大学生之友

DAXUESHENGZHIYOU

微积分

解题分析 下

江苏科学技术出版社

微积分解题分析

下册

张镜清　王伯文　徐钟懿

汤正谊　吴令文　陈必胜

江苏科学技术出版社

特约编辑　戴朝寿

微积分解题分析（下册）
张镜清　王伯文　徐钟懿
汤正谊　吴令文　陈必胜

出版：江苏科学技术出版社
发行：江苏省新华书店
印刷：苏　州　印　刷　厂

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 28.5　字数 630,000
1983 年 7 月第 1 版　　1983 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—21,000 册

书号：13196·139　　定价：2.75 元

责任编辑　沈绍绪

《大学生之友》丛书出版说明

大学理工科的学生，包括电视大学、职工大学的学生，在学习过程中往往要演算大量的习题，以加深对课程内容的理解和记忆。但在解题时，经常会遇到各种各样的困难。《大学生之友》丛书就是为了帮助他们提高解题能力，熟练演算技巧，牢固地掌握学科知识而出版的。

丛书以解题分析为主。为了便于阅读，每节首先简要介绍有关的概念、定律和公式。然后，用较大的篇幅选择有代表性的例题进行剖析，讲述解题的思路，归纳解题的规律，指出必须注意的事项。最后，附以适量的习题，并提供答案或提示。

丛书内容密切配合大学教材，选题以数理化基础课和专业基础课为主，兼顾各专业课。各书的出版时间，也基本上按此顺序安排，逐步配套。

我们的愿望，想使这套丛书成为大学生喜爱的“朋友”。能否如愿，还有待于广大师生的检验。我们诚恳地欢迎读者对每一本书提出宝贵意见，使它们成为名副其实的“大学生之友”。

江苏科学技术出版社

前　言

本册内容，包括分析基础（确界、聚点和柯西收敛准则）、函数级数、多元函数微积分以及含参变量积分（其中包括拉普拉斯变换与富里哀变换的初步知识）。

考虑到目前读者阅读和解题能力的不断提高，在本册中我们将解题分析过程从上册中的“二、例题分析”以及“三、习题题解”两步，缩并为一步，即“二、例题分析”。

本册在分工执笔的基础上，最后由张镜清同志合稿。书中插图由张筑生同志绘制。南京大学何崇佑老师对本书初稿提出了许多宝贵的修改意见，我们对此表示衷心感谢。

编　者

目　录

第十四章　广义积分和含参变量积分

第九章　分析基础

第一节　确　　界

一、内容提要

1. 实数系 R 的连续性公理

任何非空的上方有界的实数集都存在最小上界（上确界）。

2. 上确界和下确界

设 $E=\{x\}$ 是有界实数集：

（1）若对于每一个 $x\in E$，恒有 $x\geqslant m$；并且对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $x'\in E$，使 $x'<m+\varepsilon$，则称数 m 为集合 E 的下确界，记为 $\inf\{x\}$。

（2）若对于每一个 $x\in E$，恒有 $x\leqslant M$；并且对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $x''\in E$，使 $x''>M-\varepsilon$，则称数 M 为集合 E 的上确界，记为 $\sup\{x\}$。

若集合 E 下方无界，则记为 $\inf\{x\}=-\infty$；集合 E 上方无界，则记为 $\sup\{x\}=+\infty$。

3. 下确界存在定理

任何非空下方有界的实数集都存在最大下界（下确界）。

4. 极限存在的有界原理

单调有界数列必有极限。

二、例题分析

例1 讨论下列实数集的有界性：

(1) 设 $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，其中 $p_i(i=1, 2, 3, \cdots)$是不大于9的非负整数，而 p_0 是一整数，证明集合 $\{x_n\}$ 有界；

(2) 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，证明集合 $\{x_n\}$ 有界；

(3) 设 $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$，$x_0 > 0$，证明集合 $\{x_n\}$ 有界；

(4) 证明任一收敛数列必有上确界和下确界；

(5) 设 $E = \{p: p^2 < 3$ 的有理数$\}$，证明集E有界，但是没有一个有理数可以是集E的上确界和下确界.

解 一个实数集E是否有界，是指有没有这样一个有限区间$[a,b]$存在，使得E包含在这个区间内，亦即$E \subset [a,b]$；或者是不是存在这样的数M，使得对于任一数$x \in E$，恒有$|x| \leqslant M$. 特别地，作为一种特殊的实数集——数列$\{x_n\}$，它的有界性更可表述为：对于所有正整数n，恒有

$$a \leqslant x_n \leqslant b \text{ 或 } |x_n| \leqslant M.$$

因此数集的有界性归结为去验证这些不等式是否恒能成立. 而验证不等式的方法通常有：放大不等式法，数学归纳法及余项有界性的推理法(亦即，若对于某个足标N以后的所有数x_n有界，则数列$\{x_n\}$必有界). 现结合本例分别讨论之.

(1) 因为

$$|x_n| \leqslant |p_0| + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}$$

$$= |p_0| + \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \leqslant |p_0| + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= |p_0| + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界的．当然，在上述放大不等式的过程中，亦可以把每个 $p_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ 都放大为 10，那末，最后就将得到 $|x_n| \leqslant |p_0| + \frac{10}{9}$．这说明一个数列若有界，则上界或下界不唯一．一般地讲，若 a 和 b 分别是集 E 的下界及上界，则任一小于 a 的数 c 及大于 b 的数 d 亦分别是 E 的下界和上界．

（2）如果一个数列是单调下降下有界的，则任一下界数都是它的下界，而这个数列的第一项就是它的上界．因此，一个单调下降下有界的数列一定是有界数列．

通常，要验证一个数列具有单调性，只要证明这个数列的任意相邻两项之比总大于（或小于）1；或者任意相邻两项之差总大于（或小于）0．在本题中，因为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n},$$

又根据微分学中值定理可以得到

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta}, \quad 0 < \theta < 1.$$

于是对所有的 n，不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \qquad (9.1)$$

成立，从而，恒有 $x_{n+1}-x_n<0$，亦即 $x_{n+1}<x_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)。故 $\{x_n\}$ 是单调下降数列，而 $x_1=1$ 是数列的上界。

另一方面，不等式(9.1)的右边部分相当于

$$0<\frac{1}{n}-[\ln(n+1)-\ln n]. \tag{9.2}$$

将(9.2)按 n 相加，有

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1),$$

从而

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)>0,$$

亦即对于所有的 n，总有 $x_n>0$。这就证明了数列 $\{x_n\}$ 不仅单调下降，而且是下有界的，其下界为 0，亦即恒有不等式

$$0<x_n\leqslant x_1=1 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

成立。

因此，数列 $\{x_n\}$ 是有界的。

值得注意的是，本例中的上界 1，乃是集合 $\{x_n\}$ 的最小上界。因为 $x_1=1$，所以任一小于 1 的正数 α 已不再满足不等式 $x_1<\alpha$，亦即 α 已不再是集 $\{x_n\}$ 的上界了。

(3) 当一个数列的一般项是由一个(或 n 个)递推公式给出时，该数列的有界性往往需要用数学归纳法来推证。本题就是这样的一个例子。现讨论如下：

首先我们观察递推公式

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}}\right) \quad (n=1, 2, 3, \cdots), \tag{9.3}$$

不难发现，(9.3)右端括号内的两项之积等于 2，于是利用不等式 $\sqrt{pq}\leqslant\frac{p+q}{2}$ 立刻得到

$$\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{2}{x_{n-1}}}$$

$$=\sqrt{2}\quad(n=1,2,3\cdots).$$

这就证明了对于所有的正整数 n，总有 $x_n\geqslant\sqrt{2}$，因而数列 $\{x_n\}$ 是有下界的。

其次，我们用数学归纳法来证明这个数列还是有上界的. 事实上

当 $n=1$ 时，显然有 $\sqrt{2}\leqslant x_1=\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}$，其中 $x_0>0$；

当 $n=2$ 时，有

$$\sqrt{2}\leqslant x_2=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}\right)=\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}.$$

设当 $n=k$ 时，$\sqrt{2}\leqslant x_k\leqslant\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}$ 成立，则有

$$x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}\right)=\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0},$$

亦即当 $n=k+1$ 时，不等式 $\sqrt{2}\leqslant x_{k+1}\leqslant\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}$ 也成立.

由数学归纳法可知不等式 $\sqrt{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}$ 对所有的正整数 n 都成立. 于是可得不等式

$$0<x_n\leqslant\max\left(x_0,\ \frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 不仅下有界，而且上有界，从而是有界的。

(4) 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，则从数列收敛的定义知，对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 $N>0$，使得当 $n\geqslant N$ 时，恒有不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立. 从而当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n|<|A|+\varepsilon$. 于是，若取 $M=\max(|x_1|, |x_2|, \cdots |x_{N-1}|, |A|+\varepsilon)$，则对所有正整数 n 恒有不等式 $|x_n|\leqslant M$ 成立，这表明数列 $\{x_n\}$ 有界. 然后，再根据实数系 R 的连续性公理及下确界存在定理，立刻可以断定数列 $\{x_n\}$ 必有上确界和下确界.

特别地，如果收敛数列又是单调的，那么绝对值不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 变为 $A-\varepsilon<x_n\leqslant A$ 或 $A\leqslant x_n<A+\varepsilon$，并且这时不等式 $x_n\leqslant A$ 或 $A\leqslant x_n$ 对所有正整数都成立，对照确界的定义，即得数 A 就是数列 $\{x_n\}$ 的确界.

(5) 集 E 的有界性是不难推得的. 事实上，对于任一有理数 $p\in E$，恒有 $p^2<3<4$，故 $|p|<2$. 这就意味着 $E\subset[-2,2]$，所以 E 是有界的.

另一方面，由于没有有理数能满足 $q^2=3$，所以为了证明没有有理数可以是 E 的上确界，只要证明有理数集 E 没有最大数就行了.

为了证明 E 无最大数，只需证明对于 E 中的任一数 p，总还存在 E 中的另一个数 p'，使得 $p'>p$；或者证明对于任一 $p\in E$，总存在一个有理数 $h>0$，使得 $p+h\in E$. 而为了证明这件事，最好的办法是把这种有理数 $h>0$ 具体找出来. 为此，我们来分析这种 h 所应满足的条件：一方面，h 必须大于 0；另一方面，$(p+h)^2$ 必须小于 3.

企图直接解不等式 $(p+h)^2<3$ 以求 h 并不能达到目的，但是可作如下的处理：令 h 为满足不等式

$$0<h<1 \text{ 及 } h<\frac{3-p^2}{2p+1}$$

的有理数，并令 $p'=p+h$，则有 $p'>p$ 及

$$p'^2=p^2+(2p+h)h<p^2+(2p+1)h$$
$$<p^2+3-p^2=3$$

这就证明了所要的结论．用类似的方法可证没有有理数是 E 的下确界(读者作为练习自行证明之)．

例 2 求下面各数列的上、下确界：

(1) $x_n=\dfrac{1}{n-10.2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$；

(3) $x_n=\dfrac{1000^n}{n!}\quad(n=1,2,3,\cdots)$；

(4) $x_n=1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$；

(5) $x_n=n^{(-1)^n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$．

解 从确界的定义容易了解到以下事实：一个数集如有最大值(最小值)则这个最大值(最小值)一定是该集合的上确界(下确界)．所以，在求一个数集的确界时，往往可以从求该集的最大值(最小值)入手．特别是对于一个数列而言，这种办法常常是行之有效的．

(1) 观察数列 $x_n=\dfrac{1}{n-10.2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$，即

$$-\frac{1}{9.2},\ -\frac{1}{8.2},\ \cdots,\ -\frac{1}{1.2},\ -\frac{1}{0.2},\ \frac{1}{0.8},\ \frac{1}{1.8},\cdots,$$

不难发现前十项全为负，而从第十一项开始，以后各项又全部为正，并且各项的数值愈来愈小．这就意味着这个数列可能有最大值，而且这个最大值将被位于第十项左右的一些项所取

到.为了确切地把这个最大值找出来,我们把数列分成两段来考虑.一方面,当 $n\leqslant 10$ 时,对应着数列的前十项,在这十个数中,必有最大值与最小值.实际上不难得到

$$\min_{1\leqslant n\leqslant 10}\{x_n\}=x_{10}=\frac{-1}{0.2}=-5,$$

$$\max_{1\leqslant n\leqslant 10}\{x_n\}=x_1=\frac{-1}{9.2}. \tag{9.4}$$

另一方面,从

$$x_{n+1}-x_n=\frac{-1}{(n-9.2)(n-10.2)}$$

立刻推得,当 $n>10$ 时,$x_n>x_{n+1}$,所以又有

$$\max_{n>10}\{x_n\}=x_{11}=\frac{1}{0.8}=\frac{5}{4},\quad x_n>0\quad (n>10). \tag{9.5}$$

综合(9.4)与(9.5),有

$$\min\{x_n\}=-5,\quad \max\{x_n\}=\frac{5}{4},$$

从而得

$$\inf\{x_n\}=-5;\ \sup\{x_n\}=\frac{5}{4}.$$

(2) 所给数列可以写为

$$-1,\quad \frac{1}{2}+1,\quad -\frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}+1,\quad \cdots.$$

容易看出,这个数列的通项实质上可以归结为两个简单的表达式:

$$x_{2k}=1+\frac{1}{2k},\quad x_{2k-1}=\frac{-1}{2k-1}\quad (k=1,2,3,\cdots).$$

于是,我们只需分别考虑子数列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 就可以了.

显然,数列 $\{x_{2k}\}$ 是单调下降且下有界的,并且

$$1 \leqslant x_{2k} \leqslant x_2 = \frac{3}{2} = \max\{x_{2k}\}; \qquad (9.6)$$

另一方面，因为每个 x_{2k-1} 都是负数，所以不难断定数列 $\{x_{2k-1}\}$ 是单调上升且有上界的，故又有

$$\min\{x_{2k-1}\} = -1 = x_1 \leqslant x_{2k-1} < 0。 \qquad (9.7)$$

综合(9.6)与(9.7)，得到

$$\min\{x_{2k-1}\} \leqslant x_n \leqslant \max\{x_{2k}\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

从而

$$\sup\{x_n\} = \frac{3}{2}; \quad \inf\{x_n\} = -1.$$

(3) 观察数列

$$1000, \ \frac{1000^2}{2!}, \ \frac{1000^3}{3!}, \ \cdots, \ \frac{1000^{999}}{999!}, \ \frac{1000^{1000}}{1000!}, \ \cdots,$$

可以看到第 999 项和第 1000 项的数值相同，且当项数小于 999 时，随着 n 的增大 x_n 亦增大；而当 $n > 1000$ 时，情况正好相反.事实上，由于

$$\frac{1000^n}{n!} = \frac{1000^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1000}{n},$$

故得

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1000}{n}.$$

可见，当 $n < 1000$ 时，$x_n > x_{n-1}$；而当 $n > 1000$ 时，$x_n < x_{n-1}$.所以在前 999 项中，以 x_{999} 为最大；而在后面的所有项中，又以 x_{1000} 为最大。再注意到 $x_{999} = x_{1000} = \frac{1000^{999}}{999!}$，所以有

$$\max\{x_n\} = \frac{1000^{999}}{999!}.$$

另外，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000^n}{n!} = 0$，根据例 1 (4)知道 $\inf\limits_{n>1000} \{x_n\} = 0$.

注意到对于所有的 n，总有 $x_n>0$，所以最后得到

$$\sup\{x_n\}=\frac{1000^{999}}{999!};\quad \inf\{x_n\}=0.$$

注意 一个数列的确界是指由数列各项的数值所组成的数集的确界．一个数列可以有若干个项同时达到确界，这时，该数列的确界为这些项所取到的共同数值．例如数列：1，0，1，0，…，1，0，…，分别有无限多个项取到 0 与 1，此时显然有

$$\sup\{x_n\}=1;\quad \inf\{x_n\}=0.$$

（4）当一个数列的通项实质上是由若干个相邻的项所给出时，可以分别求出以这些项所对应的子数列的上、下确界，然后取它们中间的最大值和最小值，从而得到数列的上、下确界．

数列 $x_n=1+\frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ 的通项可以写成下列四个相邻的项：

$$x_{4k-3}=1;\ x_{4k-2}=\frac{1}{4k-1};\ x_{4k-1}=1;\ x_{4k}=2-\frac{1}{4k+1}.$$

显然有

$$\sup\{x_{4k-3}\}=\inf\{x_{4k-3}\}=1;$$

$$\sup\{x_{4k-1}\}=\inf\{x_{4k-1}\}=1;$$

$$\sup\{x_{4k-2}\}=\max\{x_{4k-2}\}=\frac{1}{3},$$

$$\inf\{x_{4k-2}\}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{4k-1}=0;$$

$$\sup\{x_{4k}\}=\lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{1}{4k+1}\right)=2,$$

$$\inf\{x_{4k}\}=\min\{x_{4k}\}=\frac{9}{5},$$