

青年自学丛书

几 何

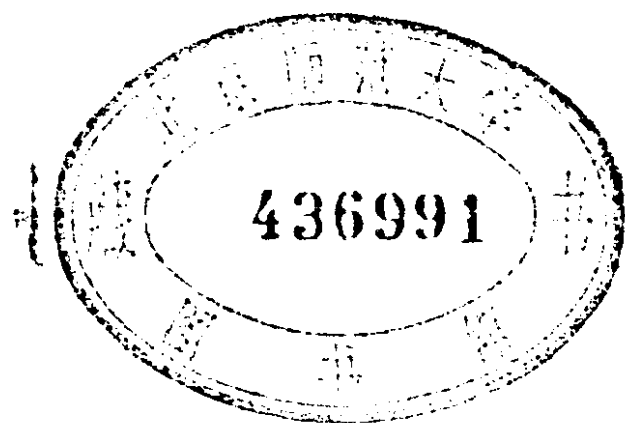
上海人民出版社

青年自学丛书

几 何

《初等数学》编写组

72.24.54



上海人民出版社

青年自学丛书

几 何

《初等数学》编写组

上海人民★版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.5 字数 232,000

1973年9月第1版 1974年3月第2次印刷

印数: 450,001—539,000

统一书号: 13171·67 定价: 0.56 元

毛主席语录

自然科学是人们争取自由的一种武装。人们为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

《青年自学丛书》编辑说明

毛主席教导我们：“知识青年到农村去，接受贫下中农的再教育，很有必要。”几年来，成千上万的知识青年，响应毛主席的伟大号召，满怀革命豪情，奔赴祖国的农村和边疆。他们认真读马、列的书，读毛主席的书，积极投入批林整风，朝气蓬勃地战斗在三大革命运动的第一线，坚定地走同工农相结合的道路，对建设社会主义新农村作出了贡献，阶级斗争和路线斗争的觉悟有了很大提高。无产阶级英雄人物不断涌现，一代革命青年正在茁壮成长。这是毛主席革命路线的伟大胜利。

按照毛主席关于“要关怀青年一代的成长”的教导，为了适应广大下乡上山知识青年自学的需要，特编辑、出版这套《青年自学丛书》。丛书以马列主义、毛泽东思想为指导，内容包括哲学、社会科学、自然科学的一些基本知识和鲁迅作品选。我们希望，这套丛书的出版，能对下乡上山知识青年的学习起积极作用，有助于他们进一步提高路线斗争觉悟、政治理论水平和文化科学水平，在又红又专的道路上阔步前进，更好地适应建设社会主义新农村和各项事业发展的需要。

我们对大力支持这套丛书的出版工作的有关单位和作者，表示衷心的感谢，并欢迎广大读者对这套丛书提出意见和批评，以便改进。

上海人民出版社

一九七三年四月

编 者 的 话

为了帮助广大知识青年学习初等数学知识，我们编写了《代数》与《几何》这两本书。

《代数》包括代数方程、指数、对数、三角函数等知识，同时也介绍了数列、排列组合、复数等内容。《几何》的前半部分介绍了三角形(包括边角计算)和圆，后半部分则属于平面解析几何的内容。

这两本书是互有联系的，必须配合使用。譬如，可以按照下面的顺序进行自学：先学习《代数》的前四章，再《几何》的前四章，然后《代数》的后五章，最后学习《几何》的后五章。

由于我们的思想水平不高，实践经验又不足，书中一定有许多缺点和错误，请读者批评指正。

《初等数学》编写组

1973年8月

目 录

第一章 几何的初步知识	1
第一节 几何的研究对象	1
一、形的概念(1) 二、常见的一些几何图形(2) 习题(13)	
第二节 几何中的推理论证	15
一、推理方法(15) 二、理论和实践的统一(18) 习题(19)	
第二章 三角形	21
第一节 三角形三内角的和与勾股定理	22
一、三角形三内角的和(22) 二、勾股定理(26) 小结(29)	
习题(29)	
第二节 全等三角形	32
一、全等三角形的判定(32) 二、等腰三角形(40) 小结(46)	
习题(47)	
第三节 相似三角形	51
一、相似三角形的判定(51) 二、应用举例(55) 小结(60)	
习题(61)	
复习题	63
第三章 三角形的边角计算	66
第一节 直角三角形的边角计算	66
一、直角三角形的边角分析(66) 二、正弦和余弦(69) 三、正切(73)	
四、解直角三角形的应用举例(75) 五、三角比之间的关系(78)	
小结(81) 习题(82)	
第二节 一般三角形的边角计算	85
一、正弦定理(86) 二、余弦定理(88) 三、应用举例(90)	
小结(97) 习题(97)	
复习题	99

第四章 圆	103
第一节 圆内的角和弦	103
一、弦和直径(104) 二、圆心角和圆周角(106) 小结(110)	
习题(110)	
第二节 直线与圆弧、圆弧与圆弧的连接	111
一、直线与圆相切 圆与圆相切(112) 二、直线与圆弧的连接	
(119) 三、圆弧与圆弧的连接(122) 小结(124) 习题(124)	
第三节 弧长和弧度制	127
一、圆周长 弧长(127) 二、弧度制(129) 小结(132) 习题(133)	
第四节 圆的面积	134
一、圆和扇形的面积(134) 二、展开图的面积(137) 习题(149)	
复习题	150
第五章 直线和圆的方程	153
第一节 点和坐标	154
一、距离公式(154) 二、定比分点公式(156) 三、坐标轴的平	
移 移轴公式(158) 小结(161) 习题(162)	
第二节 曲线和方程	163
一、曲线和方程(163) 二、圆的方程(166) 小结(171)	
习题(171)	
第三节 直线的方程	173
一、直线的方程(173) 二、一次方程与直线(177) 小结(178)	
习题(179)	
第四节 直线和直线、直线和圆的位置关系	180
一、两直线的交角及平行、垂直条件(181) 二、直线和圆的相交、	
相切(185) 三、点到直线的距离(188) 小结(190) 习题(191)	
复习题	193
第六章 抛物线 椭圆 双曲线	196
第一节 抛物线	196
一、抛物线的定义和标准方程(197) 二、抛物线的图形(198)	
三、抛物线的光学性质(202) 四、 $y=ax^2+bx+c$ 的图形(206)	
五、用待定系数法求抛物线方程(208) 小结(210) 习题(211)	

第二节 椭圆	212
一、椭圆的定义和标准方程(212) 二、椭圆的图形(215) 小结(219) 习题(220)	
第三节 双曲线	221
一、双曲线的定义和标准方程(221) 二、双曲线的图形(222) 小结(229) 习题(229)	
复习题	230
第七章 极坐标与参数方程	232
第一节 极坐标	232
一、极坐标系(232) 二、曲线的极坐标方程(234) 三、等速螺线和凸轮(238) 四、极坐标与直角坐标的互换(242) 小结(245) 习题(245)	
第二节 参数方程	247
一、曲线的参数方程(247) 二、渐开线和摆线(253) 小结(256) 习题(257)	
复习题	258
第八章 坐标变换与二次曲线	260
第一节 坐标变换	260
一、移轴(260) 二、转轴(261) 三、一般坐标变换(263) 四、曲线方程变形举例(264)	
第二节 二次曲线	267
一、二次曲线一般方程的化简(268) 二、二次曲线的分类(272) 三、二次曲线类型的判定(275) 习题(277)	
第九章 初等数学应用选编	279
一、五角星画法(279) 二、圆形直角弯管的展开图画法(282) 三、正多边形切削的数学原理(285) 四、三角活塞旋转式发动机的缸体型线(289) 五、圆弧凸轮(294) 六、简单的线性规划问题(298) 七、优选法(305)	

第一章 几何的初步知识

第一节 几何的研究对象

一、形的概念

恩格斯说：“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物质，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。”^①

人们在生产实践中，接触到各种各样的物体。每种物体都有一定的形状，还有颜色、质地、硬度、重量等其他属性。所有这些属性，都需要分门别类地加以研究。当我们考察物体的形状，即其空间形式时，就把物体的其他属性暂时撇开，而只是把它们形状拿来比较，概括其共性，从而得到反映物体空间形式的几何图形。譬如，不论是瓷杯，玻璃杯，还是塑料杯，它们的杯口都是圆形的；不论是木球，皮球，还是铅球，它们都是球形的。这里，圆和球都是几何图形。

几何学从空间关系出发，通过研究几何图形的内部规律性，解决实践中遇到的有关形的问题。

例如建造房屋时，要设计屋架的形状。许多屋架的形状如图 1-1 所示。下面一根梁叫做下弦杆，中间一根柱叫做中柱。在实践中常遇到这样的问题：

^① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 35 页。

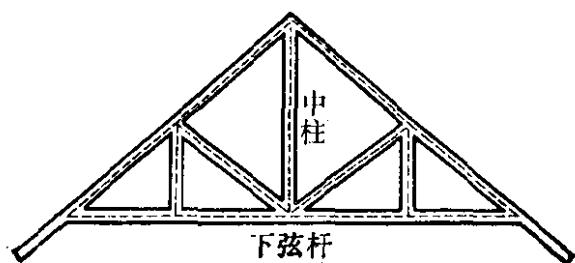


图 1-1

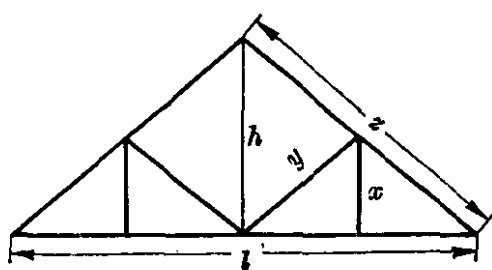


图 1-2

已知下弦杆和中柱的长度, 要求屋架中其他杆的长度.

为了研究的方便, 我们用线段表示杆, 从而把屋架的形状抽象成如图 1-2 所示的几何图形. 这样, 刚才提出的实际问题就转化为已知两线段长度 l 和 h , 求另外三线段长度 x 、 y 和 z .

为了求 x 、 y 和 z , 可以使用判断和推理的方法, 来分析图 1-2 中各线段的内在联系, 找出它们长度间的关系, 然后利用这些关系算出 x 、 y 和 z .

求出 x 、 y 和 z 后, 把这些结果用到实际中去, 就解决了屋架设计的问题.

几何学的研究就是这样遵循“实践——理论——实践”的道路前进的.

二、常见的一些几何图形

下面介绍一些常见的简单的几何图形.

任何一个几何图形都是由面、线、点组成的, 面、线、点叫做几何的基本元素. 例如长方体, 它的表面就是面, 面与面相交的地方就是线, 线与线相交的地方就是点 (图 1-3).

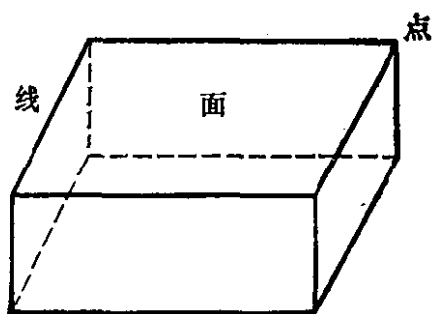


图 1-3

由这些基本元素构成的简单几何图形有直线、角、平行线、三角形和长方体等。

1. 直线

如长方体的边沿、书本的边沿、一段拉直的电线等等，它们都是有两个端点的线，这种线叫做线段。

把线段向一方无限延长就叫做射线，射线只有一个端点，例如探照灯发出的光线就是射线。

把线段向两方无限延长就叫做直线，直线是没有端点的。人们通过实践认识到，过两点能够作也只能作一条直线，也就是说，直线的位置由它上面任意两点的位置所确定，即两点决定一直线。

对于线段，我们把它的端点用两个大写字母例如 A 、 B 表示，并把这条线段记作 AB ，或用一个小写字母 l 表示（图 1-4）。



图 1-4



图 1-5

对于射线，如把它的一个端点记作 A ，再在射线上任意取一点 X ，则这条射线可记作 AX （图 1-5）。

对于直线，可在其上任意取两点 M 、 N ，记这直线为 MN （图 1-6）。



图 1-6

长度单位
1 厘米

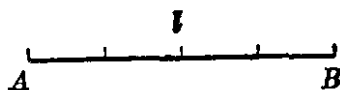


图 1-7

因为线段有两个端点，它是界于两个端点间的部分，所以它有一定的长度。要度量一条线段的长度，需要选定一种长

度单位. 比如选 1 厘米做长度单位, 用它去度量线段 AB , 如果刚好是 1 厘米的 4 倍, 那么这条线段 AB 就有 4 厘米长(图 1-7).

2. 角

角是简单的直线图形, 图 1-2 中屋架的各根杆之间都形成了角. 又如时钟的长、短针之间也形成了角.

一般地, 从一点引出两条射线所组成的图形就是角. 引出射线的点叫做角的顶点, 两条射线叫做角的边. 如图 1-8, 角由射线 OA 和 OB 组成, O 点是角的顶点, 这个角记为 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$, 读作“角 AOB ”或“角 BOA ”. 在不会与其他角混淆的情况下, 可简记为 $\angle O$. 有时, 为了方便起见, 在角里注上数字或小写希腊字母, 如图 1-9 中所示的角, 可分别记作 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle \alpha$, $\angle \beta$.

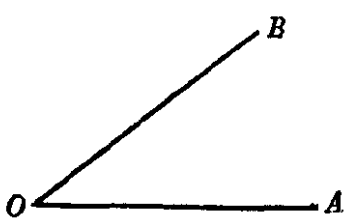


图 1-8

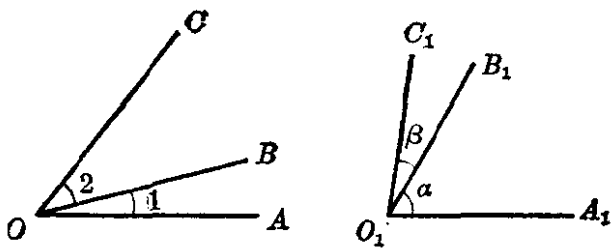


图 1-9

角也可以看成由一条射线绕它的端点旋转而得到. 如图 1-10 中, 一条射线绕着端点 O , 从 OA 位置转到 OB 位置, 形成了角 $\angle AOB$.

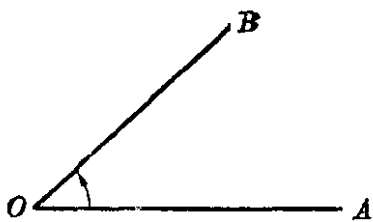


图 1-10

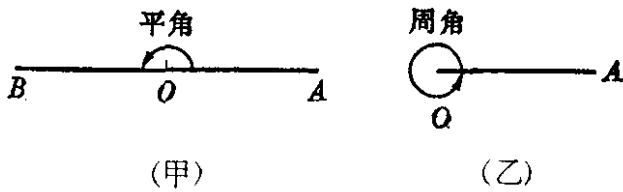


图 1-11

特别,若射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB , 当 OA 、 OB 形成反向射线时 (图 1-11 (甲)), $\angle AOB$ 叫做平角;继续转下去,使 OB 回到原来位置 OA (图 1-11 (乙)), 形成的角叫做周角.

度量一个角的大小与度量一条线段的长短一样, 需要选择一个度量单位. 把一个周角分成 360 等分, 这周角的 $\frac{1}{360}$ 我们称为 1 度, 记为 1° ; 把 1° 分成 60 等分, 这 1° 角的 $\frac{1}{60}$ 称为 1 分, 记为 $1'$; 把 $1'$ 分成 60 等分, 这 $1'$ 角的 $\frac{1}{60}$ 称为 1 秒, 记为 $1''$. 如 24 度 13 分 6 秒可记为 $24^\circ 13' 6''$.

这样, 周角就等于 360° ; 平角是周角的一半, 等于 180° .

通常, 我们是用量角器来度量角的大小的. 如图 1-12, 把量角器上的圆心和角的顶点重合, 并使量角器上 0° 的刻线对准角的一边. 这时, 角的另一条边在量角器上所对的读数, 就是这个角的度数. 如图 1-12 中, $\angle AOB = 50^\circ$.

我们把平角的一半也就是 90° 的角叫做直角, 把小于 90° 的角叫做锐角, 大于 90° 而小于 180° 的角叫做钝角.

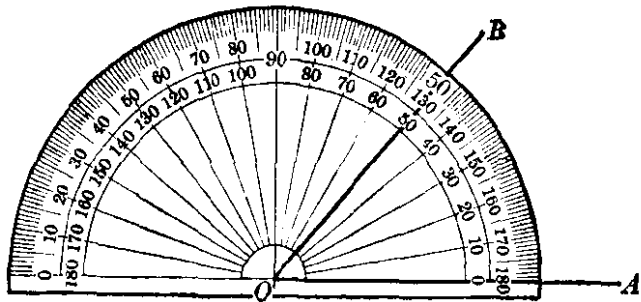


图 1-12

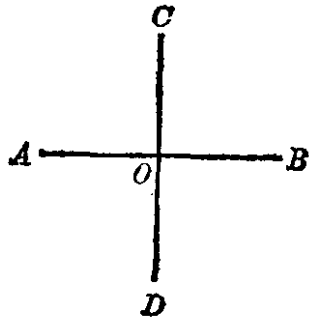


图 1-13

形成直角的两边叫做互相垂直. 一般地说, 当两条直线夹成直角时, 这两条直线的位置关系叫做互相垂直, 其中一条叫另一条的垂线, 交点叫垂足. 如图 1-13 中, AB 与 CD 垂

直, 就记为 $AB \perp CD$ 或 $CD \perp AB$. 记号“ $\perp$ ”读作“垂直于”. 建筑施工中定出的水平线与铅直线, 机械加工中在工件上划出的十字线, 都是互相垂直的直线, 因而形成的角都是直角.

如果两只角的和等于 90° , 就称这两只角互为余角. 如图 1-14 中 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为余角. 如果两只角的和等于 180° , 就称这两只角互为补角. 如图 1-15 中的 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 互为补角. 例如, $52^\circ 10'$ 的余角为 $90^\circ - 52^\circ 10' = 37^\circ 50'$, 而补角为 $180^\circ - 52^\circ 10' = 127^\circ 50'$.

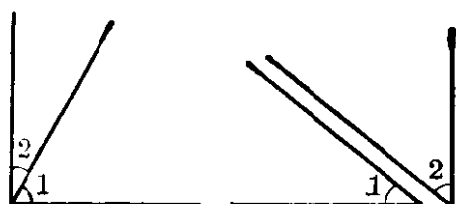


图 1-14

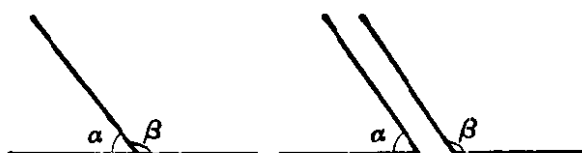


图 1-15

如果两条直线相交, 它们形成四个角 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ (图 1-16), 我们把其中的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 叫做对顶角, 同样 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角.

从图 1-16 直观地看到对顶角是相等的.

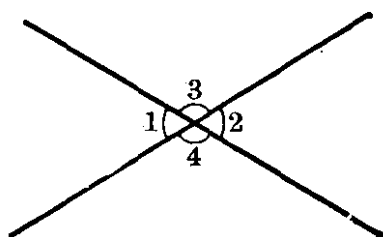


图 1-16

事实上, 根据补角关系有

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 3, \quad \angle 2 = 180^\circ - \angle 3,$$

可知 $\angle 1, \angle 2$ 都等于 $180^\circ - \angle 3$, 所以 $\angle 1 = \angle 2$.

因此得到: 凡对顶角都相等.

几何中把通过实践总结出来或经过推理得到的图形的基本性质, 通常叫做定理, 象上面说的“凡对顶角都相等”就是一条定理.

3. 平行线

铁路上的两条笔直的铁轨, 门的两条对边, 都可以想象为无论怎样延长也不会相交的直线. 在几何中, 把同一平面内不相交的两条直线叫做平行线. 若直线 AB 平行于 CD , 就记为 $AB \parallel CD$.

劳动人民在长期实践中, 不断总结经验, 创造了许多画平行线的方法. 例如, 把扳成一定角度的活络角尺贴紧木板一边, 从一个位置移到另一个位置, 就能划出一条条平行的直线 (图 1-17). 这种画法的特点, 是活络角尺的角度始终不变, 即 $\angle 1 = \angle 2$. 由此可见, 画出的直线 l_1 、 l_2 所以会平行, 是与角度 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的相等分不开的.

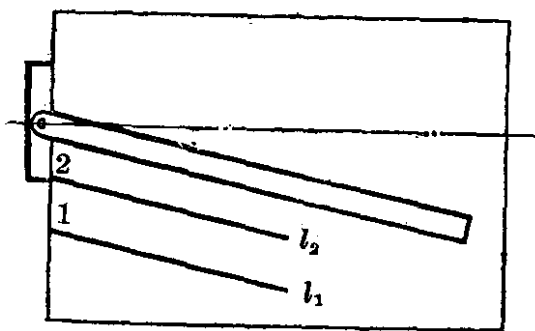


图 1-17

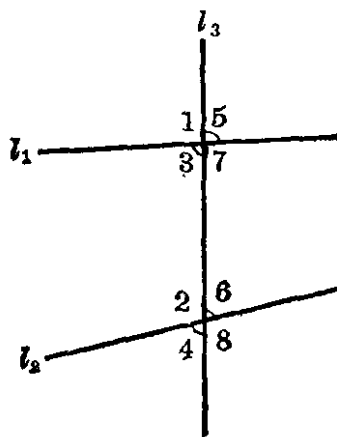


图 1-18

一般地, 两直线 l_1 、 l_2 被第三条直线所截, 构成八只角 (图 1-18). 我们称 $\angle 1$ 和 $\angle 2$, $\angle 3$ 和 $\angle 4$, $\angle 5$ 和 $\angle 6$, $\angle 7$ 和 $\angle 8$ 为同位角; $\angle 2$ 和 $\angle 7$, $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 为内错角.

用活络角尺画平行线的事实告诉我们, 两直线被第三条直线所截, 如果同位角相等, 这两条直线就一定平行. 我们把这条判定两直线平行的重要方法简单叙述为

定理 同位角相等, 则两直线平行.

反过来, 如果两条平行直线被第三条直线所截, 同位角一

定相等. 我们也可以简单叙述为

定理 两直线平行, 则同位角相等.

上述定理中的同位角还可以换为内错角. 在图 1-18 中, 根据对顶角相等的定理, $\angle 1 = \angle 7$. 于是, 由 $\angle 1 = \angle 2$ 可推知 $\angle 7 = \angle 2$. 因此, 可以建立反映平行线与内错角之间联系的两个定理.

定理 内错角相等, 则两直线平行.

定理 两直线平行, 则内错角相等.

4. 三角形

三角形是研究一般几何图形的基础, 实际应用也最广泛.

三角形也叫三边形, 它有三条边和三个角, 三条边两两相交, 它们的交点叫做三角形的顶点. 每一顶点用一大写字母表示, 如图 1-19 中这个三角形可记为 $\triangle ABC$, 读作

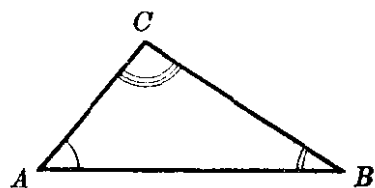


图 1-19

“三角形 ABC ”. 其中 $\angle A$ 对的边是 BC , 就称 $\angle A$ 是 BC 的对角, 或称 BC 是 $\angle A$ 的对边.

三角形中任意两边的和一定大于第三边, 否则就不能构成三角形. 又三角形的三只角的和等于 180° (理由将在第二章中介绍).

三角形除了以上最基本的性质外, 它的面积的计算也是经常要用到的.

为了寻求三角形面积的计算公式, 我们从计算正方形和长方形(又称矩形)的面积着手.

我们知道, 正方形的四边都相等, 长方形的对边相等而长与宽是不相等的, 它们的每一只角都是直角, 图 1-20 (甲) 是正方形 $ABCD$, (乙) 是长方形 $ABCD$. 要度量正方形和长