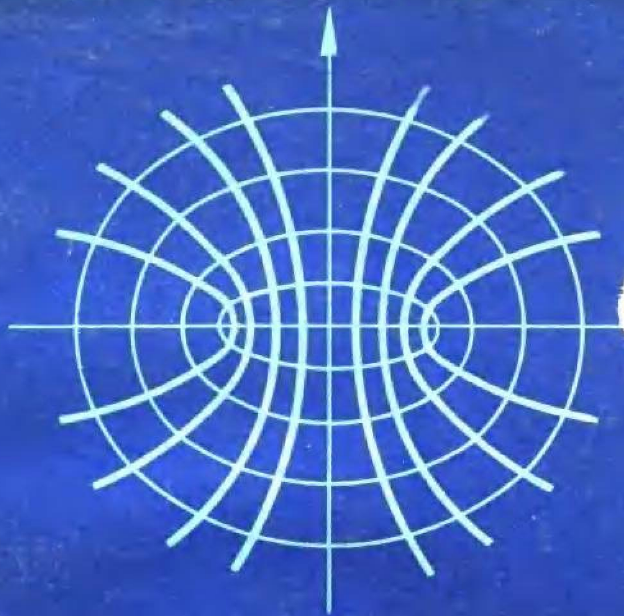

中学数学习题选解

中学数学习题选解

严以诚　张国珩　唐与询
傅佑珊　张国栋　陈家骏　编

人民教育出版社

1980·北京

中学数学习题选解

严以诚 张国珩 唐与询
傅佑珊 张国栋 陈家骏 编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 11.25 字数253,000
1980 年 1 月第 1 版 1980年 5 月第 1 次印刷
印数 0001—1,300,000
书号 7012·083 定价 0.76 元

前　言

为了帮助广大中学生和青少年学习初等数学，深入理解数学基础知识，掌握基本技能，我们编写了这本《中学数学习题选解》．编写中注意了选择数学各部分知识之间的相互联系和综合运用的题目．这本书也可供中学数学教师教学参考．

本书编排的顺序是：代数、几何（平面几何、立体几何）、三角和解析几何四部分．为了读者阅读方便，题解就附在题后；建议读者阅读时先独立解题．如果对题目中所涉及的知识不够熟悉，应先复习有关的知识，然后再动手解题．本书的题解仅供读者参考，希望利用它去探讨解题的分析方法，思考途径，并注意总结解题中规律性的东西和注意事项．以期能举一反三，灵活运用，加深对数学基础知识的理解．不经认真思考，直接阅读题解是不利于提高解题能力的．

一个数学题的解法往往不止一种，本书一般只列出一种解法，有些题目也列了几种解法．

本书由北京市西城区教师进修学校严以诚、张国珩、唐与询、傅佑珊、张国栋和北京三中陈家骏共同编写．限于编者水平，难免有繁琐纰漏，甚至错误之处，热诚欢迎读者批评指正．

编　者

1979.12

目　录

第一章　代数 ……1

第一节　数、代数式的恒等变换……1

第二节　方程、方程组……27

第三节　不等式……50

第四节　函数、极值……66

第五节　指数、对数……78

第六节　数列、极限……88

第七节　排列、组合、二项式定理、数学归纳法……106

第二章　几何 ……122

第一节　平面几何……122

第二节　立体几何……157

第三章　三角 ……197

第一节　任意角的三角函数……197

第二节　两角和、两角差、倍角、半角的三角函数……206

第三节　反三角函数和三角方程……233

第四节　解三角形……245

第四章　解析几何 ……260

第一节　直角坐标系、直线……260

第二节　曲线与方程……278

第三节　圆……287

第四节　椭圆、双曲线、抛物线……301

第五节　参数方程……327

第六节　极坐标……346

第一章　代　数

第一节　数、代数式的恒等变换

1. 证明四个连续的整数的积加上 1，是一个奇数的平方。

证　设四个连续的整数是 $n, n+1, n+2, n+3$.

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\=&(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\=&(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\=&(n^2+3n+1)^2.\end{aligned}$$

因　$n^2+3n+1=n(n+1)+(2n+1)$，而　$n(n+1)$是连续二整数的积，故必为偶数。

又　$2n+1$ 是奇数，所以 n^2+3n+1 是奇数。

所以，连续的四个整数的积加上 1，是一个奇数的平方。

2. 把二连续整数代入 x^5-x+1 中，其差必是 10 的倍数，试证明之。

证　设二连续整数是：$n, n+1$.

$$\begin{aligned}&[(n+1)^5-(n+1)+1]-(n^5-n+1)\\=&(n+1)^5-n^5-1\\=&5n^4+10n^3+10n^2+5n\\=&5n(n^3+1)+10n^2(n+1)\\=&5n(n+1)(n^2-n+1)+10n^2(n+1).\end{aligned}$$

$\because$　$n(n+1)$为连续二整数的积，故是 2 的倍数，

$\therefore$　$5n(n+1)(n^2-n+1)$是 10 的倍数。

又　$10n^2(n+1)$是10的倍数. 所以

$$5n(n+1)(n^2-n+1)+10n^2(n+1)$$

是10的倍数.

注　解这一类问题多是利用整数的性质，如本题中用到的两个连续整数的积，必是2的倍数，又如连续三个整数的积必是2, 3, 6的倍数等.

3. 化简:

(1) $\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}+|x-3|-|x+5|$,

其中$1<x<2$;

(2) $\sqrt{a^2+8a+16}-|2a+1|+|4-a|$, 其中 $a<-4$.

解　(1) 原式$=x-1-2+x+3-x-x-5$

$=-5.$

(2) 原式$=-(a+4)+2a+1+4-a=1.$

4. 已知方程 $4x^2-2ax+2a-3=0$ 没有实数根, 化简

$$\sqrt{4a^2-12a+9}+|a-6|.$$

解　$\because$　根的判别式 $\Delta=(-2a)^2-4\times4(2a-3)<0$,

$a^2-8a+12<0$,

$2<a<6$.

$\therefore$　$\sqrt{4a^2-12a+9}+|a-6|$

$=\sqrt{(2a-3)^2}+|a-6|$

$=2a-3+[-(a-6)]$

$=a+3.$

注　当m没有规定取值范围时, 算术平方根$\sqrt{m^2}$及绝对值$|m|$都是非负数, 所以要讨论 $m\geqslant0$ 及 $m<0$ 的不同情况:

$$\sqrt{m^2}=\begin{cases}m & 当m\geqslant0时,\\ -m & 当m<0时;\end{cases}$$

$$|m|=\begin{cases}m & \text{当 } m\geqslant 0 \text{ 时，}\\ -m & \text{当 } m<0 \text{ 时。}\end{cases}$$

5. 当 $A=\dfrac{[|a+1|+|b-1|]^2-(a+b)^2}{(a+1)(b-1)}$ 时，求 $A(A+4)$ 的值.

解

$$A=\frac{(a+1)^2+2|a+1||b-1|+(b-1)^2-a^2-2ab-b^2}{(a+1)(b-1)}$$

$$=\frac{2|a+1||b-1|+2(a+1)(1-b)}{(a+1)(b-1)}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{当}(a+1),\ (b-1)\text{同号；}\\ -4 & \text{当}(a+1),\ (b-1)\text{异号.}\end{cases}$$

$\therefore\quad A(A+4)=0.$

6. 比较下列两个数的大小：

$(\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}$ 和 $(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}$.

解 $\because\quad (\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=5+6+2\sqrt{30},$

$(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2=3+8+2\sqrt{24},$

$\therefore\quad (\sqrt{5}+\sqrt{6})^2>(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2>0.$

$\therefore\quad [(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2]^{66}>[(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2]^{66}.$

即 $\quad (\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}>(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}.$

7. 在实数集合里，求证：

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

证 设 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$，两边立方后整理，得

$$x^3-6x-40=0,$$

$$(x-4)(x^2+4x+10)=0,$$

$$x=4.$$

而方程 $x^2+4x+10=0$，根的判别式 $\Delta=4^2-4\times 10<0$.

$\therefore$ 没有实数根.

故 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$

8. 在复数范围内, 求三次方程 $x^3=1$ 的根. 并验证这个方程的两个虚根 w_1, w_2 有以下特性:

$w_1+w_2=-1;\qquad w_1w_2=1;$

$w_1^2=w_2;\qquad w_2^2=w_1.$

解 $x^3-1=0,$

$(x-1)(x^2+x+1)=0,$

由 $x-1=0$, 得 $x=1.$

由 $x^2+x+1=0$ 解出另两个根, 得

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

是虚根. 用 w_1, w_2 表示, 即

$$w_1=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},$$

$$w_2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$

$\therefore\quad w_1+w_2=-1,\ w_1w_2=1.$

又因为 $w_1w_2=1=w_1^3$, 所以 $w_2=w_1^2.$

同理可得 $w_1=w_2^2.$

9. 解方程, 求 θ 的一切解:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos2\theta+i\sin2\theta)\cdots(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1$$

(n 为自然数).

解 根据棣美弗公式, 可变形为

$$\cos(\theta+2\theta+\cdots+n\theta)+i\sin(\theta+2\theta+\cdots+n\theta)=1,$$

$$\cos\frac{n(n+1)}{2}\theta+i\sin\frac{n(n+1)}{2}\theta=1,$$

$$\sin\frac{n(n+1)}{2}\theta=0,\quad \theta=\frac{2k\pi}{n(n+1)}\qquad (k为整数).$$

$$\cos\frac{n(n+1)}{2}\theta=1,\quad \theta=\frac{2k\pi}{n(n+1)}\qquad (k为整数).$$

所以 $\theta=\dfrac{2k\pi}{n(n+1)}$ （k为整数）.

10. 把复数 $1+\cos\theta+i\sin\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$化为三角函数式.

解法一 设 $z=a+bi=(1+\cos\theta)+i\sin\theta$,

$\because$ $a=1+\cos\theta$,

$b=\sin\theta$,

$\because$ $r^2=a^2+b^2=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta=\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2$,

$\therefore$ $r=2\cos\dfrac{\theta}{2}\qquad\left(0\leqslant\dfrac{\theta}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$.

设 φ为幅角,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{b}{a}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

$\therefore$ $\varphi=\dfrac{\theta}{2}\quad(\sin\varphi\geqslant0,\ \cos\varphi\geqslant0)$.

故 $z=2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$.

解法二 $1+\cos\theta+i\sin\theta$

$$=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

11. 已知: $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$.

求证：$x^m+\dfrac{1}{x^m}=2\cos m\theta$.

证 由已知，得

$$x^2-2\cos\theta\cdot x+1=0.$$

解得

$$x=\cos\theta+i\sin\theta \text{ 或 } x=\cos\theta-i\sin\theta.$$

$\therefore\quad x^m=(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta,$

$$\frac{1}{x^m}=\left(\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^m$$

$$=\left[\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}\right]^m$$

$$=\cos m\theta-i\sin m\theta.$$

$\therefore\quad x^m+\dfrac{1}{x^m}=2\cos m\theta.$

同理，由 $x=\cos\theta-i\sin\theta$ 也能得到所证结论.

12. 解方程

(1) $2x+|x|=2+6i$;

(2) $x^2-(3-2i)x+5=5i$.

解 (1) **分析** x不可能是实数，因为如果 x 是实数，而$|x|$又是实数则 $2x+|x|=$实数$\neq 2+6i$，所以 x 是复数.

设 $x=a+bi$，则$|x|=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\therefore\quad 2(a+bi)+\sqrt{a^2+b^2}=2+6i,$

$2a+\sqrt{a^2+b^2}+2bi=2+6i,$

即 $\begin{cases}2a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\\ 2b=6.\end{cases}$

解方程组，得

$$\begin{cases} a=\dfrac{4-\sqrt{31}}{3}, \\ b=3, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=\dfrac{4+\sqrt{31}}{3}, \\ b=3. \end{cases}$$

$\therefore \quad x_1=\dfrac{4-\sqrt{31}}{3}+3i,$

$x_2=\dfrac{4+\sqrt{31}}{3}+3i$ （增根）.

注 本题“$|\ |$”符号表示复数的模.

(2) $x^2-(3-2i)x+5(1-i)=0$,

$$x=\frac{3-2i\pm\sqrt{-15+8i}}{2}$$

$$=\frac{3-2i\pm\sqrt{(1+4i)^2}}{2}$$

$$=\frac{3-2i\pm(1+4i)}{2}.$$

$\therefore \quad x_1=2+i,\ x_2=1-3i.$

13. α, β 为任意二复数时，证明下面的等式成立.

$$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2).$$

证 设 $\alpha=a+bi, \beta=c+di$ （a、b、c、d 均为实数）.

$\therefore \quad |\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2$

$=|a+bi+c+di|^2+|a+bi-c-di|^2$

$=|(a+c)+(b+d)i|^2+|(a-c)+(b-d)i|^2$

$=(a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2$

$=2[(a^2+b^2)+(c^2+d^2)]$

$=2(|\alpha|^2+|\beta|^2).$

14. 正三角形 ABC 的三个顶点，在复数平面内分别对应着三个复数，其中两个顶点分别为：$A(1), B(2+i)$，求第三个顶点

C 的实部和虚部.

解 设 $C(x+yi)$

$\therefore$ $|CA|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$,

$|CB|=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$,

$|AB|=\sqrt{2}$.

由 $\triangle ABC$ 是正三角形, 得

$$|CA|=|CB|=|AB|,$$

$$\therefore \begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} & (1)\\ \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2} & (2)\end{cases}$$

由(1)得 $(x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2$,

$$y=2-x \qquad (3)$$

代入(2)得 $(x-1)^2+(2-x)^2=2$,

$\therefore$ $2x^2-6x+3=0$,

$$x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

代入(3)得

$$y_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ y_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

所以 C 点的实部、虚部分别为:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\\ y_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\\ y_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

15. 证明 1 的立方根中, 一虚根的平方等于另一虚根, 且

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n=-1,$$

式中 n 可为任何整数, 但不为 3 的倍数.

解 设α、β分别为1的两个立方虚根，则$x^2+x+1=0$的两个根为α, β. 根据根与系数的关系，得

$$\alpha\beta=1,$$

两边同乘以α^2，得

$$\alpha^3\beta=\alpha^2.$$

$\because\ \alpha^3=1, \quad \therefore\ \beta=\alpha^2.$

同样，$\alpha=\beta^2$.

因n不为3的倍数，可设$n=3m+1$，或$n=3m+2$(m是整数).

i) 设$n=3m+1$，

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n$$

$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3m+1}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3m+1}$$

$$=\left[\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3\right]^m\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

$$+\left[\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3\right]^m\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=-1.$$

ii) 设$n=3m+2$，

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3m+2}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3m+2}$$

$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$$

$$=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$=-1.$$

16. 若 a、b、c 为不等于 0 的实数，当 a、b、c 满足什么关系时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有虚数根，且其立方为实数。

解 根据一元二次方程求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$\because$ 原方程有虚数根，$\therefore$ $b^2-4ac<0$，即 $4ac-b^2>0$。 十四

令 $-\dfrac{b}{2a}=\alpha$，$\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\beta$ （α，β 为实数）。

则原方程二根为：$\alpha+\beta i$，$\alpha-\beta i$。

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta i)^3&=\alpha^3+3\alpha^2\beta i+3\alpha\beta^2 i^2+\beta^3 i^3\\&=(\alpha^3-3\alpha\beta^2)+(3\alpha^2\beta-\beta^3)i,\\(\alpha-\beta i)^3&=\alpha^3-3\alpha^2\beta i+3\alpha\beta^2 i^2-\beta^3 i^3\\&=(\alpha^3-3\alpha\beta^2)-(3\alpha^2\beta-\beta^3)i.\end{aligned}$$

要使虚根的立方为实数，则需

$$3\alpha^2\beta-\beta^3=0，即\ \beta(3\alpha^2-\beta^2)=0.$$

$$从而\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\left[3\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]=0.$$

整理，得

$$\frac{\sqrt{4ac-b^2}\times(b^2-ac)}{2a^3}=0. \qquad (1)$$

$\because$ $4ac-b^2>0$，

$\therefore$ (1)成立的条件为 $b^2-ac=0$，即 $b^2=ac$。

故 a，b，c 间应满足 $b^2=ac$。

17. 在实数集合内分解因式：$x^4-2x^3+x^2-16$。

解 原式 $=(x^2-x)^2-4^2$

$$=(x^2-x+4)(x^2-x-4)$$

$$=(x^2-x+4)\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right).$$

注 多项式的因式分解,若无特别声明,一般是指在有理数集合内进行.

18. 分解因式: x^6-64y^6.

解法一 原式$=(x^3)^2-(8y^3)^2$

$$=(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$$

$$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2).$$

解法二

原式$=(x^2)^3-(4y^2)^3$

$$=(x^2-4y^2)(x^4+4x^2y^2+16y^4)$$

$$=(x+2y)(x-2y)(x^4+8x^2y^2+16y^2-4x^2y^2)$$

$$=(x+2y)(x-2y)[(x^2+4y^2)^2-(2xy)^2]$$

$$=(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2).$$

注 在分解一个多项式时,若既能用平方差公式,又能用立方差公式时,一般先用平方差公式,否则虽然也可分解,但方法较繁.

19. 将下列各式分解因式:

(1) $4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$;

(2) $x^4+y^4-2(x^2+y^2)-2x^2y^2+1$;

(3) $x^3+3px^2+(3p^2-q^2)x+p(p^2-q^2)$.

解 (1) 原式$=(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)$

$$=[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]$$

$$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d).$$

(2) 原式$=x^4+2x^2y^2+y^4-2(x^2+y^2)+1-4x^2y^2$

$$=(x^2+y^2-1)^2-(2xy)^2$$

$$=[(x+y)^2-1][(x-y)^2-1]$$

$$=(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1).$$

注 本题也可化为$(x^2-y^2-1)^2-(2y)^2$再进行分解.

(3) 原式$=x^3+3px^2+3p^2x+p^3-q^2x-pq^2$

$$=(x+p)^3-q^2(x+p)$$

$$=(x+p)[(x+p)^2-q^2]$$

$$=(x+p)(x+p+q)(x+p-q).$$

20. 如果$x^2-y^2+mx+5y-6$能分解成两个一次因式的乘积，试求m的值.

分析 $ax^2+bx+c(a\neq0)$叫做x的二次三项式，能使二次三项式的值为零的x值，叫做二次三项式的根.设这二次三项式的两个根是α,β，那么，二次三项式可分解为以下形式

$$ax^2+bx+c$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

解法一 原式$=x^2+mx-(y^2-5y+6)$.

令 $x^2+mx-(y^2-5y+6)=0$，求α,β.

$$\alpha,\beta=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+4(y^2-5y+6)}}{2}.$$

要使$x-\alpha$，$x-\beta$是一次式，应使$m^2+4(y^2-5y+6)$是一个完全平方. 所以要求方程

$$4y^2-20y+24+m^2=0$$

的根的判别式 $400-4\times4(24+m^2)=0$.

即 $m^2=1$,

$\therefore$ $m=\pm1$.