是我国92位研究者，包括作者本人的最新研究成果，使初学者能迅速进入前沿。本书取材精当，叙述详简得宜，颇多独到之处，并且每章附有习题，便于学习。可作为力学、数学、自控、机械、航空、航天、生物、管理、系统工程等大学生、研究生的教材及有关人员的参考用书。

运 动 稳 定 性

YUNDONG WENDING XING

舒仲周

*

西南交通大学出版社出版发行

（四川 峨眉山市）

西南交通大学出版社印刷厂印刷

四川省新华书店经销

开本：850×1168 1/32 印张：11.875

字数：302千字 印数：1—1 500册

1989年2月第一版 1989年2月第一次印刷

ISBN 7-81022-066-7/O 013

定价：3.00元

序

作者在主观上希望本书能达到以下三点要求：

(1) 能同时体现出运动稳定性的两大优点：理论的严谨性和应用的广泛性。因此本书不但要求具有完整的理论体系，而且用了整章整节的篇幅系统地介绍了运动稳定性理论在力学系统、控制系统、生态系统、大系统、不确定系统和不连续系统的应用和发展，并在其他章节列举了大量的实际例子，以满足理、工、管等各方面人员的需要。

(2) 能包括从基础到前沿阵地的某些主要内容。因此本书尽可能多地反映国内外，特别是国内的最新成果。介绍了我国 92 位研究者 134 篇著作与论文，并对其中若干成果作了详细的摘录甚至是全文引用（由于本书的需要而有所改动的都作了声明）。正是他们这些出色的工作丰富了本书的内容。

(3) 使初学者容易接受。本书力求做到由浅入深，深入浅出。只要具备常微分方程和线性代数初步知识的读者，即能顺利阅读本书。本书对理论部分划分了三个层次：基本的（一至三章）、中间的（八、九章）和发展的（十一、十二章），深度逐步增加，处理方法有所不同，以适应不同读者的需要。本书总是从简单的实际问题引出新的概念、新的理论，并且尽力揭露新理论之所以能产生的个中奥秘，使读者能从单调的数学推导中解脱出来。有不少例题是从如何建立数学模型开始，直到稳定性问题的解决，形成了一个完整的过程，以便于初学者能触类旁通。每章后面附有习题以加深理论的学习；其中有些问题引自近期文献，以提高读者的兴趣。

由于作者水平的限制，上述三点要求自未能完全实现，并且

还会有不少的缺点错误，恳请阅者批评指正。本书篇幅有限，加上作者的疏漏，使许多有价值的论文未能列入，敬请谅鉴。

本书的写作与出版，得到西南交通大学孙训方教授的热情关怀与帮助，还得到北京航空航天大学黄克累教授、清华大学王照林教授等的支持；西南交通大学谢建华、裘晓钢同志对本书的前身（西南交大研究生教材）作了部分资料的收集与整理工作；西南交通大学图书馆馆员、阅览部的张秩菊同志所作的《稳定及振动专题题录》节省了作者大量的时间；西南交通大学出版社在经费紧张的情况下同意出版此书；对于以上同志以及所有关心本书写作出版者，作者敬致衷心的谢意！

舒仲周

1988年7月

目　录

绪 言

运动稳定性的研究起源于力学。它的最早的一个原理是以Torricelli命名的：物体的重心处于最低位置的平衡是稳定的。后来逐步发展到研究运动的稳定性。而且所谓运动，也不限于物体的运动，任何事物的变化都是一种运动，都存在是否稳定的问题。因此运动稳定性的研究超出了力学的范围，而进入多种领域。

运动稳定性的研究往往成为一个工程能否实现的关键。以发射人造卫星为例，我们要求它按预定的轨道运行，如果运动不是稳定的，这个要求就无法实现，卫星的发射也不会成功。大量的工程都存在类似问题。因此运动稳定性的研究对于科学技术的发展具有重要意义。

运动稳定性的奠基人是俄国学者李雅普诺夫（А. М. Ляпунов 1857—1918）。是他首次给出了运动稳定性的精确定义，建立了运动稳定性的一套严密的理论。他创立了两个方法，其中第二个价值最大，发展最快。因为第二方法无需求出运动微分方程的通解——精确的或者近似的，而只要利用一个函数（称为李雅普诺夫函数），即可直接判定运动的稳定性。这一方法叫做直接法。我们通常说的运动稳定性的理论，主要指的是直接法的理论。

在李雅普诺夫逝世以后，直接法的理论经过苏联学者Н. Г. Четаев，И. Г. Малкин，А. И. Лурье，Н. Н. Красовский，В. В. Румянцев，В. М. Матросов及美国学者J. P. La Salle等的相继研究，到现在有了很大的发展。在理论上，已经从原来的常微分方程发展到泛函微分方程、随机微分方程，从有限维空

间发展到无穷维空间；在应用上，已经从离散系统发展到连续介质系统，从力学领域发展到自控、机械、航空、航天、电力、化工、生态、经济、管理和系统工程等多个领域。

我国运动稳定性研究是在50年代由秦元勋以及张学铭、许淞庆等创导下开展起来的。三十年来许多研究者在力学系统的稳定性、控制系统的稳定性、大系统的稳定性以及基本理论等多个方面取得了突出的成绩。

运动稳定性是一门理论严谨、应用广泛、而且发展迅速的学科。为了体现它的这些特点，本书力求在理论上构成一个完整的体系，在应用上辟出大量的篇幅，并且尽可能多地介绍国内外特别是我国研究者的最新成果。

本书共计十二章六十节，可以划分为三个部分：

第一部分，主要是驻定系统的稳定性，它包括基本概念（第一章）、基本定理（第二章）、一次近似稳定性定理（第三章）、李雅普诺夫函数的构造法（第四章）、力学系统（第五章）、控制系统（第六章）和生态系统（第七章）的稳定性。

第二部分，非驻定系统的稳定性，它包括基本定理（第八章）、周期系数系统（第九章）和大系统（第十章）的稳定性。

第三部分是运动稳定性在理论和应用两方面的发展，它包括稳定性基本定理的推广和发展（第十一章）、完全稳定性、部分变元稳定性、不确定系统、不连续系统的稳定性（第十二章）等。

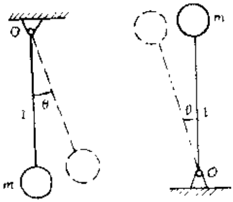
前两部分的四、五、六、七章和九、十两章，都是彼此独立的，读者可以根据不同需要进行选择。例如，对于仅仅希望了解一下运动稳定性的最基本内容的读者，可只学前三章；对于大学高年级学生，学习前三章外还可以根据不同专业的要求加学五、六、七中任一章（学第五章时最好先学§4.6-1）；对于研究生宜于加学第八章以及与本专业有关的章节。总之本书的编排使阅读者在选择上有很大的灵活性。

第一章　运动稳定性的基本概念

运动稳定性的概念是平衡的稳定性概念的推广。我们先从比较简单的平衡的稳定性谈起，给出它的严格定义，并对其中的难点作出详细的解释，然后引出运动稳定性的概念，给出运动稳定性的定义。

§1.1　平衡稳定性的初步概念

图 1-1(a)与(b)表示两个单摆：(a)为下垂摆，(b) 为倒立摆，它们是一条长为 l 的刚杆，其一端和质量为 m的重球固结，另一端用圆柱形铰链和支座联结，并设刚杆质量不计，铰链是足够光滑的。



(a)　　(b)

图 1-1

下垂摆有一个平衡位置，就是下垂的最低点，这时刚杆处于铅垂线上，重球所受的合力为零。如果重球初速为零，它将停留在这个位置上。这一现象是我们经常观察得到的。倒立摆也有一个平衡位置，即重球的最高点，这时刚杆也处于铅垂线上，重球所受的合力为零。从理论上说，如果重球初速为零，也将停留在这个位置上。但这一现象一般是观察不到的，这是为什么呢？

设刚杆偏离平衡位置的角度为 θ (图 1-1)，所谓平衡位置是满足

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta}=0,\quad \frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}=0$$

（在这里就是 $\theta=0$，$\dot{\theta}=0$）

两个条件的位置。对于倒立摆来说，要人为地实现这两个条件，一般是不可能的，即总有微小的偏离

$$\theta_0\neq0,\quad \dot{\theta}_0\neq0$$

存在，它们叫做**初扰动**（θ_0 是位置的初扰动，$\dot{\theta}_0$ 是角速度的初扰动）。即使偶而做到没有初扰动，在外界的干扰下（这是不可避免的）又会重新出现，这时，作用于重球的合力不为零，这个合力将使倒立摆对平衡位置的偏离 θ 和 $\dot{\theta}$（叫做扰动）越来越大以致倾倒，因此一般观察不到倒立摆倒立于最高位置的现象。

下垂摆则不然。虽然初扰动也难以避免而使重球所受合力不为零。但这个合力使下垂摆作微幅摆动，如果再考虑到实际存在的铰链摩擦和空气阻力，摆幅将逐渐减小，最后停留在平衡位置上，因此我们能观察到这种现象。

为了进一步分析这个原因，下面分别写出它们的运动微分方程，即对平衡位置的扰动的微分方程，这方程称为**扰动运动微分方程**。

1. 无阻尼的下垂摆

它的扰动运动微分方程是

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta \text{ 或 } \ddot{\theta}+k^2\sin\theta=0 \qquad (1.1\text{-}1)$$

这里，$k^2=g/l$，$k>0$。

这个系统的总能量 E 是它的动能和势能之和，即

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\theta)$$

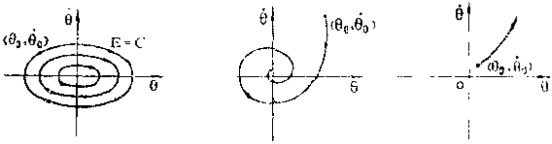
$$=ml^2\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+k^2(1-\cos\theta)\right]$$

我们知道这个系统的总能量是守恒的，即

$E=C$　　（C 为常数）

如果取 $C>0$ 充分小，并使 $|\cos\theta|<1$，则 $E=C$ 是相平面（在这里是以 θ 和 $\dot{\theta}$ 为坐标轴的平面）上的一族封闭曲线（图 1-2a_1），其中任一条都是系统（1.1-1）的由某个初始点（θ_0，$\dot{\theta}_0$）出发的轨线。从图（a_1）显然看出，只要初扰动 $|\theta_0|$ 和 $|\dot{\theta}_0|$ 充分小，摆的幅度也就是很小的。

我们把这种情况叫做系统的平衡是**稳定**的。



(a_1)　　(a_2)　　(b)

图 1-2

2. 有阻尼的下垂摆

假设阻尼和 $\dot{\theta}$ 成正比，则得扰动运动微分方程

$$\ddot{\theta}+2\mu\dot{\theta}+k^2\sin\theta=0 \qquad (1.1\text{-}2)$$

式中，μ 是阻尼系数，$0<\mu<k$。

这个系统的总能量仍如前一种情况一样，但由于阻尼的存在，E 是随时间减小的，最后减为零，即摆停留在平衡位置上，这表明方程（1.1-2）的一切解在相平面的轨线是向原点（平衡位置）趋近的（图 1-2 a_2）。

系统在这一情况当然是稳定的，但比无阻尼情况有更强的性质，我们把它叫做系统的平衡是**渐近稳定的**。

3. 倒立摆（不计阻尼）

它的扰动运动微分方程是

$$\ddot{\theta}-k^2\sin\theta=0 \qquad (k>0) \qquad (1.1\text{-}3)$$

当 $0<\theta<\pi$ 时，$\ddot{\theta}>0$，因此角速度 $\dot{\theta}$ 随 θ 而增加，设 $\theta_0>0$，$\dot{\theta}_0>0$，无论初扰动 θ_0、$\dot{\theta}_0$ 多么小，在摆达到最低点以前，方程（1.1-3）的解在相平面上的轨线是离开平衡位置的（图 1-2 *b*）。

这种情况叫做系统在平衡位置是**不稳定**的。

上述三种情况不但包含稳定性的粗略概念，而且暗含着解决稳定性的简便方法。我们将在以后进一步说明这点，并在第二章通过例 2.4-1、例 2.5-2 或 2.6-3 以及例 2.7-1 严格判定这三种情况的稳定性。

§1.2　平衡的扰动运动微分方程

单摆的扰动运动微分方程是一个二阶方程，我们可以把它化成两个一阶微分方程。只要令 $x_1=\theta$，$x_2=\dot{\theta}$，方程（1.1-1）～（1.1-3）就化为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-k^2\sin x_1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-k^2\sin x_1-2\mu x_2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=k^2\sin x_1\end{cases}\qquad (1.2\text{-}1)$$

原点（0，0）是平衡位置（由 $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$ 求得），x_1 与 x_2 是对它的扰动。

大量的力学、电学系统、自动控制、生态系统等都可以用下列微分方程组描述：

$$\dot{x}_s=X_s(t;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)\quad (s=1,\ \cdots,\ n)\quad (1.2\text{-}2)$$

其中，$X_s(t;\ 0,\ \cdots,\ 0)\equiv 0$。我们称满足

$$\dot{x}_1=0,\ \dot{x}_2=0,\ \cdots,\ \dot{x}_n=0$$

的点为平衡位置。所以原点是平衡位置，x_1，…，x_n是对它的扰动。

方程组（1.2-2）叫做微分方程的**范式**，以后将对范式建立起稳定性理论。

例 1.2-1 n 阶线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=F(t) \qquad (1.2\text{-}3)$$

式中，$y^{(n)}=\dfrac{d^n}{dt^n}y$ （$n\geqslant1$），把它写成范式。

解 令 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$，…，$x_n=y^{(n-1)}$，即得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \cdots\cdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+F(t)\end{cases}$$

这种形式的方程在控制理论中称为**状态方程**。

由扰动 x_1，…，x_n 形成的空间叫做**相空间**（或状态空间），它是 n 维欧几里得空间，以 R^n 表示。方程（1.2-2）还有一维是时间，记为 I，例如 I 表示 $t\geqslant0$。因此（1.2-2）是某系统在乘积空间 $I\times R^n$ 描述的扰动运动微分方程。$I\times R^n$ 是 $n+1$ 维欧几里得空间，叫做**增广空间**。

为了使记号简单，我们把坐标为（x_1，…，x_n）的点记作 $\boldsymbol{x}$，并把它写成列阵

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$$

这里 T 表示转置。也可以把 $\boldsymbol{x}$ 看成由原点到点（x_1，…，x_n）的矢径（图 1-3）。

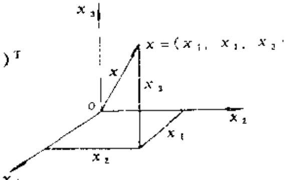


图 1-3

同理，用 $\dot{x}$ 表示 $(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)^T$，用 X 表示 $(X_1, \cdots, X_n)^T$，即

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

于是方程组（1.2-2）可以写成矩阵（或矢量）形式

$$\dot{x} = X(t, x) \tag{1.2-4}$$

并且注明 $x \in R^n$。

方程（1.2-4）的函数 $X(t, x)$ 一般并不要求在整个增广空间内定义。例如我们往往只取时间 $t \geqslant 0$，x 也只在原点附近的某个范围内取值（例如车辆的振动）。这个范围通过 x 的范数（或模）$\|x\|$ 表示，通常采用

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

任取常数 $r > 0$，不等式

$$\|x\| \leqslant r$$

表示以原点为球心，r 为半径的球形区域，称为原点的球邻域。

本书更多地采用所有 x_i 的绝对值中的最大值表示 $\|x\|$，即

$$\|x\| = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$$

任取常数 $r > 0$，不等式

$$\|x\| \leqslant r$$

表示形心在原点，边长为 $2r$ 的 n 维正方体，记为 $\overline{B}_r$（闭区域）；$\|x\| < r$ 表示正方体的内部，记为 B_r（开区域）；而以 b_r 表示正方体的边界。图 1-4 表示 $n=2$ 的情况。

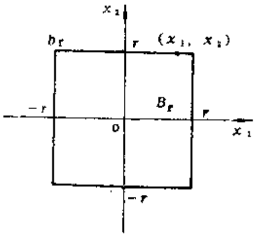


图 1-4

为了研究系统（1.2-4）