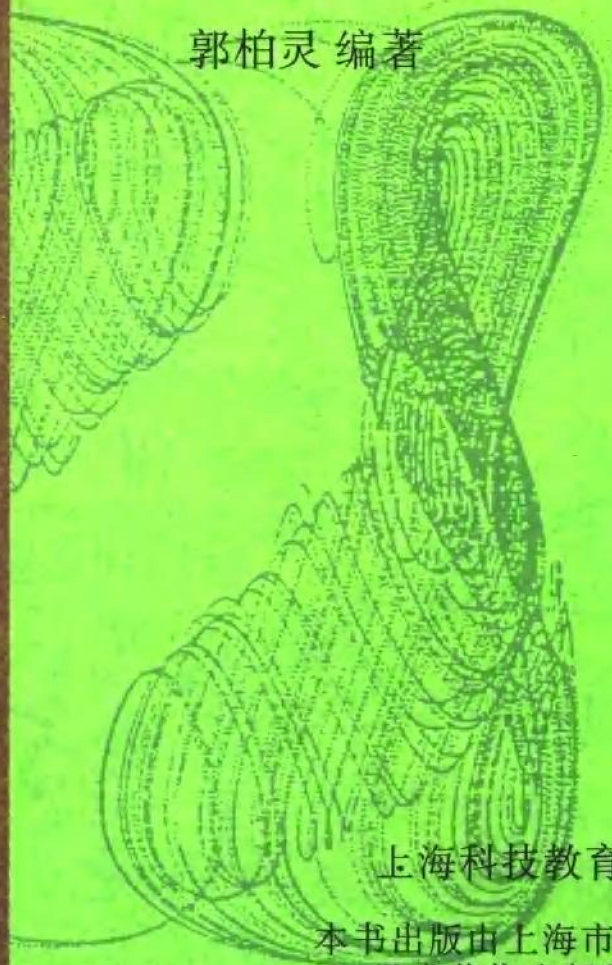


● 非线性科学丛书 ●

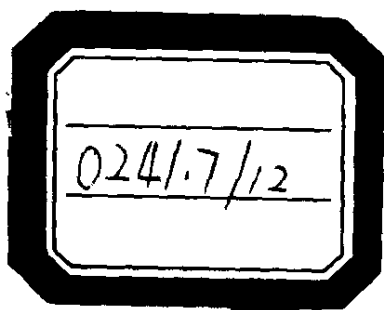
非线性演化方程

郭柏灵 编著



上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助



1736041

非线性科学丛书

非线性演化方程

郭柏灵 编著

蒲富恪 李邦河 审阅

2011/09/06



上海科技教育出版社



B1029230

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”中的一种。介绍非线性演化方程的物理背景、研究方法和已取得的一些结果,包括一些最新的结果。最后还介绍了无穷维动力系统。非线性演化方程的内容非常丰富,本书计为五章,基本上还属于介绍性的,读者可从中对这一研究领域有一个较好的了解。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由蒲富恪、李邦河审阅。

非线性科学丛书

非线性演化方程

郭柏灵 编著

蒲富恪 李邦河 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路193号)

各地新华书店经销

上海市印刷十二厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 12.75 字数 329,000

1995年9月第1版 1995年9月第1次印刷

印数 1—3000 本

ISBN7-5423-1073-1/O·54 定价: (精装本)18.70 元

5911107106

Advanced Series in Nonlinear Science

Nonlinear Evolution Equations

Guo Boling

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

P. O. Box 8009, Beijing, 100088, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1995

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：（按姓氏笔画为序）

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中，非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧。诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

随着近代物理对孤立子和混沌问题的研究,不断地涌现出一大批具有非线性色散或耗散的崭新的非线性演化方程,其中包括具有孤立子解的 KdV 方程、非线性薛定谔方程、正弦-戈登方程、萨哈罗夫方程、朗道-利弗席茨方程、布森内斯克方程等,呈现紊流、混沌现象的纳维-斯托克斯方程、牛顿-布森内斯克方程,具耗散和阻尼的非线性薛定谔方程、萨哈罗夫方程等.这些方程和物理问题紧密相连,其研究内容也在不断地丰富和发展.例如,除了经典解的存在性、唯一性、正则性外,还研究它的长时间行态,其中包括解随空间和时间的衰减性、散射性、稳定性以及有限时间内可能的破裂性(坍塌).目前对这些问题的研究已有大量的很好的工作,并已逐渐形成许多独特的估计方法.

本书旨在让读者了解这些非线性演化方程物理背景的基础上,用比较简单明了、深入浅出的方法和尽量少的篇幅,来介绍当前研究这些方程的典型方法、感兴趣的研究内容以及所得到的一些重要的新结果.对于无穷维动力系统,主要介绍整体吸引子、惯性流形、近似惯性流形、惯性集、非线性伽辽金方法等基本概念和研究方法,以便读者对无穷维动力系统的概貌有一个粗略的、但又是清晰的了解.

非线性演化方程的研究内容十分丰富和非常广泛,各种研究方法和结果层出不穷;而无穷维动力系统的研究目前正处于发展阶段.限于作者现有的水平和能力,本书难免存在许多不妥,不够全面,甚至错误.敬请读者给予批评和指正.

最后,我要衷心感谢蒲富恪教授、郝柏林教授和李邦河教授,

他们对本书的出版给予热情的支持和帮助，并提出了许多宝贵的意见。

郭 柏 灵

1993年3月15日于北京

Abstract

Start from the practical problems in physics and mechanics, the global existence, asymptotic behaviors as $t \rightarrow \infty$ and $|x| \rightarrow \infty$ and the scattering properties for the solutions of some nonlinear evolution equations are introduced. The basic notions of infinite dimensional dynamical systems are also briefly touched. Readership includes graduate students, postdoctoral fellows and practitioners in mathematical and physical sciences.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前言

第 1 章	某些非线性演化方程的物理背景	1
§ 1	KdV 方程和弱非线性作用下的波动方程	2
§ 2	萨哈罗夫方程和等离子体的孤立子	10
§ 3	朗道-利弗席茨方程和磁化运动	20
§ 4	布森内斯克方程和户田晶格, 布恩-英菲尔德方程	23
§ 5	二维 K-P 方程	27
第 2 章	某些非线性演化方程的定性研究	30
§ 6	非线性薛定谔方程初边值问题的光滑解	31
§ 7	广义朗道-利弗席茨方程初边值问题弱解的存在性	35
§ 8	广义 KdV 方程当 $t \rightarrow \infty$ 时解的渐近状态	44
§ 9	纳维-斯托克斯方程弱解的 L_2 衰减估计	62
§ 10	非线性薛定谔方程柯西问题的解的破裂现象	74
§ 11	某些半线性抛物型、双曲型方程解的破裂问题	80
§ 12	本杰明-小野方程某些弱解的光滑性	96
第 3 章	某些非线性演化方程研究的新结果	109
§ 13	非线性波动方程和非线性薛定谔方程	109
§ 14	KdV 方程等	125
§ 15	朗道-利弗席茨方程	137
第 4 章	某些非线性演化方程的相似解和潘勒韦性质	146
§ 16	古典无穷小变换	147

§ 17	无穷小算子的李代数结构	162
§ 18	非经典的无穷小变换	165
§ 19	求相似解的一种直接方法	169
§ 20	某些偏微分方程的潘勒韦性质	180
第 5 章	无穷维动力系统	183
§ 21	无穷维动力系统	189
§ 22	无穷维动力系统的某些问题	193
§ 23	整体吸引子及其豪斯多夫、分形维数估计	202
§ 24	具弱阻尼的 KdV 方程的整体吸引子及其豪斯 多夫维数估计	213
§ 25	具弱阻尼的非线性薛定谔方程的整体吸引子及 其豪斯多夫维数的估计	225
§ 26	具阻尼的非线性波动方程整体吸引子及其豪斯 多夫维数、分形维数估计	249
§ 27	一类非线性演化方程的惯性流形	282
§ 28	近似惯性流形	302
§ 29	非线性伽辽金方法	313
§ 30	惯性集	343
附录 A	基本符号和函数空间	367
附录 B	索伯列夫嵌入定理和内插公式	370
附录 C	不动点原理	373
参考文献		377

Contents

Preface

Chapter 1 Physical Backgrounds for Some Non-linear Evolution Equations.....	1
§ 1 The Wave Equation under Weak Nonlinear Action and KdV Equation.....	2
§ 2 Sakharov Equation and the Solitons in Plasma ...	10
§ 3 Landau-Lifshitz Equation and the Magnetized Motion	20
§ 4 Boussinesq Equation, Toda Lattice and Born-Infeld Equation	23
§ 5 2D K-P Equation	27
Chapter 2 The Properties of the Solutions for Some Nonlinear Evolution Equations	30
§ 6 The Smooth Solution for the Initial-Boundary Value Problem of Nonlinear Schrodinger Equations	31
§ 7 The Existence of the Weak Solution for the Initial-Boundary Value Problems of Generalized Landau-Lifshitz Equations	35
§ 8 The Large Time Behavior for Generalized KdV Equations.....	44
§ 9 The Decay Estimates for the Weak Solution of Navier-Stokes Equations	62
§ 10 The "Blowing Up" Phenomenon for the Cauchy Problem of Nonlinear Schrodinger Equations.....	74

§ 11	The “Blow Up” Problem for the Solutions of Some Semi-linear and Hyperbolic Equations	80
§ 12	The Smoothness of the Weak Solutions for Benjamin-Ono Equations.....	96
Chapter 3 New Results for the Studies of Some Nonlinear Evolution Equations.....		109
§ 13	Nonlinear Wave Equations and Nonlinear Schrodinger Equations	109
§ 14	KdV Equations.....	125
§ 15	Landau-Lifshitz Equations	137
Chapter 4 Similarity Solution and the Painleve Property for Some Nonlinear Evolution Equations		146
§ 16	Classical Infinitesimal Transformations	147
§ 17	Structure of Lie Algebra for Infinitesimal Operator	162
§ 18	Nonclassical Infinitesimal Transformations.....	165
§ 19	A Direct Method for Solving Similarity Solutions.....	169
§ 20	The Painleve Properties for Some PDE	180
Chapter 5 Infinite Dimensional Dynamical Systems		188
§ 21	Infinite Dimensional Dynamical Systems	189
§ 22	Some Problems for Infinite Dimensional Dynamical Systems	193
§ 23	Global Attractor and Its Hausdorff, Fractal Dimensions	202
§ 24	Global Attractor and the Bounds of Hausdorff Dimensions for Weak Damped KdV Equation...	213

§ 25	Global Attractor and the {Bounds of Hausdorff Dimensions for Weak Damped Nonlinear Schrodinger Equation.....	225
§ 26	Globl Attractor and the Bounds of Hausdorff, Fractal Dimensions for Damped Nonlinear Wave Equation.....	249
§ 27	Inertial Manifold for One Class of Nonlinear Evolution Equations	282
§ 28	Approximate Inertial Manifold.....	302
§ 29	Nonlinear Galerkin Method	313
§ 30	Inertial Set.....	343
Appendix A	Basic Notations and Functional Space	367
Appendix B	Sobolev's Embedding Theorems and Interpolation Formula	370
Appendix C	Fixed Point Argument	373
References		377

第1章

某些非线性演化方程的物理背景

早在1834年,英国著名科学家罗素(J. Scott, Russell)发现了孤立波现象.随着近代物理学和数学的发展,近二十多年来,人们对这一现象的兴趣与日俱增.现在,数值计算和理论分析均已证明,一大批非线性演化方程具有孤立子解.孤立波具有非常奇特的性质,它们在相互作用下保持稳定的波形,这颇类似于粒子碰撞的性质.据此,克鲁斯卡(Kruskal)和扎布斯基(N. J. Zabusky)将其命名为“孤立子”.孤立波不仅能在自然界中被观察到,现在,一些孤立波已能在实验室中产生.

随着孤立子问题研究的深入和发展,一大批具有孤立子解的非线性演化方程已在流体物理、固体物理、基本粒子物理、激光、等离子体物理、超导物理、凝聚态物理、生物物理等许多领域中出现.例如1895年由浅水波导出的KdV(科特韦格-德弗里斯)方程,又在离子声波、冷的等离子体磁流体波、非线性晶格等一系列问题中相继得到.这批具有孤立子解的非线性演化方程有:非线性薛定谔方程、正弦-戈登方程、朗道-利弗席茨方程、布森内斯克方程、二维卡多姆采夫-佩特维娅什维利方程等.这些方程具有许多共同的特征,例如:可用散射反演方法求解,存在贝克隆变换、达布变换,具有无穷多个守恒律和延长结构等.由于这些属于可积系统的非线性演化方程是和物理问题紧密相关的,本章将简要介绍某些重要方程的实际物理背景.这对于偏微分方程的定性研究是有帮助的.