结构分析中的程序设计

刘永仁　编著

同济大学出版社

（沪）204 号

内 容 提 要

本书主要以有限元法程序设计为主，其中有平面问题、板壳杆混合结构和三维空间20节点等参数有限元程序。书中还介绍了一些作为程序设计工具的常用算法及其程序段，其中有各种线性方程组的求解方法；分块存贮和不限带宽的分块存贮求解方法；矛盾方程组的几种求解方法；特征方程的多种求解方法和动力响应的直接积分法；非线性方程组的求解方法等。

本书可作为高等院校的力学、土建、结构、水利、机械、岩土等专业的本科生和研究生的教材，也可供上述专业的工程技术人员参考。

责任编辑　解明芳
封面设计　邹越非

结构分析中的程序设计
刘永仁　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
常熟文化印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：12.5　字数：360千字
1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷
印数：1—3000　定价：4.15元
ISBN7-5608-1001-2/0.92

目　录

第一章　有限元法分析的基本概念

在电子计算机高速发展的年代里，计算机已在各个领域中有着广泛的应用，结构计算也同样如此。计算力学就是应用于结构计算中的一门学科。除有限元法是众所周知的结构计算有效方法外，还有边界单元法、半解析数值法、加权残值法等。这些方法的实现必须在电子计算机上才能完成。本书的任务是介绍计算力学的各种数值计算方法如何能在计算机上实现。但限于篇幅，书中着重介绍这些方法中最典型的有限单元法的实现及其各种程序设计技巧。至于其他方法，可以把有限元法的程序设计方法应用于计算力学的其他方法中。另外，还介绍了各种数值计算方法的程序段，这些方法都是有着广泛应用价值的，读者可以选择应用。为便于以后各章公式的推导和引用，在本章将简单介绍有限元方法的一般概念和基本公式。

§1-1　有限元分析的一般过程

有限元法是一种数值分析方法。由于实际工程结构无论是几何形状、荷载条件、边界条件、材料性质等都是很复杂的，无法求出其理论结果，所谓数值解就是求出它的近似结果。有限元法一般分以下几步求解：

1．建立计算模型

首先，将实际的连续体离散为由理想结点连接的理想化模型。当然，理想化的方法是各种各样的，这就产生各种的有限单元方法。常用的有杆件单元、三角形、四边形、六面体单元等。还有很多在单元中另外增加若干个结点，这就得看建立的位移模式而

定。

2. 选择位移模式

一般说来，在外荷载作用下，连续体上的未知函数如位移、应变等是很复杂的函数，它的精确解很难求得。由于将连续体已划分成为小的单元后，在每单元上，这些量的变化幅度相对说来比原来的小得多，所以，可以设想用一个比较简单的函数来近似描述。这一简单函数如果表示位移的近似函数，称它为位移模式。位移模式的选择是个复杂的问题，要根据问题的性质、单元形状、结点布置等情况而定。在选择位移函数时，还要考虑函数在单元内的连续性和在单元相邻边界上位移的协调性。总之，选择的位移函数应考虑其收敛准则。选择的位移函数应使它能用节点位移唯一地描述单元内的位移。

3. 确定单元性质矩阵

单元性质矩阵是指单元刚度矩阵或单元柔度矩阵。当确定了位移函数就可以由能量原理建立单元上力和位移间的平衡关系。即

$$[K]^e\{\delta\}^e=\{F\}^e \tag{1-1}$$

4. 建立结构平衡关系

单元平衡关系(1-1)中，由于 $\{F\}^e$ 有内力部分，所以仍无法解出 $\{\delta\}^e$。但可将每单元平衡关系组装成整体结构的平衡关系，即

$$[K]\{\delta\}=\{F\} \tag{1-2}$$

其中，$[K]$为整体结构刚度矩阵，也称总刚度矩阵，一般说来，$[K]$是对称正定矩阵，$\{\delta\}$、$\{F\}$ 分别为结构位移向量和外荷载向量。

5. 求解结构平衡方程组

对方程组(1-2)进行约束处理后，式(1-2)是非奇异方程组，可用一般线性方程组求解方法求得结点位移向量 $\{\delta\}$。但由于$[K]$是很大的矩阵，在处理存贮$[K]$时，有一定难度，所以有各种不同的求解方法。在以后几章中将介绍其存贮方法和相应的解法。

6. 反力和内力计算

求得结点位移后，可计算有约束点的反力和单元内力。

以上六步是针对强度计算而言，对其他问题如振动问题、稳定问题等都有类似的计算步骤。

对有限单元法本身而言，主要的任务是单元分析，也就是建立位移模式，推导单元平衡关系，得到单元刚度矩阵和单元荷载矩阵。对结构计算而言，要求整体分析，也就是上述六步的完整的计算，这就必须编成计算机程序。本课程主要解决如何编制整体结构分析的完整程序，在编制整个程序中，必须掌握很多复杂的程序技巧，这些可通过以后各章的典型程序逐步掌握。

§1-2　单元分析的一般方法

一、建立位移函数

在单元分析中，选择位移模式是关键问题。选择位移模式必须考虑多方面的因素，选择得好坏，不仅影响其计算精度，而且影响计算结果的正确与否、计算结果的稳定性和收敛性等问题。如果选择的位移模式的位移在相邻二单元边界上满足位移的连续条件，这种单元称为协调元，否则，称为非协调元。

选择位移模式通常有两种方法：广义坐标法和插值函数法。

1．广义坐标法

$$U(X)=\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n\cdot x^n \tag{1-3}$$

一般地，一个单元的自由度的多少决定 α_i 的多少。

用矩阵表示

$$U(X)=[\Phi]\{\alpha\}$$

其中，$[\Phi]=[1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n]$；　$\{\alpha\}=\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}^T$

对二维单元情况，可表示为：

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

其中，$\Phi_1=\{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\cdots,\ y^n\}^T$

用结点位移值代入，可把 $\{\alpha\}$，$\{\beta\}$ 表示为 x，y 的函数与结点位移向量之间的关系，从而单元位移可以表示为结点位移和坐标的函

数。如果能求出结点位移，单元上任一点的位移可由它的坐标来确定。

2．插值函数法

插值函数法是将单元位移直接表示为以结点坐标和结点位移为参数的函数关系。即

$$\{\delta\} = [N]\{\delta\}^e \tag{1-4}$$

其中[N]是结点坐标的函数，通常称为插值函数，也称形状函数。

二、推导单元刚度矩阵，单元荷载矩阵

推导单元刚度矩阵的方法一般有四种：

1．直接刚度法

在某一自由度方向给出一单位位移，求出由单位位移在其他各自由度方向上产生的力。这方法往往在杆件系统中采用较多，有关内容请见杆件系统的结构矩阵位移法。

2．变分原理法

建立单元的能量泛函表达式，利用变分极值原理，建立泛函的极值条件，从而得到单元力与单元位移的平衡关系式。

3．虚功原理法

建立单元的虚功方程，从而得到单元力与单元位移间的关系式。

4．加权残值法

假定位移试函数，代入控制微分方程及边界条件得残差方程。再用最小二乘原理使残差达到极小来实现。

常用的是第二、三种方法，现在用变分原理进行推导如下：物体的总势能Π可写成

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_v \{\sigma\}^T\{\varepsilon\}\,\mathrm{d}v - \int_v \{\delta\}^T\{P\}\,\mathrm{d}v - \int_s \{\delta\}^T\{q\}\,\mathrm{d}s - \{\delta_P\}^T\cdot\{F_1\} \tag{1-5}$$

其中，$\{P\}$是每单位体积的体力向量；$\{q\}$是外加表面力向量；$\{\delta\}$是任一点的位移向量。$\{F_1\}$是作用在结构节点上的集中外力向

量；$\{\delta_P\}$ 是有集中力的结点位移向量，积分区域取为结构的整个体积 V 和荷载作用表面积 s。

式(1-5)右边的第一项是变形能，而第二和第三项分别表示体力和分布表面力的势能，第四项是结构上集中外力所作的功。如果有温度场，还可加温度场势能。

在有限元位移法中，假定只有结点上的位移是已知的，因而，单元内位移的变化借助于插值函数用结点位移来描述。所以，只要适当地选择形状函数，使泛函的被积函数中没有奇异性存在，则把每个单元的势能叠加起来，就可以得到连续体的总势能。因此，

$$\Pi = \sum_e \Pi_e \tag{1-6}$$

为了建立单元上总势能的表达式，先在单元上建立位移模式，然后由此函数建立应变关系式和应力应变方程。

位移函数的建立采用插值函数法。设

$$\{\delta\} = [N]\{\delta\}^e = \sum_{i=1}^{n}[N_i]\{\delta_i\} \tag{1-7}$$

其中，$\{\delta\}^e = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}^T$； $[N] = [[N_1], [N_2], \cdots, [N_n]]$

而 $[N_i] = N_i \cdot [I]$，$[I]$ 是 $r \times r$ 阶单位阵，r 是每结点的自由度数，n 是单元结点数。函数 N_i 在结点 i 处为1，其余结点处为0。

对式(1-7)求导可建立应变位移关系：

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e = \sum_{i=1}^{n}[B_i]\cdot\{\delta_i\} \tag{1-8}$$

$$[B] = [[B_1], [B_2], \cdots, [B_n]]$$

而

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

$[B]$ 称为应变矩阵。

由物理方程，应力应变关系

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{1-10}$$

也可以考虑具有初应力初应变情况的关系

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^0\})+\{\sigma^0\} \tag{1-11}$$

其中，$[D]$为弹性矩阵；$\{\sigma\}$，$\{\sigma^0\}$，$\{\varepsilon\}$，$\{\varepsilon^0\}$分别为应力，初应力，应变，初应变向量。

单元总势能可以应用式(1-5)写成

$$\Pi_e=\frac{1}{2}\int_e\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}\mathrm{d}v-\int_e\{\delta\}^T\{P\}\mathrm{d}v$$
$$-\int_s\{\delta\}^T\{q\}\mathrm{d}s-(\{\delta\}^e)^T\{F_1\}^e \tag{1-12}$$

将式(1-7)，(1-8)，(1-10)代入式(1-12)

$$\Pi_e=\frac{1}{2}\int_e(\{\delta\}^e)^T[B]^T[D][B]\{\delta\}^e\mathrm{d}v$$
$$-\int_e(\{\delta\}^e)^T[N]^T\{P\}\mathrm{d}v-\int_s(\{\delta\}^e)^T[N]^T\{q\}\mathrm{d}s$$
$$-(\{\delta\}^e)^T\{F_1\}^e \tag{1-13}$$

积分号下的 e, s 分别表示单元的体积和它的表面积。

由变分原理，并利用向量求导法则[注]：

$$\frac{\partial\Pi_e}{\partial\{\delta\}^e}=\int_e[B]^T[D][B]\{\delta\}^e\mathrm{d}v-\int_e[N]^T\{P\}\mathrm{d}v$$
$$-\int_s[N]^T\{q\}\mathrm{d}s-\{F_1\}^e=0 \tag{1-14}$$

由于$\{\delta\}^e$是结点位移向量，可以提出积分号，式(1-14)可以写为：

$$[K]^e\{\delta\}^e=\{F\}^e \tag{1-15}$$

式中，

$$[K]^e=\int_e[B]^T[D][B]\mathrm{d}v \tag{1-16}$$

是单元刚度矩阵。

$$\{F\}^e=\int_e[N]^T\{P\}\mathrm{d}v+\int_s[N]^T\{q\}\mathrm{d}s+\{F_1\}^e \tag{1-17}$$

是单元等效结点力向量。

显然，对每个单元都有 (1-15) 式。可以将全部单元的式(1-15)集装成整体结构平衡方程式(1-2)，这将在程序介绍中详细说

明其生成方法。这项工作还与存贮方法和解方程组有关，是程序设计中的关键部分。

现在再用虚功原理进行推导：

虚位移原理是外力在虚位移上作的功等于应力在虚应变上所作的功之和。

设 $\{F_1\}^e$ 是单元结点力向量；$\{\delta^*\}$、$\{\varepsilon^*\}$ 是虚位移和虚应变向量；$\{\delta^*\}^e$ 是单元结点上的虚位移向量。则虚功方程是：

$$(\{\delta^*\}^e)^T\cdot\{F_1\}^e+\int_e\{\delta^*\}^T\cdot\{P\}\,\mathrm{d}v=\int_e\{\varepsilon^*\}^T\cdot\{\sigma\}\,\mathrm{d}v \tag{1-18}$$

由式(1-7)、(1-8)得

$$(\{\delta^*\}^e)^T\cdot\{F_1\}^e+\int_e(\{\delta^*\}^e)^T[N]^T\cdot\{P\}\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_e(\{\delta^*\}^e)^T[B]^T\{\sigma\}\,\mathrm{d}v$$

由于 $\{\delta^*\}^e$ 只与结点有关，可提出积分号，所以有

$$(\{\delta^*\}^e)^T(\{F_1\}^e+\int_e[N]^T\{P\}\,\mathrm{d}v)=(\{\delta^*\}^e)^T\cdot\int_e[B]^T\{\sigma\}\,\mathrm{d}v$$

由于结点虚位移的任意性，对于所有的 $\{\delta^*\}^e$ 值，上式均成立。所以必有

$$\{F_1\}^e+\int_e[N]^T\{P\}\,\mathrm{d}v=\int_e[B]^T\{\sigma\}\,\mathrm{d}v$$

由式(1-11)，(1-8)上式有

$$\{F_1\}^e+\int_e[N]^T\{P\}\,\mathrm{d}v=\left(\int_e[B]^T[D][B]\,\mathrm{d}v\right)\{\delta\}^e$$

$$-\int_e[B]^T[D]\{\varepsilon^0\}\,\mathrm{d}v+\int_e[B]^T\{\sigma^0\}\,\mathrm{d}v \tag{1-19}$$

若令

$$[K]^e=\int_e[B]^T[D][B]\,\mathrm{d}v \tag{1-16}$$

$$\{F_P\}^e=\int_e[N]^T\{P\}\,\mathrm{d}v \tag{1-20}$$

$$\{F_{\varepsilon_0}\}^e=\int_e[B]^T[D]\{\varepsilon^0\}\,\mathrm{d}v \tag{1-21}$$

$$\{F_{\sigma 0}\}^e=\int_e [B]^T\{\sigma^0\}\mathrm{d}v \tag{1-22}$$

式(1-19)成为

$$[K]^e\cdot\{\delta\}^e=\{F_1\}^e+\{F_P\}^e+\{F_{\varepsilon_0}\}^e-\{F_{\sigma 0}\}^e \tag{1-23}$$

其中，$\{F_1\}^e$、$\{F_P\}^e$、$\{F_{\varepsilon_0}\}^e$、$\{F_{\sigma 0}\}^e$ 分别是单元上的结点力、体力、等效结点力向量和初应变初应力引起的等效结点力向量。

[注]：由矩阵分析可知：

若矩阵 A、向量 X 和常数 B，则有

$$\frac{\partial X^TAX}{\partial X}=2AX$$

$$\frac{\partial AX}{\partial X}=A^T \text{ 或 } \frac{\partial X^TA}{\partial X}=A$$

$$\frac{\mathrm{d}BX}{\mathrm{d}X}=B\cdot I_n,\ I_n\text{ 为单位阵}$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}X}=O,\ O\text{ 为零向量}$$

第二章　平面问题有限元法及其程序

在第一章中介绍了有限元法的基本理论和一般的计算步骤。在这一章中将介绍平面问题有限元程序，以说明有限元程序设计的基本方法及其程序设计技巧。

§2-1　平面问题有限元法的基本公式

一、结构离散化

为了说明问题，使初学者易于掌握，用最简单的三结点三角形单元来离散结构物。图2-1所示是方板受面内集中荷载作用下的内力计算简图。考虑方板的对称性，取其1/4作为计算模型。为简单起见，只分四个三角形单元，六个结点的离散结构来代替原来的连续结构，其边界条件由对称条件所决定。

对于平面问题，单元间的联结看作是铰接。结点位移为$\{\delta\}_i=\{u_i,\ v_i\}^T$，取出离散结构中的任一单元(图(2-2))来分析。i, j, m是该单元的结点号，为保证计算的三角形面积为正值，其$i\rightarrow j\rightarrow m$规定为逆时针走向。每三角形单元有六个结点位移，即

$$\{\delta\}^e=\{u_i\ v_i\ u_j\ v_j\ u_m\ v_m\}^T$$

右上角的e表示单元的意思，T为转置向量。作用在该单元上的结点力为

$$\{F\}^e=\{X_i\ Y_i\ X_j\ Y_j\ X_m\ Y_m\}^T$$

二、位移模式

恰当地选取位移模式在有限元分析中起着关键的作用，它表示在单元上用一个简单函数近似代替复杂的实际位移函数。但是，正如第一章所讲，它的选择与所划分单元的形状和单元结点数

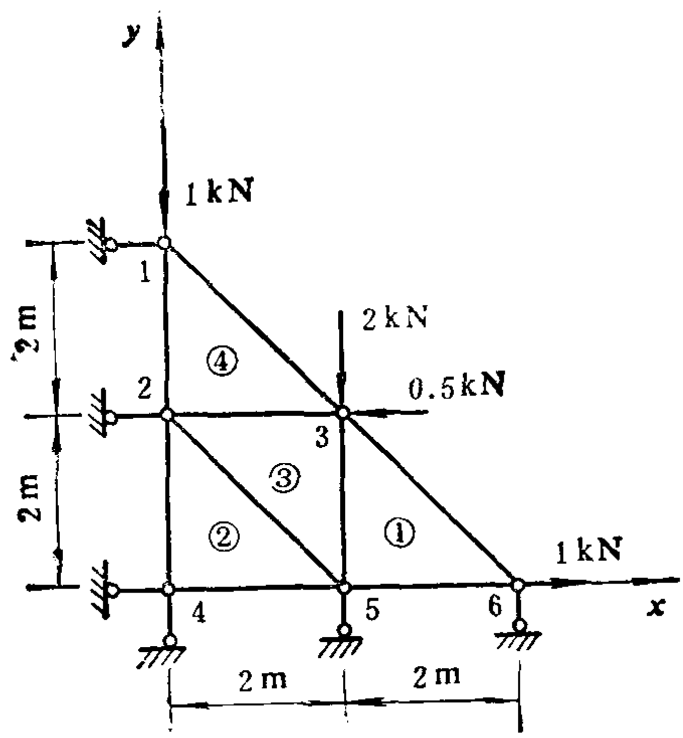

图 2-1

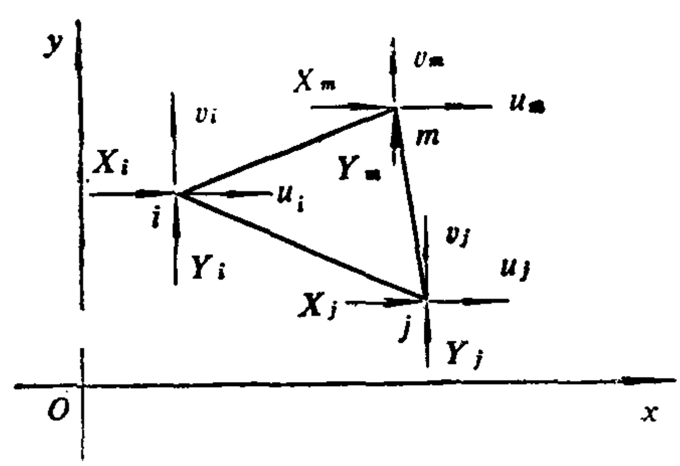

图 2-2

有关，不能随便选取。如简单三角形单元只能取线性函数作为位移函数，下面将用广义坐标法建立位移模式。

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \tag{2-1}$$

由于三角形单元有六个自由度，位移函数(2-1)中有六个任意参数 $\alpha_1 \sim \alpha_6$，在三角形单元的交线上有两个结点。所以，式(2-1)在二个单元的交线上是连续的。位移函数在结点 i 处的值为

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \end{cases}$$

$(i,\ j,\ m)$

在 j, m 点处也同样有上面的关系式，这样三个结点共有六个方程，可解出六个任意参数 $\alpha_1 \sim \alpha_6$。代回式(2-1)并整理可得：

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{cases} \tag{2-2}$$

这里

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\cdot\triangle \quad (i,\ j,\ m) \tag{2-3}$$

其中，

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j, & b_i = y_j - y_m, & c_i = -x_j + x_m \\ a_j = x_m y_i - x_i y_m, & b_j = y_m - y_i, & c_j = -x_m + x_i \\ a_m = x_i y_j - x_j y_i & b_m = y_i - y_j & c_m = -x_i + x_j \end{cases} \tag{2-4}$$

$\triangle$是三角形单元的面积。由解析几何

$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b_j\cdot c_m - c_j\cdot b_m) \tag{2-5}$$

将式(2-2)用矩阵表示：

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\cdot\{\delta\}^e$$

$$= [[I]\cdot N_i,\ [I]\cdot N_j,\ [I]\cdot N_m]\{\delta\}^e \tag{2-6}$$

$[I]$为二阶单位阵，N_i, N_j, N_m 是由式(2-3)所表示的位移形态函数，它反映了位移的形态；而$[N]$称为形函数矩阵。

三、应变-位移关系

由弹性力学知，

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \end{Bmatrix} \tag{2-7}$$

其中，ε_x, ε_y, γ_{xy} 分别是 x, y 方向的线应变和剪应变。将式(2-2)求导后代入式(2-7)，可得单元上应变和结点位移关系式，

$$\{\varepsilon\}^e = [B]\{\delta\}^e \tag{2-8}$$

式中，

$$[B]=\frac{1}{2\triangle}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

而 b_i, b_j, b_m, c_i, c_j, c_m 由式(2-4)所表示。

四、应力-应变关系

由物理方程可知：

$$\{\sigma\}=\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T=[D]\{\varepsilon\} \tag{2-10}$$

其中，$[D]$称为弹性矩阵。

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

将单元应变式(2-8)代入式(2-10)，可得单元上应力和结点位移的关系式：

$$\{\sigma\}^e=[D][B]\{\delta\}^e \tag{2-12}$$

即，

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^e=\frac{E}{2\triangle(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \tag{2-12'}$$

上述公式是平面应力问题公式。对于平面应变，只要在式(2-11)中的 E、μ 分别用 $E/(1-\mu^2)$、$\mu^2/(1-\mu)$ 代替即可。所以，只要知道了单元结点位移，那么，单元应力也就可以确定。

由材料力学可知，根据单元正应力、剪应力可以求出单元上的主应力和主应力方向。