

高等学校教材

# 自动控制原理

孙炳达 梁志坤 主编



机械工业出版社  
China Machine Press

高等学校教材

# 自动控制原理

主编 孙炳达 梁志坤  
参编 张 森 谢莉萍



机械工业出版社

本书是工科院校“自动控制原理”课程的教科书，是为适应当前的教材内容适用的专业面宽、授课时数较少的精神编写的，内容包括经典控制部分的线性定常系统时域分析方法；根轨迹和频率特性分析法；非线性系统的描述函数分析法；离散系统分析的基本概念、控制原理和工程设计方法。

本书内容精炼，层次分明，重点突出，理论联系实际，论述深入浅出。既方便教学，又便于自学。

本书可作为工科大学的电气、电子、自动控制、信息、自动化、计算机及应用、机械电子及系统工程等各相关专业本科生的教材，也可作为大专、电视大学、业余大学相近专业学生的教材，还可作为从事科技和控制工程应用和研究的人员自学。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

自动控制原理/孙炳达、梁志坤主编. - 北京: 机械工业出版社, 2000. 5

高等学校教材

ISBN 7-111-07600-1

I. 自… II. ①孙… ②梁… III. 自动控制理论-高等学校-教材  
IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 69662 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 贡克勤 版式设计: 霍永明 责任校对: 申春香

封面设计: 李雨桥 责任印制: 何全君

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2000 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm<sup>1</sup>/<sub>16</sub>·14.75 印张·362 千字

0 001—5 000 册

定价: 21.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68993821、68326677-2527

# 前 言

为了满足教材内容适用的专业面宽、授课时数少的精神，我们编写了这本能适用于工科大学多种学科的“自动控制原理”课程的教材。

本教材的特点是：在内容编排上，既考虑到理论体系的系统性和完整性，又力求做到少而精，删除了那些在现代控制工程应用中不用或与后续课程无联系的内容；突出重点，理论联系工程实际；在撰写方法上，层次分明、深入浅出；论述简明、通俗易懂、概念清晰、使读者对经典控制理论的体系有清楚、完整的概念，并能学会处理实际控制工程的综合方法。书中列举了一定数量的例题，每章的后面附有习题。

全书共分八章。其中：第一章介绍有关自动控制系统的基本概念。第二章讨论了求取线性定常系统数学模型的方法。第三章介绍线性定常系统的时域分析方法。重点讨论了典型一、二阶系统的性能指标的计算，系统参数与性能之间的关系，高阶系统的分析方法及系统稳定性的判定和控制精度的计算等有关问题。第四章介绍了系统的根轨迹分析方法，重点介绍系统根轨迹图的绘制，定性分析和根轨迹图的改造。第五章介绍系统的频率特性分析方法，重点讨论了频率特性分析法的基本原理、系统开环频率特性的绘制以及在频率特性图上进行系统稳定性的分析和性能计算的方法。第六章讨论了用频率法校正。第七章介绍了非线性系统的特点及用描述函数分析的方法。第八章是有关采样控制系统分析与综合的内容。

本书的第一、三、五章由孙炳达编写；第二、四章由张森编写；第六章由谢莉萍编写；第七、八章由梁志坤编写。全书由孙炳达教授、梁志坤副教授任主编。

在编写本书的过程中，参考和吸收了兄弟院校教材的部分内容，并得到广东工业大学教务处、自动化系、自动化教研室等单位及有关同志的鼓励及支持。在审稿的过程中，汤荣江副教授、梁慧冰教授和符曦教授提出了不少宝贵的修改意见，在此向上述有关同志、单位谨致衷心的感谢！本书的出版还得到省重点学科、省重点课程基金的资助，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者的水平，特别是编写时间仓促，书中可能存在不妥之处，恳请广大读者、专家和学者予以批评、指正。

编 者  
1999年10月

# 目 录

前 言	
第一章 自动控制系统的基本概念	1
第一节 自动控制的基本方式	1
第二节 闭环控制系统的基本组成	3
第三节 自动控制系统的分类	4
第四节 对控制系统的基本要求	5
习题	6
第二章 线性系统的数学模型	8
第一节 动态微分方程的编写	8
第二节 非线性数学模型的线性化	12
第三节 传递函数	15
第四节 系统动态结构图	22
第五节 信号流程图	30
第六节 脉冲响应函数	34
习题	34
第三章 控制系统的时域分析法	37
第一节 典型输入信号和时域性能指标	37
第二节 一阶系统分析	39
第三节 二阶系统分析	42
第四节 高阶系统分析	49
第五节 稳定性分析及代数判据	51
第六节 稳态误差分析及计算	55
习题	62
第四章 控制系统的根轨迹分析法	65
第一节 根轨迹的基本概念	65
第二节 绘制根轨迹的基本条件和基本规则	66
第三节 参量根轨迹	73
第四节 系统性能的根轨迹分析	74
习题	76
第五章 控制系统的频率特性分析法	78
第一节 频率特性的基本概念	78
第二节 频率特性的表示方法	80
第三节 典型环节的频率特性	81
第四节 系统开环频率特性绘制	89
第五节 用频率法分析系统的稳定性	94
第六节 用频率法分析系统的稳态性能	101
第七节 用开环频率特性分析系统的动态性能	103
第八节 用闭环频率特性分析系统性能	107
习题	110
第六章 频率法校正	113
第一节 频率法校正的基本概念	113
第二节 串联超前校正	114
第三节 串联滞后校正	118
第四节 相位滞后-超前校正	121
第五节 期望串联校正	126
第六节 并联校正	129
习题	132
第七章 非线性系统分析	134
第一节 控制系统中的典型非线性特性	134
第二节 描述函数法	137
第三节 用描述函数法分析非线性系统	147
第四节 改善非线性系统性能的方法	158
习题	163
第八章 线性离散控制系统的分析与综合	166
第一节 离散控制系统的概述	166
第二节 采样过程及信号复现	168
第三节 Z变换	174
第四节 脉冲传递函数	185
第五节 离散控制系统稳定性分析	191
第六节 离散控制系统的稳态误差	195
第七节 离散控制系统的动态性能分析	199
第八节 离散控制系统的频率特性法	207
第九节 离散系统的校正方法	213
第十节 最小拍离散控制系统的综合	217
习题	224
附录	227
参考文献	232

# 第一章 自动控制系统的基本概念

在工程和科学的发展中，自动控制技术起着极其重要的作用。“自动控制原理”是自动控制技术的基础理论，是研究自动控制共同规律的理论性较强的一门技术学科。根据自动控制技术发展的不同阶段，目前自动控制原理一般分为“经典控制理论”和“现代控制理论”两大部分。经典控制理论以传递函数为基础，主要研究单输入、单输出线性定常系统的控制及综合问题。在工程实践中，经典控制理论已得到许多成功的应用，而且今后还将继续发挥其理论的指导作用。现代控制理论是 60 年代初为适应宇航技术发展需要而出现的新理论。它是以状态方程为基础，主要研究具有高性能的多输入、多输出、变参数系统的控制和综合问题。现代控制理论能解决经典控制理论难以解决的一些问题，而且随着计算机技术和现代应用数学研究的发展，目前现代控制理论正向大系统和人工智能理论等方面深入发展。

本教材仅涉及经典控制理论内容，主要介绍其基本概念、基本原理和分析、综合系统的基本方法。

## 第一节 自动控制的基本方式

**自动控制**，就是在没有人的直接参与的情况下，利用控制装置使某种设备、工作机械或生产过程的某些物理量或工作状态能自动地按照预定的规律运行或变化。通常，把控制的装置称为**控制器**；把被控制的设备或工作机械称为**被控对象**；被控对象内要求实现自动控制的物理量称为**被控量**或系统的**输出量**；控制器和被控对象的总体，称为**自动控制系统**。在控制系统中，把影响系统输出量的外界输入称为系统的**输入量**。系统的输入量，通常指两种，即**给定输入量**和**扰动输入量**。给定输入，又称为参考输入，它决定系统输出量的变化规律或要求值。扰动输入是系统不希望但又客观存在的外作用。例如电源电压的波动，环境温度、压力的变化，电动机拖动负载的变化等等，都是实际系统中存在的扰动作用。扰动输入影响给定输入对系统输出量的控制。

自动控制系统的种类繁多、形式多样、任务不一，但从控制的基本方式看，可分为开环控制、闭环控制和复合控制。

### 一、开环控制

开环控制是指系统输出端与输入端之间不存在反馈回路，或者说，系统的输出量不对系统的控制产生任何作用的控制过程。

图 1-1 所示的直流电动机调速系统是开环控制的一个例子。电动机拖动生产机械或其它部件运转，生产机械是被控对象，转速  $n$  是系统的被控量或输出量。电压  $u_g$  是系统的给定输入量。当改变电位器滑动端的位置时，相应地改变了给定输入量和电动机电枢两端的电

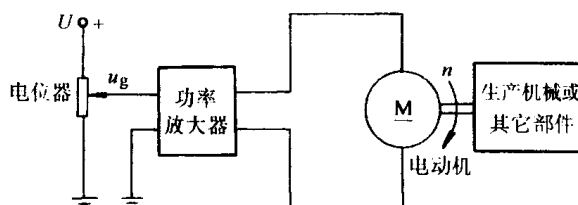


图 1-1 直流电动机开环调速系统

压。由于电动机具有恒定的励磁电流，因此，随着电枢电压不同，电动机便以不同的转速带动生产机械运转。对应电位器滑动端的一个固定位置，换句话说，一个固定的给定输入量，生产机械就以一个相对应的转速要求值运转，从而达到了控制目的。

可以看出，上述控制系统的输出端与输入端之间没有反馈回路。系统只是根据给定输入量  $u_g$  进行控制，而输出量  $n$  在整个过程中对控制作用都没有影响。由定义可知，它属于开环控制的系统。开环控制系统的框图可用图 1-2 表示。

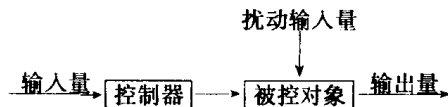


图 1-2 开环控制系统框图

值得指出，当出现外部扰动输入或内部扰动作用时，若没有人的直接干预，开环控制系统的输出量将不能按照给定输入量所对应的希望值或状态运行。例如，在上例中当输入量  $u_g$  不变时，若功率放大器的供电电压突然下降或电动机负载突然上升，电动机的转速即系统的输出量都会下降。输出量的下降使它偏离了给定输入量  $u_g$  对应的期望值。这时，若要维持原输出值，操作人员就必须重新调整电位器滑动端位置，增加给定输入电压值后才能达到。

## 二、闭环控制

闭环控制是指系统输出端与输入端之间存在反馈回路，或者说，系统的输出量直接或间接地参与了系统的控制作用。

图 1-3 所示的直流电动机调速系统，是闭环控制的一个例子。实际上，它是在开环调速系统的基础上引入一台测速发电机(TG)构成的。测速发电机起着检测系统输出量即转速  $n$  并把它转换成与给定电压  $u_g$  物理量相同的反馈电压  $u_f$ 。反馈电压  $u_f$  与给定输入电压  $u_g$  相比较后产生一偏差电压  $\Delta u (= u_g - u_f)$ ，

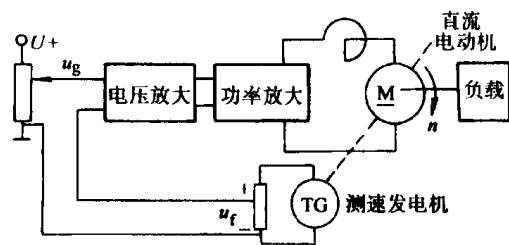


图 1-3 直流电动机闭环调速系统

再经过放大器放大后去控制直流电动机的转速。当电位器滑动端处在某一位置时，电动机就以一个相对应的希望转速值带动生产机械运转。当出现外部或内部扰动时，例如，功率放大器的输出电压下降，或者电动机的拖动负载突然增加，电动机的转速就会下降。电动机转速的变化会被测速发电机检测出来，相应地使反馈电压  $u_f$  的值下降。这时，反馈电压与给定输入电压比较后使偏差电压值  $\Delta u$  增大，经放大器放大后，电动机电枢电压增加使转速回升。从而减小或消除了由于系统外部或内部的各种扰动所造成的输出量转速的偏差。

从上述分析看出，闭环控制实际上是根据负反馈原理，按偏差量进行控制的。系统中无论是内部还是外部扰动引起输出量偏离期望值而产生偏差时，就会有相应的控制作用产生去消除偏差，使输出量重新恢复到希望值上。因此，闭环控制也称为反馈控制或偏差控制。闭环控制的职能框图，如图 1-4 所示。

闭环控制系统广泛地应用于各工业部门。图 1-5 所示的发电机励磁控制系统，是闭环控制的又一实例。

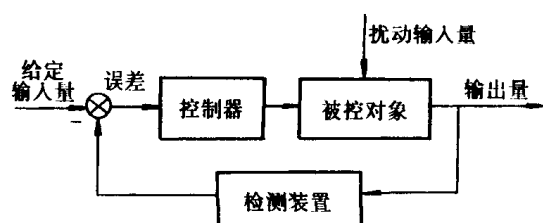


图 1-4 闭环控制系统框图

图 1-5 中,三相交流同步发电机由原动机带动作恒速旋转,并向负载供给电力。系统的被控对象是发电机,系统的输出量是发电机端电压  $u$ 。电压  $u_i$  是系统的给定输入量。电压互感器检测发电机端电压  $u$ ,经整流后获得与发电机端电压  $u$  成比例的直流反馈电压  $u_f$ 。输入电压  $u_k$  与反馈电压  $u_f$  相减后产生偏差电压  $\Delta u$ ,  $\Delta u$  经放大器放大去控制发电机的励磁电流。通过改变发电机的励磁电流去控制发电机的机端电压,使机端电压在系统受到各种干扰时,例如负载波动,都能使它维持在输入电压  $u_i$  对应的希望值上。

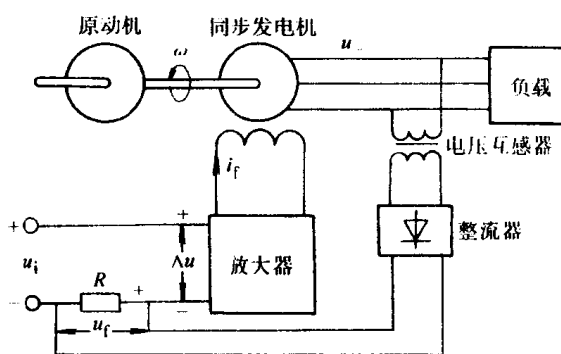


图 1-5 发电机励磁控制系统

### 三、复合控制

复合控制是开环和闭环控制相结合的一种控制方式。实际上,它是在闭环控制基础上再引入一条由给定输入信号或扰动作用所构成的顺馈通路。顺馈通路相当于开环控制。复合控制通常有两种典型结构,分别称为按输入信号补偿结构和按扰动作用补偿结构,如图 1-6 所示。

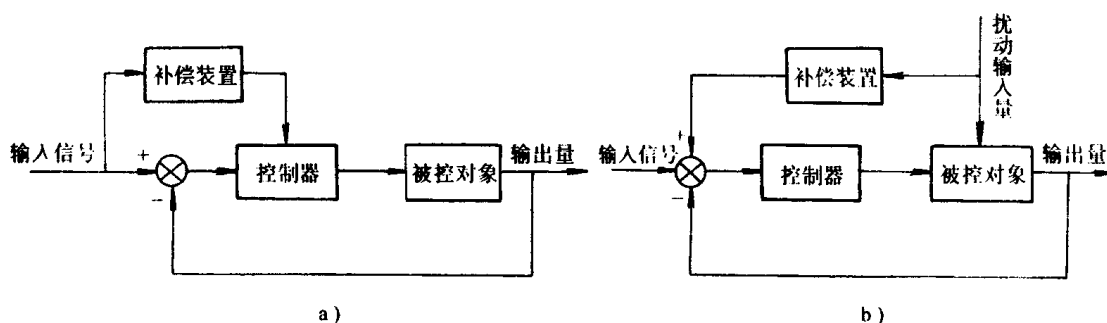


图 1-6 复合控制结构框图

a)按输入信号补偿结构 b)按扰动作用补偿结构

按输入信号补偿的复合控制系统,其补偿装置提供了一顺馈控制信号,此信号与原控制信号一起对被控对象进行控制以提高系统跟踪输入信号的能力(精度)。按扰动作用补偿的复合控制系统,其补偿装置利用干扰信号产生一控制作用以补偿或抵消干扰信号对被控量的影响,增强系统的抗干扰能力。两种补偿的原理及设计方法详见第三章。

上面介绍了三种基本的控制方式。实际上目前许多新型的控制系统都是在这三种基本的控制方式上发展而成的。对于这三种控制方式,一般来说,开环控制的结构简单、成本低廉、调试容易,但控制精度较差,抗干扰能力不强,只适用于性能要求不高的控制系统;闭环控制的结构较复杂,成本相对较高,调试较困难,但具有自动修正系统输出量偏差的能力,能克服系统内部元部件参数变化或外界扰动所引起的误差,其控制精度较高。闭环控制系统最广泛地应用于工业的各个部门;若要求实现较复杂且精度更高的控制任务,可采用复合控制结构。

## 第二节 闭环控制系统的基本组成

根据被控对象和使用的元部件不同,闭环控制系统有各种不同的形式,但是就其职能来



看，一般均由以下的基本环节组成。

(1) 被控对象 是指要进行控制的设备或过程。

(2) 测量装置 对系统输出量进行测量。因为测量元件的精度直接影响系统精度，所以应尽可能采用精度高的测量元件和合理的测量线路。

(3) 给定环节 产生系统给定输入信号。给定环节的精度对系统的控制精度会有较大影响，因此应采用高精度元件构成给定环节。

(4) 比较环节 对系统输出量与输入量进行比较，产生偏差信号，起信号的综合作用。在大多数控制系统中，比较环节常常是和测量环节或其线路结合在一起的，往往并不单独存在。

(5) 放大环节 对偏差信号进行放大并进行能量形式的转换，使之适合于控制执行机构工作的信号。

(6) 执行机构 对被控对象进行控制的装置或元件。

(7) 校正装置 用于改善系统的性能。校正环节可以加在由偏差信号至输出信号之间的通道内。这种校正方式，又称为串联校正；校正装置也可以加在某一局部反馈通道内，这种校正方式，也称为反馈校正或并联校正。某些情况下，可以同时应用串联校正及并联校正以进一步提高控制系统的性能。

由上述基本环节组成的闭环控制系统职能框图如图 1-7 所示。图中，系统的基本元部件用框表示；信号的传输方向，用箭头表示；信号的综合，用带“×”的圆圈表示，“+”号表示两信号相加，即正反馈。正反馈只能在系统中的某局部环节间使用。“-”号表示两信号相减，即负反馈。信号从输入端沿箭头方向到达系统输出端的传输通道，称它为前向通路或正向通道。系统输出量经由测量装置反馈到系统输入端的传输通道，称它为主反馈通路或主反馈通道，而其他的反馈通道，称为副反馈或局部反馈通道。只有一个反馈通道的系统，称为单回路系统，有两个以上反馈通道的系统，称为多回路系统。

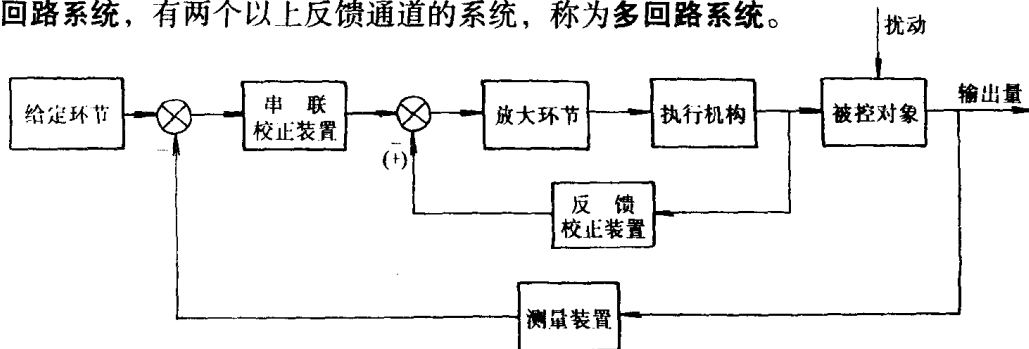


图 1-7 典型闭环系统框图

### 第三节 自动控制系统的分类

控制系统的分类方法不少。但是，通常人们很难确切地对自动控制系统进行分类，一是因为同一系统按不同的分类方法，其属性不同；二是由于控制技术发展很快，各式各样的新系统不断产生和发展。这里仅介绍常见的两种分类方法。

#### 一、按使用的数学模型分类

##### 1. 线性系统和非线性系统

(1) 线性系统 系统输入量与输出量之间的关系可用线性微分方程或线性差分方程描述的系统。若方程的系数与时间  $t$  无关即为定常数, 则该系统又称为**线性定常系统**。若方程的系数值随时间  $t$  变化而变化, 则称该系统为**线性时变系统**。

线性系统有两个重要特性: 叠加性和齐次性。

1) 叠加性 当系统同时存在几个输入量作用时, 其输出量等于各输入量单独作用时所产生的输出量之和。

2) 齐次性 当系统的输入量增大或缩小若干倍时, 系统输出量也按同一倍数增大或缩小。齐次性又称为均匀性。

(2) 非线性系统 系统输入量与输出量之间的关系可用非线性微分方程或非线性差分方程描述的系统。

应注意, 在自动控制系统中, 即使只含有一个非线性环节, 这一系统也是属于非线性的; 其次, 目前对于非线性系统的理论研究远不如线性系统那样完整和完善; 严格来说, 任何物理系统的特性, 都是非线性的, 但在一定的条件下若可以将某些非线性特性线性化, 近似地用线性微分方程去描述, 这样就可以按照线性系统来处理。

## 2. 连续系统和离散系统

(1) 连续系统 若系统中各元件的输入量和输出量均为时间  $t$  的连续函数时, 称该系统为连续系统。连续系统的运动规律可用微分方程描述, 系统中各部分信号都是模拟量。

(2) 离散系统 若系统中某一处或几处的信号是以脉冲系列或数码的形式传递的系统, 称为离散系统。离散系统的运动规律可用差分方程描述。计算机控制系统就是典型的离散系统。

## 二、按给定输入信号特征分类

(1) 恒值系统 给定输入为恒值, 要求系统在任何扰动作用下, 系统输出量能以一定精度接近给定希望值的系统, 称为恒值系统。如生产过程中的温度、压力、流量、液位高度、电机转速等自动控制系统属于恒值系统。

(2) 随动系统 给定输入量是未知的时间函数, 要求系统输出量跟随输入量变化的系统, 称为随动系统。如雷达天线跟踪系统、卫星跟踪、自动火炮自动控制系统等属于随动系统。

(3) 程序控制系统 给定输入量是按照已知的时间函数变化的系统, 称为程序控制系统。如程序控制车床、热处理炉温度的升温、保温、降温过程等都是按照预先设定的规律进行控制的, 它们都属于程序控制系统。

## 第四节 对控制系统的基本要求

在分析和设计自动控制系统时, 需要有一个评价系统优劣的标准, 这个标准通常用性能指标来表示。不同的被控对象、不同的工作方式和控制任务, 对系统的性能要求往往有所不同。但是, 归结起来对系统的基本要求体现在稳定性、动态特性和稳态特性三个方面, 或简称为“稳”、“快”、“准”。

### 一、稳定性

一个处于静止或平衡工作状态的系统, 当受到任何输入(给定信号或干扰)作用后, 就可能偏离原平衡状态。当作用消失后, 系统中的状态和输出都能恢复到原来平衡状态的系统,

称为稳定的。若作用消失后系统中的状态和输出发生增幅振荡或单调增长现象的系统，称为不稳定的。

显然，要想使系统正常工作，系统必须是稳定的，而且必须有一定的稳定裕量。稳定性是对系统的最起码的要求，是系统能否正常工作的前提条件。

## 二、动态特性

稳定的控制系统受到外加输入(给定或扰动)作用后，系统最终会恢复稳定或达到一新的平衡状态。但是，由于系统内机械部件存在质量和惯量、电路中存在储能元件，如电容和电感、以及能量功率的限制，使得系统中的状态和输出不能瞬时变化，而要经历一个过程。系统状态或输出随时间  $t$  变化的这一过程称为动态过程或过渡过程。动态特性就是反映系统在动态过程中，系统跟踪控制信号或抑制扰动的能力。动态特性好的系统，既要求过渡过程时间短，又要求过程平稳、振荡幅度小。

## 三、稳态特性

系统在过渡过程结束后，其输出量的状态值，一般用稳态误差来描述。稳态误差的大小反映了系统控制的精确程度。稳态误差值越小的系统，说明系统的控制精度越高，稳态特性越好。

值得注意的是，对于同一个系统体现稳定性、动态特性和稳态特性的稳(定)、快(速)、准(确)这三个要求是互相制约的。提高响应的快速性，可能会引起系统的强烈振动；改善系统相对稳定性，则又可能会使控制过程时间延长，反应迟缓以及精度变差；提高系统的稳态精度，则可能会引起动态特性(平稳性及过渡过程时间)变坏。分析和解决这些矛盾，将是本学科讨论的重要内容。

## 习 题

1-1 有一水位控制装置如图 1-8 所示。试分析它的控制原理，指出它是开环控制系统还是闭环控制系统？说出它的被控量、输入量及扰动输入量是什么？绘制出其系统框图。

1-2 某生产机械的恒速控制系统原理如图 1-9 所示。系统中除速度反馈外，还设置了电流正反馈以补偿负载变化的影响。试标出各点信号的正、负号并画出框图。

1-3 图 1-10 为温度控制系统的原理图。指出系统的输入量和被控量，并画出系统框图。

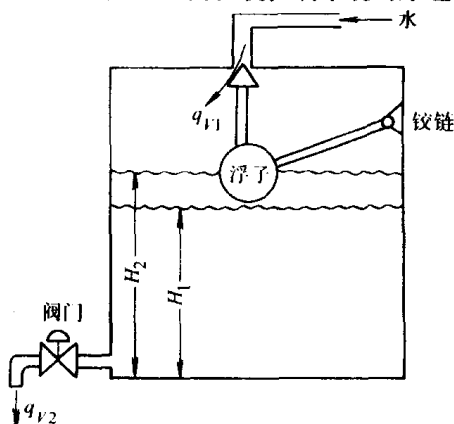


图 1-8 题 1-1 图

$q_{v1}$ —输入流量  $q_{v2}$ —输出流量  
 $H_1$ —实际水位  $H_2$ —希望水位

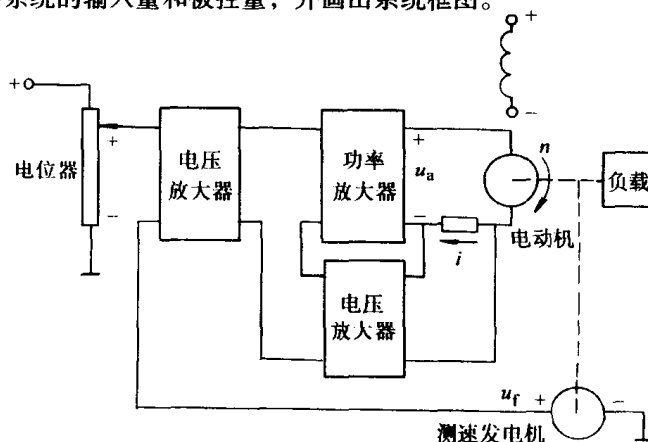


图 1-9 题 1-2 图

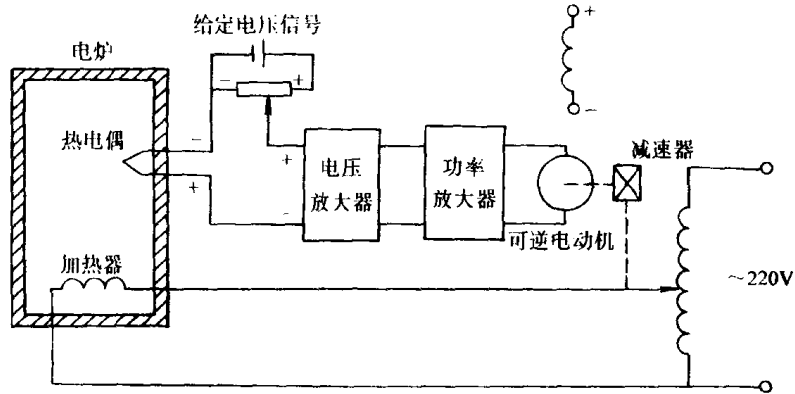


图 1-10 题 1-3 图

1-4 图 1-11 是船舶驾驶角位置跟踪系统的原理图。给定值  $\theta_r$  表示命令的角位置，被控量  $\theta_c$  为船舵角位置。说明系统的工作原理，画出系统框图。

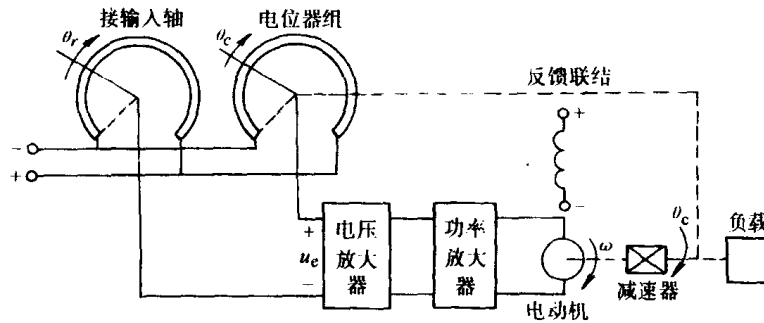


图 1-11 题 1-4 图

1-5 洗衣机控制系统框图如图 1-12 所示。试设计一个闭环控制的洗衣机系统框图。

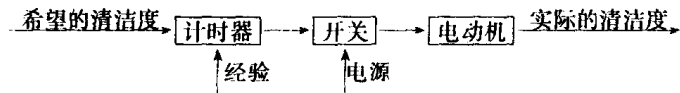


图 1-12 题 1-5 图

1-6 有两台汽轮发电机组转速调节系统如图 1-13 所示。试分析它们的控制原理，并指出它们是开环控制还是闭环控制系统？画出系统框图。

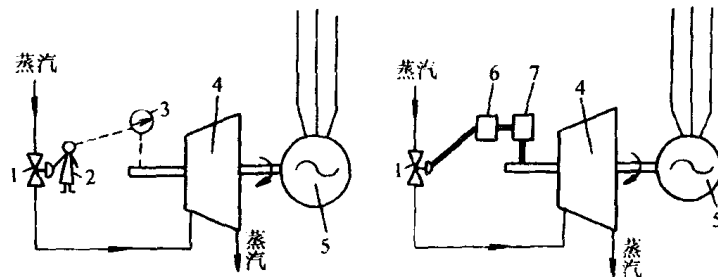


图 1-13 题 1-6 图

- 1—进气阀 2—操作人 3—转速表
- 4—汽轮机 5—同步发电机 6—调节器 7—转速检测元件

## 第二章 线性系统的数学模型

控制系统的种类很多，如物理的，生物的，社会经济的等。对于一个具体的系统来讲，其最终目的是能够完成某些规定的任务，达到一定的要求，例如建造一个室内恒温系统，是为了保持室内温度的恒定。人们在设计或检验一个控制系统性能时，主要从动态性能和稳态性能两方面来考虑。为了能较好地利用控制系统为我们服务，就必须掌握其内在规律。为了便于分析，人们常将描述系统工作状态的各物理量随时间变化的规律用数学表达式或图形表示出来，这种描述系统各个物理量之间关系的数学表达式称为系统的数学模型。

当系统的数学模型可以由线性微分方程来描述时，这种系统称为线性系统；反之，则称为非线性系统。严格地讲，实际物理系统都是非线性系统，只是非线性的程度有所不同而已。但是许多系统在一定条件下可以近似地视作线性系统。控制工程中常用的方法就是在简化的线性化模型基础上求得系统的近似特性。

建立数学模型有两种基本方法：机理分析法和实验辨识法。机理分析法是通过理论推导得出，这种方法是根据各环节所遵循的物理规律(如力学、运动学、电磁学、热学等)来编写；实验辨识法是由实验求取，即根据实验数据通过整理编写出来。在实际工作中，这两种方法是相辅相成的。由于理论推导是基本的常用方法，本章着重讨论这种方法。

### 第一节 动态微分方程的编写

编写系统的微分方程，其目的在于通过该方程确定被控量与给定量及扰动量之间的函数关系，为分析或设计系统创造条件。具体步骤是：

首先，要确定系统的输入量和输出量；其次，通过分析研究，根据力学、运动学、电磁学、热学等规律列出描述系统运行规律的一组微分方程；最后，消去中间变量，求出描述系统输入与输出关系的微分方程。

通常，我们把系统的给定量和扰动量作为系统的输入量，被控量为系统的输出量。在输入信号的作用下，系统相应的输出也称为系统的响应。

下面通过举例说明用机理分析法建立系统微分方程的方法和步骤。

**例 2-1** 编写如图 2-1 所示 RC 电路的微分方程式，步骤如下：

(1) 确定电路的输入量和输出量 由图 2-1 可知，当电压  $u_i$  变化时，将引起电路中电流  $i$  和电压  $u_o$  的变化。在这里，取电路的  $u_i$  为输入量，取  $u_o$  为输出量，则回路中电流  $i$  为联系输入和输出的中间变量。

(2) 列出原始微分方程式 根据电路理论得

$$u_i = Ri + u_o$$

$$i = C \frac{du_o}{dt}$$

(3) 消去中间变量 联立以上两个方程式，消去中间变量，可得电路微分方程式：

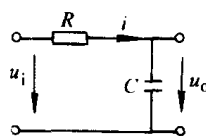


图 2-1 RC 电路原理图

$$RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i \quad (2-1)$$

式(2-1)表达了  $RC$  电路的输入量  $u_i$  与输出量  $u_o$  之间的关系。

**例 2-2** 图 2-2 所示为一弹簧阻尼系统，图中质量为  $m$  的物体受到外力  $F$  的作用，产生位移  $y$ ，求该系统以外力  $F$  为输入， $y$  为输出的微分方程。

(1) 确定电路的输入量和输出量 由已知条件可得，系统外力  $F$  为输入量，位移  $y$  为输出量。

(2) 根据力学、运动学原理列写中间方程式 根据牛顿定律，由图 2-2 所示系统可得系统的外力  $F$ ，与系统的弹簧阻力  $F_s$  及阻尼器的粘性摩擦阻力  $F_f$  应满足方程：

$$ma = F - F_s - F_f \quad (2-2)$$

式中  $m$ ——物体质量；  
 $a$ ——物体的加速度。

又因为

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$F_s = ky$$

$$F_f = f \frac{dy}{dt}$$

式中  $k$ ——弹簧系数；  
 $f$ ——阻尼器的阻尼系数。

(3) 消去中间变量得出微分方程 将以上三式代入式(2-2)，可得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F \quad (2-3)$$

式(2-3)即为描述该弹簧阻尼系统输入与输出关系的微分方程。

**例 2-3** 他励式直流电动机是控制系统中常用的执行机构或控制对象。当电枢电压  $u_d$  发生变化时，则其转速  $n$  以及角位移  $\theta$  产生相应的变化。

(1) 确定输入量和输出量 取输入量为电动机的电枢电压  $u_d$ ，输出量为电动机的转速  $n$ 。

(2) 列写微分方程式 根据回路电压定律由图 2-3 可得电枢回路的微分方程式：

$$e_d + i_d R_d + L_d \frac{di}{dt} = u_d \quad (2-4)$$

式中  $e_d$ ——电动机电枢反电动势；  
 $R_d$ ——电动机电枢回路电阻；  
 $L_d$ ——电动机电枢回路电感；  
 $i_d$ ——电动机电枢回路电流。

因为反电动势  $e_d$  与电动机的转速  $n$  成正比，可取

$$e_d = C_e n$$

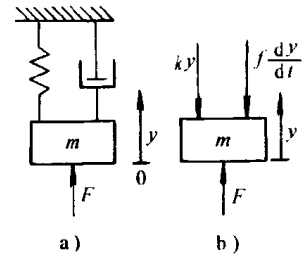


图 2-2 弹簧阻尼系统  
a) 原理图 b) 受力图

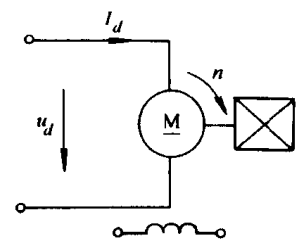


图 2-3 直流电动机电枢回路

式中  $C_e$ ——电动机电动势常数  $V/(r \cdot \min^{-1})$ 。

因此式(2-4)可以改写为

$$C_e n + i_d R_d + L_d \frac{di}{dt} = u_d \quad (2-5)$$

当略去电动机的负载力矩和粘性摩擦力矩时,机械运动微分方程式(数值方程式)为

$$M = \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} \quad (2-6)$$

式中  $M$ ——电动机的转矩( $N \cdot m$ );

$GD^2$ ——电动机的飞轮矩( $N \cdot m^2$ );

$t$ ——时间(s)。

当电动机的励磁不变时,电动机的转矩与电枢电流成正比,即电动机转矩为

$$M = C_m i_d \quad (2-7)$$

式中  $C_m$ ——电动机转矩常数。

上述三个方程式为电动机暂态过程的方程式组,其中电枢电流  $i_d$  和电动机转矩  $M$  是中间变量。

(3) 消去中间变量 将式(2-7)代入式(2-6)得

$$i_d = \frac{GD^2}{375 C_m} \frac{dn}{dt}$$

由此得

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{GD^2}{375 C_m} \frac{d^2 n}{dt^2}$$

将上述两式代入式(2-5)并整理,得

$$\frac{L_d}{R_d} \frac{GD^2}{375 C_m C_e} \frac{R_d}{dt^2} \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{GD^2 R_d}{375 C_m C_e} \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d}{C_e}$$

式中  $\frac{L_d}{R_d} = T_d$ ——电动机电磁时间常数(s);

$\frac{GD^2 R_d}{375 C_m C_e} = T_m$ ——电动机的机电时间常数(s)。

则得  $T_d T_m \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d}{C_e} \quad (2-8)$

式(2-8)即为电动机的动态微分方程式。

**例 2-4** 图 2-4 所示为一电阻、电感、电容串联网路,其中  $u$  为输入电压,求以电容两端电压  $u_C$  为输出的微分方程。

**解** 根据基尔霍夫回路电压定律,可列出此电路的电压平衡方程式

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = u \quad (2-9)$$

式中  $L$ ——电感;

$R$ ——电阻。

根据电容两端电压  $u_C$  与流过电容的电流  $i$  之间的关系得:

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

式中  $C$ ——电容容量。

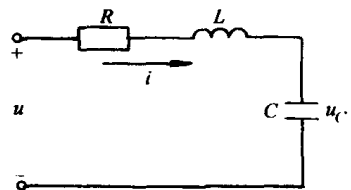


图 2-4 RLC 串联网路

把上式代入式(2-9)则得

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u \quad (2-10)$$

这就是描述该电路输入与输出关系的微分方程。

比较式(2-3)、式(2-8)、式(2-10)可见,虽然图 2-2、图 2-3、图 2-4 为三种不同的物理系统,但它们的数学模型的形式却是相同的,我们把具有相同数学模型的不同物理系统称为相似系统。例如图 2-2 的弹性阻尼系统和图 2-4 的 RLC 串联电路网络系统即为一对相似系统。在相似系统中,占据相应位置的物理量称为相似量。如式(2-3)中的变量  $F$ 、 $y$  分别与式(2-10)中的变量  $u$ 、 $u_C$  为对应的相似量。

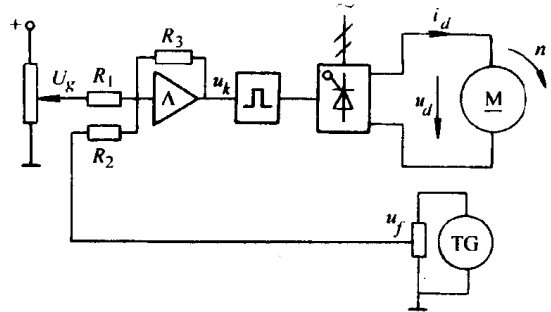


图 2-5 闭环调速控制系统

数学模型为系统的研究提供了有效的理论基础,而相似系统则揭示了不同物理系统之间的相互关系,利用相似系统的概念可以用一个易于实现的系统来研究与其相似的复杂系统,并根据相似系统的理论出现了仿真研究法。

现以图 2-5 闭环调速控制系统为例,说明编写闭环控制系统微分方程式的步骤。

根据系统的结构,可将该系统分为比较环节、比例放大环节、功率放大环节、控制对象和反馈环节五部分,并分别编写它们的微分方程。

(1) 确定系统的输入量和输出量 该系统的输入量为给定电压  $U_g$ , 输出量为电动机的转速  $n$ 。

(2) 编写各环节的方程式

1) 比较和放大环节是由图 2-5 中的比例调节器组成。取  $R_1 = R_2$ , 该比例调节器的输出  $u_k$  和输入  $U_g$ 、转速反馈信号  $u_f$  之间的关系为

$$u_k = K_1 (U_g - u_f) \quad (2-11)$$

式中  $K_1 = \frac{R_3}{R_1}$ ——比例调节器的比例系数。

2) 功率放大环节是晶闸管整流装置,其输入量是  $u_k$ , 输出量是整流电压  $u_d$ , 当不计晶闸管整流电路的时间滞后和非线性因素时,二者间的关系为

$$u_d = K_s u_k \quad (2-12)$$

式中  $K_s$ ——整流装置电压放大系数。

3) 控制对象是直流电动机。由式(2-8)可知,电枢电压  $u_d$  和电动机的转速  $n$  之间的关系为

$$T_d T_m \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d}{C_e} \quad (2-13)$$

式中  $T_d = \frac{L_s + L_d}{R_\Sigma}$ , 其中  $L_s$  为晶闸管整流电路的电感,  $R_\Sigma$  为包括电动机电枢电阻和整流电路等效电阻的总电阻;

$$T_m = \frac{GD^2 R_\Sigma}{375 C_e C_m}$$



## 4) 反馈环节

$$u_f = K_f n \quad (2-14)$$

式中  $K_f$ ——反馈电压和转速之间的比例系数。

(3) 消去中间变量 消去中间变量  $u_k$ 、 $u_d$ 、 $u_f$  得

$$T_d T_m \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = \frac{(U_g - K_f n) K_1 K_s}{C_e}$$

整理后得

$$\frac{T_d T_m}{\left(1 + \frac{K_1 K_s K_f}{C_e}\right)} \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{T_m}{\left(1 + \frac{K_1 K_s K_f}{C_e}\right)} \frac{dn}{dt} + n = \frac{K_1 K_s}{\left(1 + \frac{K_1 K_s K_f}{C_e}\right)} U_g$$

令  $K_r = K_1 K_s$  为正向通道电压放大系数,  $K_k = \frac{K_1 K_s K_f}{C_e}$  为系统开环放大系数, 可得闭环系统的微分方程式

$$\frac{T_d T_m}{1 + K_k} \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{T_m}{1 + K_k} \frac{dn}{dt} + n = \frac{K_r}{(1 + K_k) C_e} U_g$$

(4) 系统静态方程式 当系统处于稳态时, 转速的各阶导数皆为零, 即  $d^2 n/dt^2 = 0$ ,  $dn/dt = 0$ , 则稳态时的转速为

$$n = \frac{K_r}{(1 + K_k) C_e} U_g$$

## 第二节 非线性数学模型的线性化

在建立控制系统的数学模型时, 常常会遇到非线性问题。严格地说实际的物理系统都包含不同程度的非线性因素, 而求解非线性微分方程非常困难, 对于大部分非线性系统来说, 是在一定的条件下可近似地视作线性系统的, 这种有条件地把非线性数学模型化为线性数学模型来处理的方法, 称为非线性数学模型的线性化。对于具有非线性特性的系统来说, 如果在一定条件下, 通过近似处理, 能够将线性系统的理论和方法用于非线性系统, 就会使问题简化, 给控制系统的研究工作带来很大的方便。因此, 非线性系统线性化处理的方法也是工程实践中的一种常见的、比较有效的方法。

以图 2-6 所示发电机励磁特性为例, 图中的 A 点为发电机稳定状态励磁的工作点, 励磁电流和发电机电压分别为  $I_{f0}$  和  $U_{f0}$ , 当励磁电流改变时, 发电机电压  $u_f$  沿着励磁曲线变化。由图 2-6 可知,

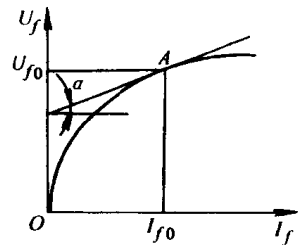


图 2-6 发电机励磁特性

$u_f$  与  $i_f$  变化不成比例, 也就是说  $u_f$  和  $i_f$  之间呈非线性关系, 但是, 如果  $i_f$  仅在 A 点附近作微小的变化, 那么我们就可以近似地认为  $u_f$  是沿着励磁曲线上 A 点的切线变化, 励磁特性即可用切线这一直线来代替, 即变化的增量

$$\Delta U_f = \Delta I_f \tan \alpha \quad (2-15)$$

这样就把非线性问题线性化了。

由数学的级数理论可知, 若非线性函数在给定区域内有各阶导数存在, 便可在工作点的