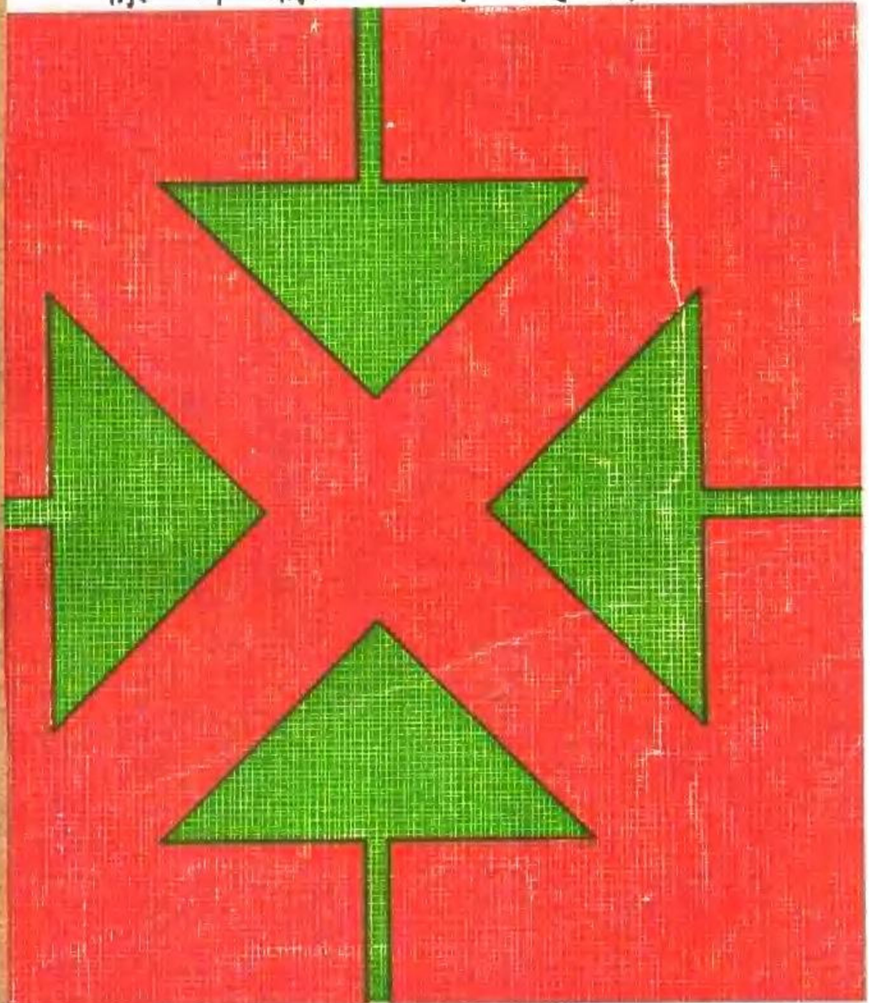
向量

編著者

徐輝標　陳茂傑



東華書局印行

向量

徐輝標 陳茂傑

合著

東華書局印行

中華民國六十二年十月 初 版
中華民國六十八年四月 三 版

向　量

定價 新臺幣二十五元整
(外埠酌加運費滙費)

著　者　陳茂傑　徐輝標

發行人　卓　鑫　淼
出版者　臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470　郵撥：6481
印刷者　中臺印刷廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證　局版臺業字第零柒貳伍號
(62030)

序　文

本書所含內容爲向量之最基本材料，其目的在於幫助高級中學及大學一年級之初學者掌握向量之基本觀念及運算技巧。除可作爲敎科書外，本書所列爲數甚多之例題及習題，望能有助於讀者自修之用。

著者等對東華書局卓鑫淼先生對於編著本書之建議與鼓勵之忱，謹致謝意。

徐輝標
陳茂傑

1973年　於維恩州立大學，密西根
國立淸華大學，新竹

目　次

第一章

向量之基本運算

1-1　純量與向量

在物理量之中，如質量、時間、或溫度等只有**大小**而不具方向之**量**，稱爲**純量**(scalar)。純量通常以一數字代表之。

在物理量之中，如位移、力、動量、速度等**同時具有方向**和**大小**的**量**，稱爲**向量**（vector)。向量之書寫符號通常在一羅馬字母之上加一箭號表示之，如$\overrightarrow{A}$。本書將以粗體字代表向量，如$\boldsymbol{A}$。

如以作圖方法表示，向量係以一**有向線段** $\overrightarrow{PQ}$ 表示之，如圖1-1所示。向量$\boldsymbol{A}$的**方向**係自P指向Q。P點稱爲向量$\boldsymbol{A}$的**起點**，而Q點則爲**終點**。線段的長度$|\overrightarrow{PQ}|$代表$\boldsymbol{A}$的**大小**，通常以A或$|\boldsymbol{A}|$表示之。

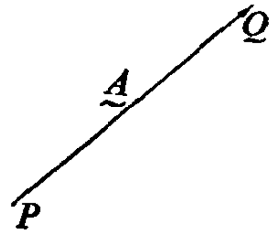


圖 1-1　向量之圖示

若一向量之起點固定在空間某一位置，則稱該向量爲一固定向量；如向量之起點並不固定在空間之某一特定位置，則稱該向量爲一非**固定向量**或**自由向量**。本書所述各向量，除非特別註明，均屬非固定向量。

如圖 1-1 之P點和Q點重合，則該向量稱爲**零向量**，以$\boldsymbol{O}$表示之。零向量之大小爲零，而方向則不定。

若兩個非固定向量$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$之大小相等，方向相同，如圖 1-2 所示，則該二向量**相等**，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}。\tag{1-1}$$

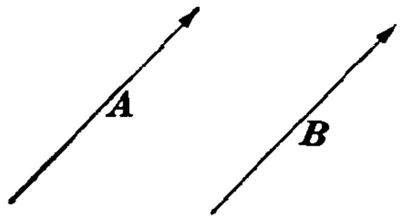


圖 1-2 相等之向量

注意：上述之相等並不意謂該二相等之向量在空間重合；同時，(1-1) 之等式亦不適用於固定向量。

由上述之討論，可得如下之結論：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \text{ 意指 } \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}。 \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \text{ 及 } \boldsymbol{B}=\boldsymbol{C} \text{ 意指 } \boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}。 \tag{1-3}$$

1-2 向量和純量之乘法

設 $\boldsymbol{A}$ 爲任一向量，m 爲任一純量，則向量 $m\boldsymbol{A}$（如圖 1-3 所示）可作如下之闡釋：

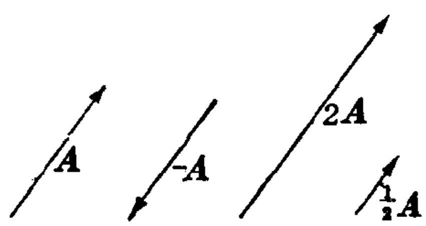


圖 1-3 向量被乘以純量

(1) $m\boldsymbol{A}$ 的大小等於 $|m||\boldsymbol{A}|$：$|m\boldsymbol{A}|=|m||\boldsymbol{A}|$。

(2) 若 $m>0$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，則 $m\boldsymbol{A}$ 之方向與 $\boldsymbol{A}$ 相同。

(3) 若 $m<0$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，則 $m\boldsymbol{A}$ 之方向與 $\boldsymbol{A}$ 相反。

(4) 若 $m=0$，或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，則 $m\boldsymbol{A}$ 等於 $\boldsymbol{O}$：$m\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$。

因此，兩個非零向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 互相平行（即 $\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B}$）之充要條件爲

$$\boldsymbol{B}=m\boldsymbol{A} \text{ 或 } \boldsymbol{A}=n\boldsymbol{B} \tag{1-4}$$

其中m及n爲純量。

若 $m=-1$，吾人得負的向量$\boldsymbol{A}$：$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}$；該向量之大小與$\boldsymbol{A}$相等，但方向與$\boldsymbol{A}$相反。

若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，且 $m=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{A}$，則吾人得一單位向量(unit vector)

$$\boldsymbol{e}_A=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}, \qquad (1\text{-}5)$$

該向量之大小 $|\boldsymbol{e}_A|=1$，方向則與$\boldsymbol{A}$相同。易言之，任一向量$\boldsymbol{A}$可以其長度與其單位向量之積表示之：

$$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{e}_A。 \qquad (1\text{-}6)$$

1-3 向量之加法與減法

設有向量$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$，該二向量之和

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \qquad (1\text{-}7)$$

爲另一向量，可以下列步驟求得；將$\boldsymbol{B}$之起點置於$\boldsymbol{A}$之終點，則自$\boldsymbol{A}$之起點至$\boldsymbol{B}$之終點所作之向量即爲$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$之向量和（見圖1-4），稱爲合向量。

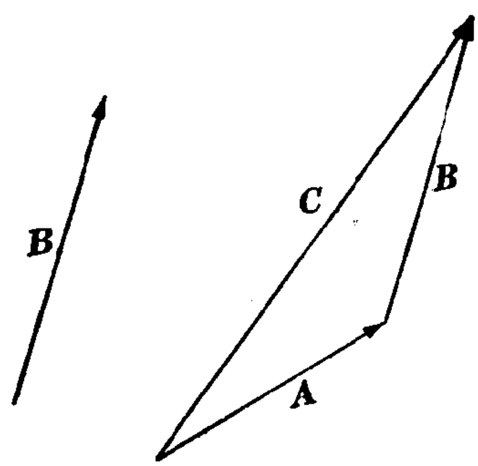


圖 1-4 向量相加

如圖 1-5 所示，兩向量$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$之差（$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$）事實上即爲$\boldsymbol{A}$與（$-\boldsymbol{B}$）之和：

$$C=A-B=A+(-B) \tag{1-8}$$

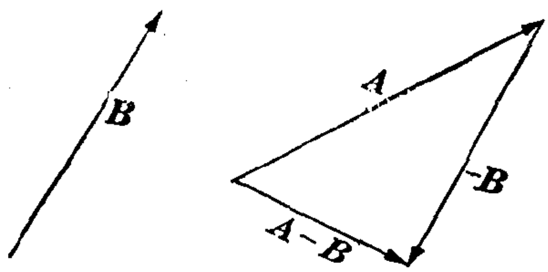


圖 1-5 向量相減

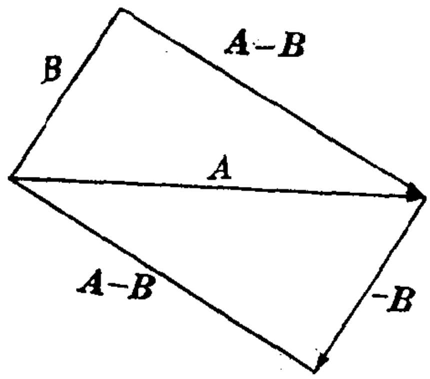


圖 1-6 向量相減

若向量$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$有一共同起點，則自$\boldsymbol{B}$之終點至$\boldsymbol{A}$之終點所作之向量即爲$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，如圖 1-6 所示。

向量之加法有如下之幾點性質:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \quad \text{〔交換律〕} \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \quad \text{〔結合律〕} \tag{1-10}$$

$$m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B} \quad \text{〔分配律〕} \tag{1-11}$$

$$(m+n)\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B} \quad \text{〔純量分配律〕} \tag{1-12}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A} \tag{1-13}$$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O} \text{ 或 } \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O} \tag{1-14}$$

例題 1-1 試證 (1-9) 式。

解: 設 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 爲二向量，如圖 1-7 所示，則

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR},$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{PR}。$$

故　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$。

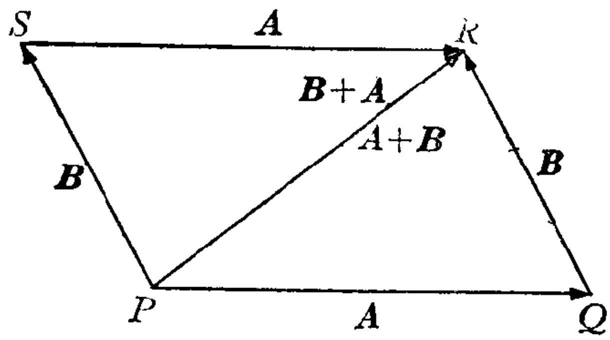


圖 1-7　向量加法之交換律

例題 1-2　試證 (1-10) 式。

解: 作一多邊形 $PQRS$, 其邊順次代表向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 及 $\boldsymbol{C}$, 如圖 1-8 所示。則

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}.$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\overrightarrow{PR}+\boldsymbol{C}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}。$$

故　$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$。

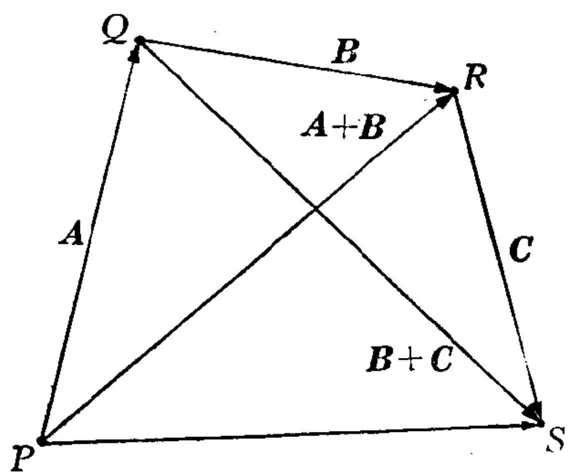


圖 1-8　向量加法之結合律

例題 1-3　設 O, Q, 及 P 爲空間之三點, 並設 R 爲 PQ 之中點。若 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{A}$, $\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{B}$, $\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{C}$, 試證

$$C=\frac{1}{2}(A+B) \tag{1-15}$$

解：由圖 1-9 得 $C=B+\overrightarrow{QR}$。

又，參閱圖 1-6 得 $\overrightarrow{QP}=A-B$。

因 $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QP}$

$$=\frac{1}{2}(A-B),$$

故 $C=B+\overrightarrow{QR}$

$$=B+\frac{1}{2}(A-B)$$

$$=\frac{1}{2}(A+B)。$$

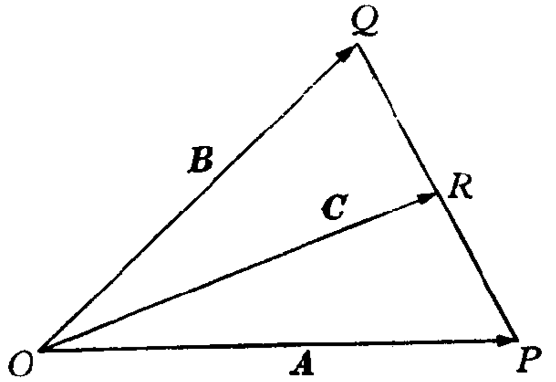


圖 1-9 向量加法律之運用

例題 1-4 設 A 及 B 爲任意二個非零、非平行向量，並設 C 爲在 A, B所決定之平面上之任一向量。試證 C 可以 A 及 B 之線型組合表示之；亦卽

$$C=mA+nB,$$

其中m及n爲唯一的一組純量。

解：因 A 與 B 不平行，故有一以 C 爲對角線，其邊分別平行於A及 B 之平行四邊形存在，如圖 1-10 所示。故

$$C=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}。$$

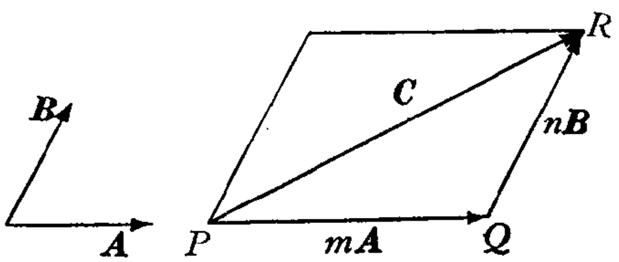


圖 1-10 例題 1-4 之解

因 $\overrightarrow{PQ}\parallel A$, $\overrightarrow{QR}\parallel B$，故知有純量$m$及$n$存在，可使

$$\overrightarrow{PQ}=mA,\quad \overrightarrow{QR}=nB。$$

因此，　　$\boldsymbol{C}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}$。

為求證m及n為唯一的一組純量，試假設另有一組純量m'及n'存在，可使

$$\boldsymbol{C}=m'\boldsymbol{A}+n'\boldsymbol{B}。$$

上兩式相減，得

$$(m-m')\boldsymbol{A}+(n-n')\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O},$$

即　　$(m-m')\boldsymbol{A}=(n'-n)\boldsymbol{B}$。

但因 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 為非零、非平行向量，故必 $m-m'=0$, $n'-n=0$。否則，上式等號兩邊可各除以 $m-m'$ 或 $n'-n$ 而得 $\boldsymbol{B}=x\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}=y\boldsymbol{B}$，由 (1-4) 式可知 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 必平行。因此，$m=m'$, $n=n'$。

例題 1-5　設 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 及 $\boldsymbol{C}$ 為任意三個非零、非平行、非共平面之向量，並設 $\boldsymbol{D}$ 為空間之任一其他向量。試證 $\boldsymbol{D}$ 可以$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，及$\boldsymbol{C}$之線型組合表示之；亦即

$$\boldsymbol{D}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}+l\boldsymbol{C}, \tag{1-17}$$

其中m，n及l為三個唯一的一組純量。

解：因$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，及$\boldsymbol{C}$為三個非零、非平行、非共平面之向量，故有一以$\boldsymbol{D}$為對角線，而其邊分別平行於$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，及$\boldsymbol{C}$之平行六面體存在，如圖1-11所示。故知有一組純量m，n，及l可使

$$\boldsymbol{D}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}+l\boldsymbol{C}。$$

為求證m, n, 及l為唯一的一組純量，試假設另有一組純量m'、n'、及l'存在，可使

$$\boldsymbol{D}=m'\boldsymbol{A}+n'\boldsymbol{B}+l'\boldsymbol{C}。$$

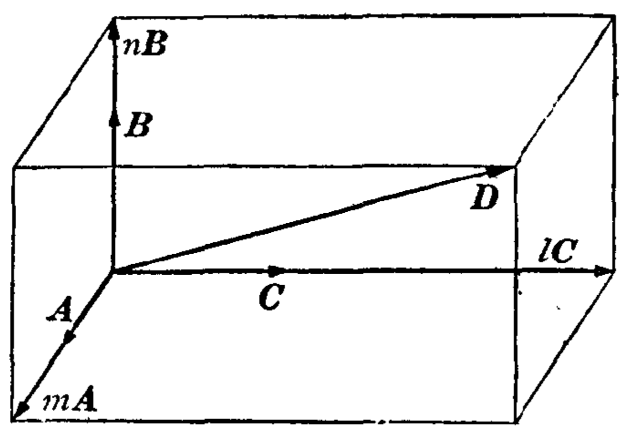


圖 1-11　例題 1-5 之解

上兩式相減，得

$$(m-m')\boldsymbol{A}+(n-n')\boldsymbol{B}+(l-l')\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O},$$

即 $(m-m')A=(n'-n)B+(l'-l)C$。

上式等號左邊爲一平行於 A 之向量，等號右邊爲一平行於 B，C 所決定之平面之向量。因 A，B，及 C 爲非零、非平行、非共平面之向量，故 $(m-m')A=O$，得 $m=m'$。同理，$n=n'$，$l=l'$。

就大體而論，在 n 個向量 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 之中，假如至少有一向量可以其他 $(n-1)$ 向量之線型組合表示之，則該 n 向量彼此**線性相依** (linearly dependent)。如無任一向量可以其他向量之線型組合表示之，則該 n 向量彼此**線性獨立** (linearly independent)。因此，n 個向量 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 彼此線性相依若且唯若下列關係存在：

$$m_1A_1+m_2A_2+\cdots,\ +m_nA_n=O, \tag{1-18}$$

其中 $m_i(i=1,2\cdots,\ n)$ 爲純量，且不均爲零。

1-4 向量之內積

兩向量 A 與 B 之內積 (inner product, 或 scalar product, 或 dot product) $A\cdot B$ 爲一純量：

$$A\cdot B=|A|\,|B|\cos\theta=AB\cos\theta, \tag{1-19}$$

其中 θ 爲 A 與 B 之夾角，且 $0\leq\theta\leq\pi$。(見圖 1-12)

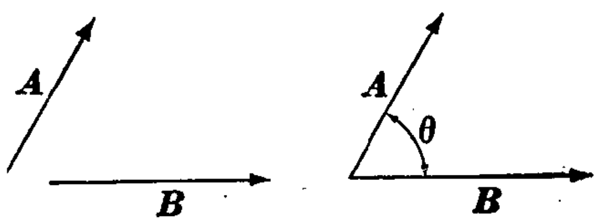


圖 1-12　A 與 B 之夾角

假設$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$均不爲零向量，則由（1-19）式得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB}, \tag{1-20}$$

卽

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB}\right) \tag{1-21}$$

一向量$\boldsymbol{A}$投射至另一向量$\boldsymbol{B}$所得之射影（projection）$\text{proj}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}$ 爲另一向量

$$\text{proj}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}=(A\cos\theta)\boldsymbol{e}_B, \tag{1-22}$$

其中θ爲$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$之夾角，$\boldsymbol{e}_B=\frac{1}{B}\boldsymbol{B}$ 爲一沿$\boldsymbol{B}$向量之單位向量。（見圖 1-13。）

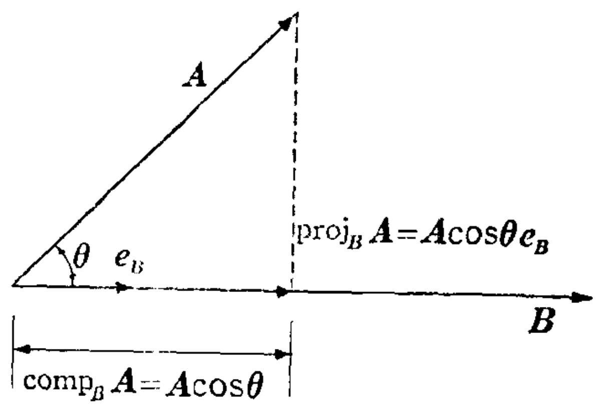


圖 1-13　向量之分量與射影

一向量$\boldsymbol{A}$沿另一非零向量$\boldsymbol{B}$之分量 $\text{comp}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}$ 爲一純量

$$\text{comp}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}=A\cos\theta=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_B, \tag{1-23}$$

其中θ爲$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$之夾角。（見圖 1-13。）

向量內積（1-19）式可以向量之分量表示如下：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A\,\text{comp}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}=B\,\text{comp}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}。 \tag{1-24}$$

向量之內積具有下列各性質：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \qquad \text{〔交換律〕} \qquad (1\text{-}25)$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \qquad \text{〔分配律〕} \qquad (1\text{-}26)$$

$$(m\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot(m\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \qquad (1\text{-}27)$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2=A^2, \qquad (1\text{-}28)$$

其中m爲一任意純量。

例題 1-6 試證向量內積之交換律（1-25）式。

解: 由向量內積之定義，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta=BA\cos\theta=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}。$$

例題 1-7 試證向量內積之分配律（1-26）式。

解: 由圖 1-14 知

$$PR=RQ+QR,$$

亦卽 $$\text{comp}_A(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\text{comp}_A\boldsymbol{B}+\text{comp}_A\boldsymbol{C}。 \qquad (1\text{-}29)$$

設 $\boldsymbol{e}_A$ 爲一與$\boldsymbol{A}$同指向之單位向量，則依向量之分量之定義（1-23）式，（1-29）式可寫爲

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{e}_A=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_A+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{e}_A。$$

上式等號兩邊各乘以A並利用（1-27）式，得

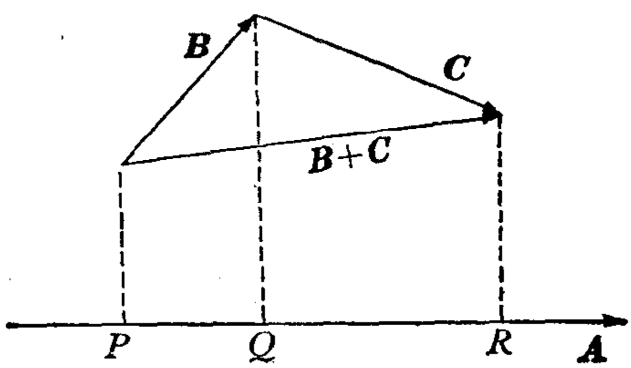


圖 1-14 向量內積之分配律的證明

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot A\boldsymbol{e}_A=\boldsymbol{B}\cdot A\boldsymbol{e}_A+\boldsymbol{C}\cdot A\boldsymbol{e}_A。$$

又因 $\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{e}_A$，故

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}。$$

利用向量內積之交換律（1-25）式，即得

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}。$$

例題 1-8　試證（1-28）式。

解　設 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，則 $\cos\theta=\cos 0=1$。由向量內積之定義（1-19）式，得

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2=A^2。$$

若向量$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$之夾角θ等於 90°，則該二向量互相**垂直**或**正交**(orthogonal)（記爲 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$）。因向量$\boldsymbol{O}$之方向不定，故可認爲向量$\boldsymbol{O}$垂直於任意向量$\boldsymbol{A}$。

例題 1-9　試證$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$垂直之充要條件爲 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$。

解: 因　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta=0$，故知或 $\cos\theta=0$，即 $\theta=\pi/2$ 或 $A=|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $B=|\boldsymbol{B}|=0$。

若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，則 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 即表示 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$。

因$\boldsymbol{O}$向量之方向不定，故可認爲垂直於任一向量。

例題 1-10　設 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$，且 $\boldsymbol{A}_1\parallel\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}_2\perp\boldsymbol{B}$，試證

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{B^2}\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{B^2}\boldsymbol{B}。$$

（見圖 1-15）

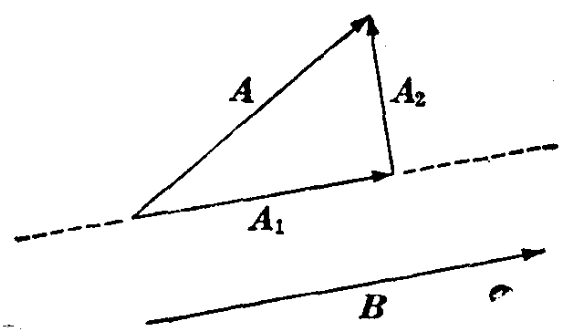


圖 1-15　例題 1-10 之圖

解:

因 $\boldsymbol{A}_1\parallel\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}_1=m\boldsymbol{B}$。

又 $\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}=m\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}=mB^2$。

因 $\boldsymbol{A}_2\perp\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}=0$。

因此，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}=mB^2,$$

$$m=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{B^2}。$$

故 $$\boldsymbol{A}_1=m\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{B^2}\boldsymbol{B},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_2&=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_1\\&=\boldsymbol{A}-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{B^2}\boldsymbol{B}。\end{aligned}$$

例題 1-11 設 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，試求 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 是否成立？

解： 因 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，

故 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0$。

由上式得 或 $\boldsymbol{A}\perp(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$，或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

因此，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 並不一定意指 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

設一三角形之三邊各長 $|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|$，及 $|\boldsymbol{C}|$，並設長度爲 $|\boldsymbol{C}|$ 之邊的對應角爲 θ，則

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\theta。\qquad(1-30)$$

此爲三角形之餘弦定律。

例題 1-12 試證 (1-30) 式。

解： 由圖 1-16，得

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}。$$

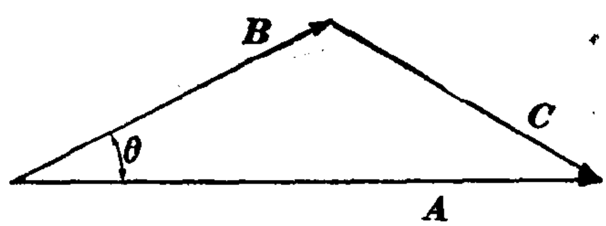


圖 1-16 三角形餘弦定律之證明

因 $$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}&=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\\&=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\end{aligned}$$