

数 学 与 哲 学

张 綏 著

学 林 出 版 社

责任编辑：成亦山

封面设计：范岍青

数学与哲学

张 绶 著

学林出版社出版 上海定西路710弄37号

新华书店上海发行所发行 常熟文化印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 9.5 插页 0 字数 281,000

1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷 印数 1—3,600册

书号：2259·011

定价：2.65元

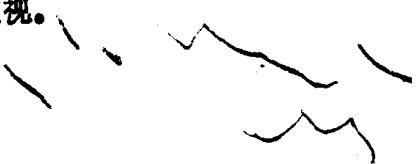
ISBN 7-80510-074-8/B·3

序

数学是一所宏伟的大厦，它的结构之美妙，是任何艺术构思所无法达到的；数学又是一门精湛的技艺，利用它可以把自然现象、社会现象以及它们的规律，描绘得井井有条；数学又象神话中的劈山利斧，是改造自然无比锐利的武器。数学的神奇，越来越使人们惊叹不已！

在惊叹的同时，在不断发展它、运用它的同时，人们不时地提出许多问题：数学大厦的基础是否巩固？它的非常严密的结构是否还有内在的缺陷？数学对于自然、社会能发挥这样重大的作用，其根据又何在？在解决各项实际问题时，数学是否可以无条件的信赖？这些都是和数学有关的哲学问题。另一方面许多哲学观点的形成或展开，和数学又有不解之缘，数学作为一门抽象的科学，对于一般的世界观和方法论有重大的影响。因而，和数学有关的一系列的哲学问题，值得关心数学的人们深思。

在历史上，不断地有人对这些问题提出这样或那样的见解。了解古往今来的诸子百家对这些问题的看法，比较数学科学在不同的土壤中的生长形态，自然是非常有意义的。在这本书中，读者们就可以获得大量这样的材料。我希望能引起大家的兴趣和重视。



谷超豪

前 言

我曾经在相当长的一段时间里，对数学产生过至今仍难以忘怀的热忱。我认真地读过昂利·庞加莱、B. A. W. 罗素和 D. 希尔伯特等名家的一些著作，为这些大师们所阐述的洋洋可观的数学哲学思想所吸引。然而，数学应该遵循什么样的哲学思想才能健康发展呢？关于这个问题，无论逻辑主义、直觉主义和 D. 希尔伯特的形式主义都各持其说，亦即不能得到一个明确的答案。在几年以前，偶然见到一本其中有介绍英籍匈牙利人伊姆雷·拉卡托斯的一些数学哲学的论著，他所阐述的数学哲学思想引起我反复的思考。思考的内容不仅是他的“拟经验主义”和“可证伪性”，而且萌发了我写数学哲学论著以阐述我的数学哲学思想的愿望。

由于数学哲学这一门学科的建立，还是上一世纪非欧几里得几何产生以后的事情，而且在它建立以后直至今天的这一段时间中，基本上为西方的一些数学哲学流派所左右；而我们对数学哲学的研究，长时间来并没有引起应有的重视，加上文理科过份地“泾渭分明”，从而造成了研究哲学的人不懂数学，从事数学研究的人又不太理会哲学的局面，即使有人在从事数学哲学研究工作，往往也是一些介绍性的翻译作品。这一局面，既增强了我“拓荒”的勇气，但也使我在研究这个

课题时遇到了许多令人望而生畏的技术问题，现在总算是一个一个地解决了。

在写这本论著时，虽然在我的思想中已经构思出这本书的内容，但是思想上的包袱十分沉重。因为按照惯例，本书本该由数学“工作”者和哲学研究“工作”者来做，我写这本书，岂不有“左道旁门”之嫌。然而，一种责任感和自信心支持着我，坚信自己能用辩证唯物主义思想为数学哲学这一学科贡献上一个新的观点。

书是写成了，但其中必然错误不少，望识者能不吝赐教为感。

上海大学文学院 张 綏

1985年11月

7911159/01

目 录

序.....谷超豪

前言

第1章 数学与哲学..... 1

 数学的起源..... 1

 数学的应用和“绝对真理性”概念的形成..... 8

 哲学诸学科同数学之联系.....22

第2章 数学哲学的童年.....31

 哲学家们在“本体论”问题上的苦思.....31

 “一”和“道”.....40

 在通往上帝之路上的反思.....53

第3章 由“绝对真理性”带来的第一次危机.....61

 “绝对真理性”和直角三角形的直角边及斜边.....61

 希帕索斯之死和“绝对真理性”的危机.....63

 第一次危机以后.....75

第4章 酝酿中的第二次危机.....96

 中世纪的数学哲学思想和数学的发展.....96

 视野的扩大和数学的“复兴”.....106

 数学的“个性”.....121

第5章 数学哲学思想的新生.....130

笛卡尔“变量”的哲学意义	130
微积分的建立和建立者的数学哲学思想	150
“无穷小”上的论战	165
第6章 数学的新“宇宙观”形成	180
休谟的“不可知”和康德的“先验”	180
数学哲学发展的新气象	190
非欧几里得几何建立的哲学意义	201
第7章 重建数学基础可靠性的努力	216
数学的算术化和罗素的逻辑主义	216
罗素悖论和数学史上第三次危机	228
罗素悖论发现后的其它数学哲学派别	242
第8章 拉卡托斯的观点与我的认识	264
拉卡托斯的数学哲学思想	264
“历史的”归纳	273
数学发展应该遵循的模式	283
参考书目	291

第1章 数学与哲学

数学的起源

当溯本寻源地研究数学时,首先需要解决的一个问题是:数学是什么?人类在自己的社会体验中,数学向来被认为是人类智慧的一种表达形式,它反映了细致、抽象的思维能力。它的基础是直觉、逻辑、分析和推理。虽然在历史上不同的学派强调不同的侧面,但是它们固步自封的结果,往往为人类社会的实际需要所冲破,数学也从这种社会需要中取得了发展的动能,并且往往跃出直接应用的界限,在一些应用学科和理论物理发展的历史中,经常可以看到这种现象。

因此,在 20 世纪 80 年代的今天,已可以作出这样一个明确的回答:数学是以人们社会生活的需要(包括客观存在的现象)作为研究对象,用数和形以及其它符号来抽象表述的一门科学。它同自然科学、人文科学并列为人类社会的三大科学。是将人类自然科学、生产技术、人文科学和意识形态引向更高层次发展的桥梁。数学科学这个提法为什么直到二十世纪的下半叶才能成立,这同数学这门有着无数分支的学科长期以来被笼罩在“绝对真理性”的神秘迷雾中有关。

关于数学“绝对真理性”的认识，应该说是人类社会发展到一定历史阶段所必然产生的一种历史现象。要认识这种历史现象的必然性，就需要从数学的起源追溯起。

最初，最简单的数学概念，是从数的概念发展起来的。人类究竟在何时才产生了数的概念？即使依靠目前的考古技术和古文献也是无法得出精确的结论的。但是一些人类学家对于目前尚处于原始状态的民族的研究，却使我们对于这一问题感到了“柳暗花明又一村”的希望。例如，在观察巴西的包尔托库德部落的生活时，发现该部落的成员就只用“1”和“多”两个词（即单数和复数）来表达数。在世界上其它部落中，数的概念也不尽相同。据某些人类学家研究，数的概念的产生，往往同人的四肢有关。如“2”这个数的出现，可能同双手有关；而“3”和“4”这2个数，又可能同2只手加1只脚（或2只脚加1只手），和2只手加2只脚有关。当然，在这样原始的阶段，人们还不会对这些依靠人体动作表示的数的符号予以名称，但是这却是人在思维能力上的飞跃。因为当人类想到用四肢来表达数量时，人类思想中的符号概念也渐趋复杂化。随着人类社会生产力的发展，在有些原始民族中逐渐将10个手指和10个脚趾的量，也引进到数的概念中，于是5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20这些数就相继地出现在人类的生活中。不过，人类对数的需要，是同人类的生活实践和抽象思维能力的进步有关。原始人在日常的生活中，对于物品的量开始产生了抽象思维的概念，今天猎到5头野牛，就在1条绳上打5个结，或者在树上刻5道痕加以表示，当这些野牛被氏族的成员食用以后，这5个绳结或5道痕依然存在，其意义实际上已改变为某日的狩猎收获了。久而久之，当将标志看猎

获野牛数量的绳结或刻痕汇集在一起时，就逐渐产生了加法运算和进位制概念，这应该可以说是最原始的数学吧。

从考古的资料和历史记载的资料来看，在不同民族的原始阶段，数的进位概念并不完全相同，有2进位制、5进位制、7进位制、10进位制、12进位制、16进位制、20进位制和60进位制，等等。至于表示的方法又各不相同。其中用2种符号表示数的方法（现在的电子计算技术中是普遍采用的），在汉族的祖先的生活中已早予使用，例如以 $| = 1$ ， $|| = 2$ ， $||| = 3$ ， $|||| = 4$ ， $||||| = 5$ ， $\perp = 6$ ， $\pi = 7$ ， $\pi\pi = 8$ ， $\pi\pi\pi = 9$ 。因此，在上述的数中，数的表示实际上是以“|”和“—”作为最基本的符号，目前，中国算盘的计数符号事实上仍是以上所述方法的器具化而已。很有意思的是，在我国周代的《易经》中也用“——”和“—”这两种符号来表示：天（乾☰）、地（坤☷）、雷（震☳）、火（离☲）、风（巽☴）、泽（兑☱）、水（坎☵）、山（艮☶）等。认为自然界即由这“八物”构成，其中“天”是父，“地”是母，又是其它“六物”的“父母”。在《易经》这本书中，又将上述的“八卦”推演为64卦（64种排列形式）和384爻（384种排列形式）。18世纪著名的数学家和哲学家戈特弗里德·威廉·莱布尼兹曾对此感到兴趣，经他研究后，认为《易经》上的64卦，是表示1至64的自然数，这种观点是否有点道理虽然值得探讨，但是他指出这是二进位制的看法，却是有点见解的，因为在我国古代计数用“|”和“—”两种符号来表示数的形式，同“——”和“—”这两种符号来表示世界万物的思想，两者之间似乎是有一种值得探索的内在联系，或许这就是数学和哲学最早结合的有记载内容吧。

不过，我们现在还很难回答我国原始社会时期是使用几进位制这个问题，因为我国的“原始社会”这个概念本身就

是一个十分复杂的问题，即使构成汉民族祖先的所谓华夏地区的氏族联盟，以及以后的商代和周代的统治者，其所用的度量衡制和其它天文历法制已够复杂了，更不用说在我国土地上还生活着这么多少数民族，他们从古到今究竟采取过多少“几进位制”，那是一个使人瞠目结舌的难题。在我国历史上，在相当长的时间中，实际上都处于几种进位制并用的状态，只是它们所表现的内容不同而已，如：有以金、木、水、火、土“五行”往复循环的五进位制；据说是随同摩尼教一起传入的7进位制^①；还有，使用得比较广泛的10进位制^②；干支中“地支”和生肖的12进位制^③；曾长期作为重量中“斤”和“两”换算的16进位制，以及20进位制和60进位制^④，等等。

人类在自己的生产活动中，产生进位制的概念，表明了人类抽象思维的能力又有了进一步的发展，因为一个相同的符号，人们已可以通过进位概念，赋予它另一个量上的意义。

① 有关7进位制的概念，我国古代并无，有些学者认为来自摩尼教之“七曜之制”。并引证《Journal Asiatique, 1911—1913》中“研究京师图书馆藏敦煌摩尼残经”中的一些内容，认为一星期为七曜之制为“摩尼慕阁”输入，初用康居语之译音，以名7日。

② 10进位制在我国的数学计算和度量衡单位中曾广泛使用，同时也是我国“干支”中“天干”的进位制，以甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸等10个文字符号组成。

③ 同10个“天干”相配，有12“地支”，即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥等12个文字符号。

④ 我国古代，将10个“天干”和12个“地支”循环相配，形成：甲子、乙丑、丙寅、丁卯、戊辰、己巳、庚午、辛未、壬申、癸酉、甲戌、乙亥、……等60组，称为“六十花甲子”，用以表示年、月、日和时的次序，周而复始，循环使用。现在农历的纪年和纪日仍用干支标记。

因此，最早的数的概念出现和最简单的数学产生，都是人类社会生活需要的产物，也是人类智力发展到一定阶段的产物。但是，我们必须注意到一个事实，即数的概念和最简单的数学运算自它形成时期起，它就是对外界事物在度、量、衡等方面，以符号表示所进行的抽象思维活动，而不是客观事物的存在就是为了证明这些符号所显示的“真理性”。这应该是数学哲学最基本的原理之一：即人们的社会存在和发展，是数学产生和发展的根本原因。

随着人类社会生活的发展，商品交易的规模愈来愈大，在人们的生活中，数的概念也不断扩大，于是以往用绳结，在树上刻痕，以贝壳串在绳上的记数方法已难以表现了。特别是在商品交易中，对于数量的计算要求愈来愈精密，愈来愈复杂，而计算方式则要求愈来愈简化，于是伴随着文字符号在人类社会中的出现，数字符号，和运用数字符号所进行的计算方式也成了人们生活的工具。虽然在一些数学著作中认为：“在公元前 2000 年，东方国家开始出现有记载的数学”^①，但是，有可能早在公元前 6500 年左右的苏美尔国家中已有这方面的记载。不过，到巴比伦时期，数学发展的程度已达到了初等代数的水平。在这以前，在埃及，¹⁷¹⁹由于实际生活的需要，数学的另一个分支：几何学，也随着人们对客观外界事物的观察和各种测量方法的发展已建立起来。

虽然我们在新石器时代遗留下来的陶器上能够见到那时候的人类所绘的几何图案，但是当时的人类并不知道他所绘的图案同几何的关系，因为在他聚精会神地描绘这些线条时，

① 见 Richard Courant and Herbert Robbins: 《What is Mathematics》，牛津大学 1978 年版第 1 页

更多的是在自然界的生活气息中得到的启发。“几何图案”这几个字，是我们给予的，是现代人强加给古人作品的概念，我们决不能由此引伸出新石器时代已经有了几何学的笑话。当然，当时人类能够运用直线的表示法，或圆形的表示法在陶器上绘制出这些图案，是他们对许多实物，如弓上的弦，天上的月亮，某些兽皮上的图案，树木的圆周等，观察之后所进行的描摹。但是当他放下绘制的陶罐而去实地测量某处到某处的距离，或者要新建一个房屋时，他们就只能从艺术上的追求回复到现实的工作中去。这时候他们虽然在实际的生活中经常用到几何的方法，但是他们自己并没有意识到这就是几何，更谈不上几何学了。

几何学在埃及首先得到发展，这同古代埃及人生活在尼罗河边的实际需要有关。古代埃及人自定居在尼罗河边开始农业生活以后，逐渐发现每当天狼星在清晨升起之日就是尼罗河河水上涨开始泛滥之时，古埃及人经计算后，得出这样一个规律：即天狼星最初上升的两个清晨之间，相隔着 365 个昼夜，他们把这 365 个昼夜定为 1 年（实际上也可看作为 365 进位制），把 1 年又分成 12 个月，每个月是 30 个昼夜，在每年末的第 12 月增加 5 天，这 5 天算作除旧布新的节日；每个昼夜被分成 24 小时，上述的这一些似乎是天文的知识，同几何学的发展有什么关系呢？除了人们很早就发现不同的日期、不同的时间，太阳光照射在某一物体上时，在地面形成的投影是不同的这个规律以外，更主要的是古埃及人在他们的生活中注视天狼星最初升起日期的原因，在于尼罗河水的泛滥将给他们的生命财产带来严重的危害，因此，他们才会这样精确地统计两次天狼星最初升起日期之间相隔的时间。尼罗河水的上涨泛

滥,虽然肥沃和浇灌了土地(这也是人们尽管受到河水泛滥之威胁,而不愿迁移它处的原因),但是也把各自的田界给抹得一千二净,如何重新确定原有田地的位置、界限和面积,这就是埃及的几何学诞生的最原始原因。在埃及,这门数学的重要分支由于实际的生活需要很快地得到了发展,虽然今天我们已无法找到当年确定泛滥后田界的计算资料,但是当我们看到至今仍存在的古埃及神庙遗址和宏伟的金字塔时,就能充分地了解当时确实已有了一批掌握丰富几何学知识的技师,反映了当时几何学发展的水平。| 据目前保存于英国博物馆里的“莱茵特纸草书”和保存在苏联莫斯科国立普希金造型艺术博物馆里的“莫斯科数学纸草书”^①等古埃及历史文献里,有许多结合建筑和计算面积、体积的几何学资料。很有意思的是,在“莱茵特纸草书”里,已经记载了公元前3000年时古埃及人计算圆面积的方法,古埃及的“几何学家”把圆的直径的 $\left(\frac{8}{9}\right)$ 长度定为正方形的边长,求这个正方形的面积,并且以此得出所求圆的面积。亦即:

如设 $2r$ 为圆的直径,

则圆的面积为 $\left(\frac{8}{9} \times 2r\right)^2$,

如果用现代求圆面积的公式加以验算,则“莱茵特纸草书”中记载的方法所得的结果 $(3.16r^2)$ 同 πr^2 已相当近似。

① 这是用颜料写在纸莎草上的一些文献,是古埃及留下的珍贵文献,现为一些国家的博物馆和私人收藏家所收藏。这两种纸草书,据考证均在公元前2000年至公元前1800年间写成。不过,“莱茵特纸草书”实际上是公元前3000年时一些文献的抄本,有些学者考证,这个抄本、为公元前2000年时,一个叫阿默士的人所抄写的,因此又称为“阿默士纸草书”。

不过,当时的这些方法还处在经验的摸索阶段,它以生活中的需要作为摸索求知的动力,一些计算方法也没有形成公式,但是我们应该想到以后几何学的定理、公理、公式正是由这些经验的探索而逐渐形成的。

数学的应用和“绝对真理性”概念的形成

在人类生活中,随着农业、商业、航海业、建筑业、水利灌溉业、军事技术、交通的发展,以及国家税收制度、各种借贷形式的需要,对于数学的计算形式产生了愈来愈高的要求。人们在自己的经验中逐渐地形成了这样一种概念:即只要计算无误,数学是可以绝对相信的。尽管,现在有人对数学的发展,还纠缠在东方人功绩大,还是西方人贡献大等问题上,但是,当我们把人类社会作为一个系统来看时,就会明白数学的发展是东西方文化互补的结果。以米利都人泰勒斯为首的爱奥尼亚学派正是汲取了古代巴比伦和埃及的数学成就,以逻辑证明的手段,确立了第一批几何定理。如现在中学《平面几何》中所述的判断两个三角形全等三个定理中的一个定理:“若两个三角形有一条对应边,以及相对应的两个角相等,则这两个三角形全等。”这个定理就是泰勒斯提出的,所以又称为泰勒斯定理,他同时又将这个定理运用到测量中去,取得了实际效果。但是,他在宇宙的形成和起源等问题上,所作的结论要比我国《洪范》和《周易》中提出的思想,以及印度的世界万物由地、水、火、风“四大”所构成的思想简陋得多。虽然在许多史书上,把爱奥尼亚派哲学上的成就看得比它在数学上的成就更大,但是泰勒斯把世界万物源于水的思想,以及他认为

地球是个浮在水上的平面的观点，远不及他测量金字塔高度所使用的方法那样科学。不过，他对“本体论”的研究，却是古希腊哲学家中比较早的一位。

毕达哥拉斯(约公元前 580 年——公元前 500 年)则要比泰勒斯更前进一步。这是一位同孔子、释迦牟尼几乎同时代的人。他曾在埃及居住了近 22 年，从埃及神庙的祭司那里了解了古埃及有关数学、天文方面的知识。因政治观点不同，回国后又前往希腊的移民地阿佩宁半岛的克罗托纳城定居。他所建立的学派——毕达哥拉斯学派，实际上是具有神秘主义色彩的“唯数论”派。他们在研究音乐乐理的谐音时发现，产生各种谐音的弦的长度都成整数比，例如，两根绷得同样紧的弦，当它们的长度比为 2:1 时，就会产生相差八度的谐音，而两根绷得同样紧的弦，当它们的长度比为 3:2 时，短弦发出的音比长弦发出的音要高五度，而如果三根绷紧的弦的长度之比为 3:4:6 时，就能得到和声的谐音，毕达哥拉斯派把音乐中的这个发现，综合周围其它生活现象的观察，认为找到了宇宙间万物的总规律，其本质就是数的严整性和和谐性。他们认为世界上的万物和现象都只能用数学才能加以解释。公元前五世纪，毕达哥拉斯派的菲洛罗斯在谈到这些问题时说道：“如果没有数和数的性质，世界上任何事物以及它与其它事物的关系都不能为人们所清楚地了解，……你不仅可以在鬼神的事务上，而且可以在人间的一切行动、思想，以致一切行业和音乐中看到这种数的力量”，^①按照这个宇宙观，毕达哥拉斯派把构成数学的符号——数，看作为一切存在之物和现象的最

① [美]M·克莱因：《古今数学思想》I 第 168 页，上海科学技术出版社 1979 年版

基本要素。他们甚至认为整个宇宙是建立在前四个奇数(1、3、5、7、)和前四个偶数(2、4、6、8、)的基础上的。并且把奇数看为阴性，偶数看为阳性。这种思想不知同中国的《周易》中所提出的乾为父、坤为母，生成世界万物的思想有无渊源之处，这是一个值得研究世界文化史的学者们探讨的问题。

应该看到毕达哥拉斯派的学者提出的这一整套理论，不是毫无根据的，除了上述所提到的关于音乐谐声同弦的长度比之间关系的发现外，他们还对正方形的面积进行了研究，所得的结果，使他们更加兴奋，因为如果设一个正方形边长为 a 的话，那么边长为 $1/2a$ 、 $1/3a$ 、 $1/4a$ 、 $1/5a$ 、…… $1/na$ (n 为自然数)的正方形同 a 为边长的正方形面积之比，就分别为 $4:1$ 、 $9:1$ 、 $16:1$ 、 $25:1$ 、…… $n^2:1$ ；同时，他们在研究正多边形覆盖平面问题时，毕达哥拉斯学派发现这种覆盖只有如下三种情况(图1)亦即为6个正三角形、4个正四边形和3个正六边形。在这3个图形中，其边数比为 $3:4:6$ ，而其正多边形的个数之比，正好相反，为 $6:4:3$ 。

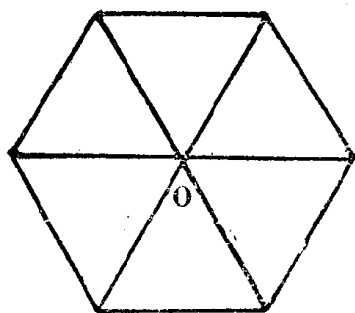


图 1-①

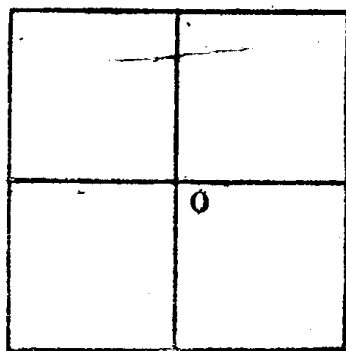


图 1-②