积分方程论及其应用

陈传璋 侯宗义 李明忠 著

上海科学技术出版社

积分方程论及其应用

陈传璋　侯宗义　李明忠　著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书讲述积分方程的基本理论及某些应用，如Fredholm理论，Volterra积分方程，对称核方程的重要结果，第一种积分方程的求解，非线性积分方程的讨论以及在若干数学物理问题和力学问题中的应用，并适当地论述了近代的一些研究成果。书末附有相当数量的习题供练习之用。

本书适合于综合大学的数学、力学、计算数学、应用数学等专业；物理系以及师范工科院校有关专业的学生、研究生和教师以及自学者阅读，也可供科技工作者、工程技术人员参考。

积分方程论及其应用

陈传璋　侯宗仪　李明忠　著

责任编辑　赵序明

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本850×1156 1/32　印张9　字数238,000

1987年1月第1版　1987年1月第1次印刷

印数 1— 4,800

统一书号：13119·1394　　定价：2.00元

序

积分方程，通常是指不包括奇异积分方程的Fredholm型积分方程和Volterra型积分方程．在五十、六十年代，积分方程的部分内容是作为大学数学系专业基础课《数学物理方程》中的一章来讲述的，主要只讲述Fredholm几条基本定理．后来，积分方程成了一门选修课，讲述的内容当然有所增加．鉴于积分方程理论在大量的数学物理问题中有很多应用，不少实际问题中也提出了各种有关积分方程的新课题，积分方程理论也随之迅速发展．因此，从前几年起，我们再度为高年级学生和研究生开设了这门选修课．这本专门著作就是在多次教学实践的基础上反复修改、增删而成的．既叙述了积分方程的基本理论和若干应用，也适当论述了近代的一些成果，其中包括著者的部分研究成果．

这本专门著作，当然不可能包括积分方程的全部重要内容，特别是近代的大量研究成果和广泛的实际应用，我们只能列出若干有关的参考文献提供给感兴趣的读者参考．但是，在阅读了这本著作以后，可使读者对积分方程的概况和发展能有较为深入的了解．

为便于读者在阅读本书后能得到适当的解题训练，我们收集了相当数量的习题附在本书正文后面，供读者练习之用．在这些习题中，一部分是理论性的，大部分是计算题．

关于积分方程的数值解法，虽然也是很有意义的重要课题，但是由于这方面的研究发展较快，且涉及到其他一些知识，我们不可能在书中反映这方面的详细内容，只选择了部分最新结果写成附录A放在书的后面供读者查阅参考．第一种Fredholm积分方程是一个典型的不适定问题，在实际课题中占有重要的地位，我们除

在正文中论述这类积分方程的若干理论和求解方法以外，又写了附录B，讨论了它的解的稳定性问题，列于书的后面以备查阅. 这两个附录里也列进了有关的参考文献.

本书适宜于综合大学的数学、力学、计算数学、应用数学等各专业；物理系以及工科、师范院校有关专业的学生、研究生和教师以及自学者阅读，也可供科技工作者、工程技术人员参考. 读者只要具备《高等数学》、《数学物理方程》等课程的知识，阅读这本著作就不会有实质性的困难. 本书中个别章节曾用到了一些泛函分析的基本知识，对此感到生疏的读者，只要在阅读时查阅一般的泛函分析教科书就可明白的.

限于著者的学识水平，本书难免有错误和不妥之处，我们诚恳地期待着读者的批评和建议.

著　者

1985年11月于复旦大学

目　录

第一章 绪 论

积分方程是指在积分号下出现未知函数的方程. 未知函数以线性(一次)形式出现的称为线性积分方程,否则,就称为非线性积分方程.

§1 发展历史概述

微分方程是从 I. Newton 第二运动定律开始而得到迅速发展的, 与此相比, 积分方程作为数学学科的一个分支, 发展稍迟些, 在十九世纪三十、四十年代, 才零星地露面, 有时只是作为微分方程问题的另一种阐述方式. 直到十九世纪最后几年, 才由瑞典数学家 I. Fredholm 和意大利数学家 V. Volterra 成功地开创了两种类型线性积分方程理论的先河. 从此以后, 这两类积分方程就以他们的名字命名, 积分方程也就成为数学分析方面的一个重要方向, 不少数学家致力于这个方向的研究, 作出了各种创造性的推广. 应用也随之大量涌现.

积分方程如同微分方程一样, 起源于物理问题. 积分方程的初次出现, 是在 1823 年, N. H. Abel 提出了在地球引力场中一个质点的下落问题: 在一个垂直平面内, 求一个质点在垂直等加速条件下下落所经的路径, 使其下落的时间总是等于下落距离 h 的已知函数 $T(h)$. Abel 从下落质点的动能和位能之间的关系着手研究这一问题. 如果质点在没有摩擦的情况下, 从高度 h 下落到 $y<h$, 则有

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=mg(h-y),$$

其中 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 是在时刻 t 的切线速度，g 是重力加速度，m 是质点的质量．解出 $\mathrm{d}t$，并且求积，就得到

$$\int_{y=h}^{y=0}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(h-y)}}=T(h).$$

若用 $\mathrm{d}s=-u(y)\,\mathrm{d}y$ 引入一个新的函数 $u(y)$，就得到所谓的 Abel 积分方程

$$\int_{0}^{h}\frac{u(y)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2g(h-y)}}=T(h).$$

这是关于未知函数 $u(y)$ 的积分方程．其特点是：积分上限是可变的，在积分号外不出现未知函数 $u(y)$，而且被积函数中 $\frac{1}{\sqrt{2g(h-y)}}$ 在积分上限 $y=h$ 处是奇异的．

这种 Abel 型积分方程，虽然 Abel 本人找到了两种解法，但由于他的方法较为特别，因而在一段时期内不为人们所注意．

1828 年，G. Green 在研究位势理论时得到了现在我们所称的**第一种积分方程**．J. Liouville 独立于 Abel，在 1832 年解决了一些特殊形式的积分方程，他的最有意义的工作是：表现了某些微分方程的解可以通过解相应的积分方程而得到．

十九世纪中叶，积分方程的主要兴趣是围绕着解位势方程

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

有关的边值问题而展开的，通过位势把边值问题化为积分方程．这些积分方程对于凸区域的情形，由 C. G. Neumann 在 1877 年及以后年间发展的论文中解出来了．后来，H. Poincaré 基于他本人对偏微分方程

$$\Delta u+\lambda u=f(x,\ y)$$

的解的研究，在 1896 年研究了由上列偏微分方程导出的下列形式的积分方程

$$\tilde{u}(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,\ y)\tilde{u}(y)\mathrm{d}y=\psi(x),$$

并且断言，其解是 λ 的亚纯函数.

这里应指出，“积分方程”这个名称是在1888年由 P. du B Reymond 第一个提出来的.

I. Fredholm 吸收了这一时期关于积分方程的各种论述与研究思想，系统地研究了积分方程理论. 1899年，他在给他老师 Mittag-Leffler 的一封信中，提出了如下形式的积分方程：

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 F(x,\ y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\xi(x), \tag{1.1}$$

其中 $F(x, y)$ 是定义在正方形 $0\leqslant x,\ y\leqslant 1$ 上的已知连续函数，$\xi(x)$ 是给定在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续函数，而 $\varphi(x)$ 是未知函数. 在这封信中，Fredholm 认为，积分方程 (1.1) 的解可以表示为两个 λ 的整函数的商. 次年，即在1900年，Fredholm 发表了一篇论文[1]，初次建立了与函数 $F(x, y)$ 有关的行列式 $D(\lambda)$ 和 $D(x, y; \lambda)$，证明了它们都是 λ 的整函数. 在这篇论文中，Fredholm 巧妙地证明了：如果 λ 是函数 $D(\lambda)$ 的一个零点，那么，积分方程 (1.1) 的齐次方程

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 F(x,\ y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y=0$$

有不恒等于零的解. 这个结果就是现在一般的积分方程书籍中所说的 Fredholm 第二定理. 1903年，Fredholm 又发表了一篇论文[2]，对积分方程 (1.1) 作了进一步的阐述，他取 $\lambda=1$，证明了如下结果：如果 $D(1)\neq 0$，则有一个且只有一个函数 $\varphi(x)$ 满足积分方程 (1.1)，这个函数就是积分方程的解，它可表为

$$\varphi(x)=\xi(x)-\int_0^1\frac{D(x,\ y;\ 1)}{D(1)}\,\xi(y)\,\mathrm{d}y.$$

这就是现在一般的积分方程书籍中所说的 Fredholm 第一定理. 比 I. Fredholm 稍早些，V. Volterra 在研究某个生态平衡问题时提出并讨论了积分上限为可变的积分方程. 从此以后，积分方程吸引着许多数学家的注意，其中包括著名数学家 D. Hilbert, E. Schmidt 等人，都致力于这个学科分支的研究，由此，积分方程的理论得到了迅速的发展.

差不多紧接着 Fredholm 积分方程的理论的出现，与它本质上完全不同的奇异积分方程理论也随之而产生了．这类积分方程是人们从不同角度研究不同问题而提出来的．D. Hilbert 在研究解析函数的某些边值问题时发现了它们[3]，几乎同时，H. Poincaré 在研究潮汐现象时也发现了它们[4]．这类有代表性的奇异积分方程是下列形式的积分方程：

$$A(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=\eta(t),\ t\in L, \tag{1.2}$$

其中 L 是平面上的光滑曲线，系数 $A(t)$，自由项 $\eta(t)$ 和 $K(t,\tau)$ 都是曲线弧 L 上按 Hölder 意义连续的已知函数，$\varphi(t)$ 是未知函数．需要注意的是：积分方程 (1.2) 中的积分在一定条件下是按 Cauchy 主值的意义存在．对这类奇异积分方程，苏联学者研究得较为系统、深入，在平面弹性理论中有着广泛的实际应用，专著[5]总结了对这类奇异积分方程的研究成果．本世纪二十年代初，由于研究大气辐射传输问题，又提出了另一类积分区域是无穷的奇异积分方程，其重要例子是下面所列的 Wiener-Hopf 方程：

$$\varphi(x)-\int_0^\infty K(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\psi(x)\quad(0\leqslant x<\infty),$$

其中 $K(x)$ 与 $\psi(x)$ 是已知函数．六十多年来，这种奇异积分方程的理论也有很大的发展，并在许多实际问题中有着重要的应用．相应于 Fredholm 定理，对上述两类奇异积分方程有 F. Noether 定理．

§2 主要内容介绍

我们称以下形式的积分方程

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\xi(x); \tag{1.3}$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x); \tag{1.4}$$

$$A(x)\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x) \tag{1.5}$$

分别为 Fredholm 型第一种、第二种、第三种积分方程，其中 $K(x, y)$ 是定义在矩形区域 $a\leqslant \begin{matrix}x\\y\end{matrix} \leqslant b$ 上的已知连续函数，称为积分方程的核，λ 是参数，系数 $A(x)$ 和自由项 $\xi(x)$ 都是确定在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的已知连续函数，$\varphi(x)$ 是未知函数．显然，第一种方程和第二种方程是第三种积分方程 (1.5) 当 $A(x)$ 分别为 0 和 1 时的特殊情形，所以上述三种积分方程本质上有区别的只是第一种积分方程 (1.3) 和第二种积分方程 (1.4)．

Fredholm 型第二种积分方程 (1.4) 具有下述特性：我们从这种积分方程的结构形式可看到，未知函数 $\varphi(x)$ 在积分号外以相加的形式出现，因之，对它可用迭代法求解．但是当这种积分方程有特征值问题，即相应的齐次积分方程对某些参数 λ 值有非零解时，这时迭代法就没有意义了．对于这种积分方程，Fredholm 建立了系统的理论，就是我们所说的 Fredholm 理论．

当积分方程 (1.4) 的核 $K(x, y)$ 不连续时，例如设 $K(x, y)$ 为绝对平方可积，则 Fredholm 的所有结果都可推广，只是证明稍繁复些．这里，我们特别应指出：如果积分方程 (1.4) 的核 $K(x, y)$ 具有形式

$$K(x, y)=\frac{H(x, y)}{|x-y|^{\alpha}} \quad (0<\alpha<1),$$

其中 $H(x, y)$ 是有界函数，这样的 $K(x, y)$ 称为弱奇性核，对它施行积分运算，并记

$$K^{(p+q)}(x, y)=\int_a^b K^{(p)}(x, t)K^{(q)}(t, s)\mathrm{d}t,$$

$$K^{(1)}(x, y)=K(x, y),$$

那么，只要 $p+q>\dfrac{1}{1-\alpha}$，就得到一个有界核 $K^{(p+q)}(x, y)$，弱奇性消失了．因之，具有弱奇性核的积分方程具备有 Fredholm 型积分方程的一切特性和结论．

如果积分方程 (1.3) 和 (1.4) 的核 $K(x, y)$ 具有性质

$$K(x, y)=0, \quad x<y,$$

则它们分别取如下形式:

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x), \tag{1.6}$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\xi(x), \tag{1.7}$$

分别称为 Volterra 型第一种、第二种积分方程，其特点是积分上限是变量. Volterra 型第二种积分方程 (1.7) 和 Fredholm 型第二种积分方程 (1.4) 的本质差别是：前者对于一切 λ 值，总是可用逐次迭代法求解，而后者，已如上述，会出现特征值问题.

所有这些，我们将在第二章里叙述.

Fredholm 型第二种积分方程和 Volterra 型第二种积分方程的理论，可推广到多个未知函数的积分方程组的情形，这时，未知的 $\varphi(x)$ 和已知的 $\xi(x)$ 分别视为是未知函数向量 $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$ 和已知函数向量 $\xi(x)=(\xi_1(x), \cdots, \xi_n(x))$，而核 $K(x, y)$ 是 $n\times n$ 阶方阵 $(K_{lj}(x, y))_{l, j=1, \cdots, n}$. 于是，我们得到关于 n 个未知函数 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 的 Fredholm 型积分方程组

$$\varphi_l(x)+\lambda\int_a^b \sum_{j=1}^n K_{lj}(x, y)\varphi_j(y)\mathrm{d}y=\xi_l(x) \quad (l=1, \cdots, n)$$

和 Volterra 型积分方程组

$$\varphi_l(x)+\lambda\int_a^x \sum_{j=1}^n K_{lj}(x, y)\varphi_j(y)\mathrm{d}y=\xi_l(x) \quad (l=1, \cdots, n).$$

也可将它们写成一个向量方程的形式. 在一些假设下，关于一个方程的 Fredholm 诸定理对积分方程组也成立. 此外，在实际应用中还会遇到在积分号下出现共轭未知函数的积分方程，可以将它化为积分方程组的情形来考虑. 从而，Fredholm 理论对这类方程也成立. 这些，将在第三章里论述.

D. Hilbert 和 E. Schmidt 对 Fredholm 型第二种积分方程的理论作了许多深刻而且影响甚大的研究工作，特别是关于对称核积分方程的研究结果在数学物理的大量问题中有着广泛的应

用．对称核积分方程有着更深一些的性质，诸如，对称核积分方程的特征值存在定理、特征函数系的性质以及 Hilbert-Schmidt 展开定理等等．由于对称核积分方程的按绝对值意义最小的特征值有着重要的力学、物理意义，因之，近似求最小特征值的问题也自然引起人们的兴趣．这些结果，将在第四章里论述．

至于 Fredholm 型第一种积分方程 (1.3)，直到现在还未建立起系统的理论．正如从积分方程 (1.3) 本身的构造可看到的，即使积分方程 (1.3) 的核 $K(x, y)$ 是退化核这种最简单的情形，这个积分方程也并不总是有解的．二十世纪初，E. Schmidt 曾致力于这方面的研究，得到了由积分方程 (1.3) 的核产生的函数关于特征函数系的展开定理．在核 $K(x, y)$ 的特征函数系是完备的假设下，E. Picard 建立了积分方程 (1.3) 有解的一个充分和必要条件．在积分方程 (1.3) 有解的前提下，还可给出其近似解的一种构造方法．对于 Volterra 型第一种积分方程 (1.6)，在一般情况下，可以通过求微商的方法把它化为与其等价的 Volterra 型第二种积分方程．

前面提到的 Abel 方程是 Volterra 型第一种积分方程，但由于其核在积分上限有奇性，所以对它的求解问题要另外进行讨论．

我们将在第五章里论述有关第一种积分方程的若干结果．

由于实际发展的需要，非线性积分方程的研究也出现了不少结果，然而，对一般的非线性积分方程还缺乏系统的理论，即使是可解性的讨论也较困难．研究得较多的是以下形式的所谓 Hammerstein 型非线性积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, y)F(y, \varphi(y))\mathrm{d}y,$$

其中 $K(x, y)$，$F(y, u)$ 都是其变元的已知函数．从 A. Hammerstein 在 1930 年提出这种类型的积分方程以来，研究者不乏其人．近年来，又出现了化非线性 Fredholm 型积分方程和 Volterra 型积分方程为等价的非线性微分积分方程组的初值问题的研究，对后者便于用数值方法求解．关于这些内容，我们将在第六章中

陈述.

至于奇异积分方程，由于它同 Fredholm 型积分方程有着本质的差别，而且研究方法也迥然不同，不列入本书的范围. 我们将另外编写专门著作论述前面提到过的两类常见的奇异积分方程的基本理论、重要应用和有关的近代研究成果.

§3 应用举例

在第1节里所引述的 Abel 方程是 Volterra 型第一种积分方程，在研究一个球状地形里地震震动的传播路线问题中，也出现了这种类型的积分方程. 这首先由 G. Herglotz 在 1907 年提出过，后来又由 H. Bateman 在 1910 年独立地提到过. 这个问题的解法是把震动的传播速度表示为深度的函数，同时相应地提供关于球状体内层构成情况的信息，分析来自地球表面和地球内部断裂的可能的反射，利用观测数据，就能求出数值解. 因此，积分方程对地球物理分析的地震法来说是基本的. 地震法已经小规模地用于勘探地壳中的石油层、含盐的岩穹等，它是一种规模较小但经济上颇为重要的方法.

地质学中的一个突出问题是制作地球体内部的精细三维图，这种图在勘探矿藏、预报地震、研究地球的历史演变过程和将来的变化趋势等方面都是有用的. 这个问题，当然无法用实验的方法来解决，而只能依靠间接的方法来探讨与研究，除上述地震法以外，还有引力势方法等. 所谓引力势方法，是把地球 (E) 视为一个固体，它的质量密度函数 $\rho(x, y, z)$ 可设为有界的和分块连续的，于是这个固体 (E) 在点 $P(x, y, z)$ 的引力势是

$$V_E(P)=\iiint\limits_E \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}}\, d_3\Omega_Q,$$

其中 $d_3\Omega_Q$ 表示三维空间的体积元素，r_{PQ} 是点 P 与 Q 间的距离. 若能知道地球的每个内点处的 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V_E(P)$,

则就立即给出我们所要找的密度函数

$$\rho(P)=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_E(P).$$

但是，在整个地球体 (E) 的内部，我们当然无法测出量

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_E(P),$$

然而，运用现代尖端仪器和人造卫星，我们可以精确地得到地球外部点 $P'(x', y', z')$ 处的 $V_E(P')$，这样，我们就得到一个形如

$$V_E(P')=\iiint\limits_{E}\frac{\rho(Q)}{r_{P'Q}}d_3\Omega_Q$$

的积分方程，它以地球体内部的密度 $\rho(Q)$ 为未知函数，所以这是 Fredholm 型第一种积分方程.

积分方程之所以能发展成为分析学的一个重要分支，没有哪一个研究领域比位势理论对它的贡献更大. 上述的引力势方法就是一例. L. Euler 与 J. L. Lagrange 和其后的 P. S. Laplace 以及 S. D. Poisson 在力学问题中使用了位势函数，Poisson 用它们解决了电磁学中的一些特殊问题，G. Green 作了推广. Green 是最先对 Laplace 方程提出后来称之为“Dirichlet 问题”的人，他推导出了使他自己成名的积分公式，设想了“Green 函数”，并借助这种函数给出了数据给定在闭曲面上的内、外 Dirichlet 问题的解的积分表达式. 对于数学物理中不少重要问题所提出的关于 Laplace 方程的内、外 Dirichlet 问题和内、外 Neumann 问题，可以分别利用所谓双层位势和单层位势化为待定密度函数的 Fredholm 型第二种积分方程. Green 本人在 1828 年实际上已经对 Dirichlet 问题这样做了，但按他的方法所引出的是 Fredholm 型第一种积分方程. 正如我们指出过的，这种积分方程的理论在今天也是不能令人满意的，Green 当时也意识到了这一点. 正是由于这个原因，物理学家和数学家化了不少时间，才得到我们现在的论述方式，把问题化为 Fredholm 结果能适用的第二种积分方程.

在弹性薄膜振动(线性)模型和气体振荡(线性)模型等物理问

题中出现了波动方程

$$a^2\Delta u(P,\ t)=u_{tt}(P,\ t),\tag{1.8}$$

并伴有边界条件和初始条件的定解问题的求解,这里的

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

是 Laplace 算子. 约在十八世纪中叶, D. Bernoulli 利用形如 $u(x,\ t)=v(x)Q(t)$ 的"驻波"解的叠加解决了弦振动方程的混合问题,这就是通常所说的分离变量法. 对方程(1.8)也使用分离变量法, 就得出空间变量 P 的因子 $v(P)$ 必须满足如下的特征值问题: 求方程

$$\Delta v(P)=\lambda v(P)\tag{1.9}$$

在所考虑的区域 R 的边界 ∂R 上满足"齐次"边界条件的非零解 $v(P)$. 如果齐次边界条件是 $v(P)|_{\partial R}=0$, 则方程(1.9)可转换成积分方程

$$v(P)=-\lambda\iiint\limits_R G(P,\ Q)v(Q)d_3\Omega_Q,$$

其中 $G(P,\ Q)$ 就是前面提到的 Green 函数. 取遍所有特征值,得出 $v_\lambda(P)$ 和 $Q_\lambda(t)$, 以此形成

$$u(P,\ t)=\sum_{(\lambda)}v_\lambda(P)Q_\lambda(t),$$

然后决定每个 $Q(t)$ 中的系数,使初始条件得以满足. 这时, 人们就遇到了一系列的问题, 诸如: 特征值是否存在, 特征函数系 $\{v_\lambda(P)\}$ 具有哪些性质,一个任意函数表示为特征函数系 $\{v_\lambda(P)\}$ 的线性组合的可能性,这种线性组合可能是有限的,可能是可列无限的,也可能是积分形式,等等. 这些问题是分离变量法的基础. 利用积分方程理论,可以展开对上述诸问题的讨论. 这是 D. Hilbert 研究工作中最有价值的成就之一, 发表于 1904 年和 1905 年的论文中.

微分方程的初值问题, 众所周知, 可以化为与其等价的 Volterra 型第二种积分方程. 而微分方程的边值问题, 一般可以化为 Fredholm 型第二种积分方程来进行研究.