陈强顺 编著

分析力学导论

同济大学出版社

$$\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha + I_\alpha)\delta q_\alpha = 0$$

$$A^S = \begin{bmatrix} A_1^S \\ A_2^S \\ \vdots \\ A_S^S \end{bmatrix}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + I_\alpha = 0$$

$$T = \dot{\xi}^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} A M \dot{\xi}$$

$$V = \xi^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} B M \xi$$

分析力学导论

陈强顺　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

全书共分七章，主要内容包括：分析力学形成前夕和初期的动力学方程及方法；拉格朗日动力学；多自由度力学体系的微振动；哈密顿动力学；正则变换；泊松括号与拉格朗日括号；哈密顿-雅可比方法等。每一部分内容都给出简明奏效的解题方法和步骤，提供同各部分内容紧密配合的各类习题（书中共举 62 道例题和配置 111 道习题）。可用作理科类本科生的教材或教学参考书，也可作为工科类研究生及从事分析动力学的研究人员和有关教师的参考书。

责任编辑　解明芳
封面设计　李志云

分 析 力 学 导 论
陈强顺　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路 1239 号）
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：10　字数：290 千字
1997 年 4 月第 1 版　1997 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—1000　　定价：19.00 元
ISBN 7－5608－1777－7/O·152

序　言

从学科的构成来看，分析力学是理论力学中两大体系——矢量力学和分析力学的重要组成之一。而理论力学又是理论物理学的一个分支，它同理论物理学的其他学科——电动力学、热力学、统计物理学、量子力学，构成一个既有相对独立性，又有相互依赖性的紧密联系的严谨的数学物理体系。

理论物理学是一门应用比较严密的数学方法来认识和研究物理世界的基础理论。理论力学则是理论物理学的入门学科和重要基础知识，也是许多工程技术应用科学的基础。

对力学问题的研究途径和处理方法不同，经典力学发展出两种不同的体系：其一为矢量力学（即牛顿力学）；其二为分析力学。理论力学的整个内容也就包括这两大体系。

矢量力学以矢量——力和加速度为着眼点，运用矢量几何图示和形象思维方法，以矢量形式建立力学的基本定律，解决力学问题。由于比较形象和直观，而且使用了比较基本的数学手段，因而便于理解和接受，从而利于普及。特别是对不太复杂的力学问题，应用矢量力学求解的方法，比较容易奏效。但是，牛顿运动定律是以质点为研究对象，在解决体系的动力学问题时，务必弄清各个质点所受的外力和内力的性质和大小，否则便不能建立各个质点的运动方程，也就无法对力学问题求解。尤其对于多约束的复杂力学体系，应用矢量力学的方法求解所遇到的困难和麻烦是不难想象的！

分析力学则以标量——功和能为基本概念，着眼于能量，运用数学分析和抽象思维方法，以分析数学的形式（其核心为采用变分形式的普遍原理和变分法）建立力学的基本定律，研究和求解力学体系的动力学问题。由于比较抽象难懂，而且使用了比较难的数学分析手

段，因此不易接受和较难理解，从而也就不便普及。不过，分析力学在解决力学体系的动力学问题时，不是以单个质点而是以力学体系的整体作为研究对象，正视体系所受的约束；但在特殊情况下，还可通过特别的途径，避免在方程内出现约束力，即使受有各种约束的复杂力学体系仍能得到有效的解决。这正是分析力学的优点之一。同时，因为它基于标量，从而便于作坐标变换；由于扩大了坐标的概念，引用了广义坐标，从而使它具有很大的灵活性和广泛的适应性；又鉴于它着眼于能量为基本概念，便于引入能量的量子化，为经典力学向现代物理学及理论物理学其他领域的过渡提供有效的工具。为此，分析力学被誉为由经典物理学通向现代物理学的“跳板”，沟通经典物理学发展到现代物理学的“桥梁”。

更为重要的是，由分析力学所建立和发展起来的拉格朗日—哈密顿—雅可比形式的基于能量—动量概念的理论和方法。这种以能量和动量为基本物理量对物质的运动和相互作用进行描绘的方法，称为能量表象。由经典物理学向现代物理学发展的进程，充分地显示出能量表象具有强大的生命力。

而由牛顿力学所建立和发展起来的基于力、加速度、质量为基本概念，将物体间的相互作用以力的形式予以描绘的方法，则称为力的表象。由经典物理学向现代物理学发展的进程，不断地暴露出力的表象用在新发展的领域里不仅仅遇到实际的不易克服的困难，而且存在着不可被逾越的障碍，甚至遭到被直接否定的厄运。

在经典力学的范围内，力的表象与能量表象原则上完全等价；但依现代物理学的发展来看，该两种表象并非等价。能量表象不仅可描绘实物的运动状态，又可描绘场的物质形式；而力的表象却无法恰当地描写电磁场本身的运动。在量子力学中广泛采用哈密顿形式和拉格朗日形式基于能量—动量为基本物理量的描写方法；而力的表象中的速度和加速度仅仅在可作经典近似（波包）时才有明确的意义，与加速度相关的力和质量的概念已失去了普遍性。从拉格朗日形式的能量表象出发，可成功地由时间的均匀性和空间的均匀性、各向同

性分别导出能量、线动量、角动量守恒定律（可参阅第二章§2-4节），当今的理论物理学甚至已发展到依照基本对称性确立对相互作用形式的描述；但力的表象对此则无能为力。能量表象可恰当地描述涉及粒子产生和湮灭的物理现象；而力的表象在这领域中却无所适从，甚至既无法解释氢原子里电子处于稳定的基态而不发生辐射，又无法解释激发态原子自发跃迁回基态同时放射具有确定频率的光子，更无法对基本粒子的衰变和其他反应作解释。在狭义相对论中，拉格朗日形式和哈密顿形式的能量表象在其中稳当地站住脚，从恰当形式的能量定理和动量定理出发，唯一正确地建立了狭义相对论的动力学理论；但力的表象中的力和质量已退化为从能量和动量导出的次级概念，力和质量已失去基本的重要性。1959年，阿哈罗诺夫和玻姆（Y. Aharonov and D. Bohn）首次提出一种想法，借以检验非零势的零场区域（矢势 $\boldsymbol{A}\neq0$ 而磁场 $\boldsymbol{B}=0$），对带电粒子的运动是否存在可观测到的量子干涉效应（称此为 A-B 效应：A-B effect），很快于次年，果然获得了实验的证实。A-B 效应直接证实了基于能量表象建立起来的矢势 $\boldsymbol{A}$ 才是具有基本重要性的场；而非基于力的表象建立起来的 $\boldsymbol{B}$ 矢量。相对论和量子力学诞生后，已面临困境的力的表象，又遭到新的沉重打击。时至今日，人们一致认为：欲能正确地描绘不断前进中的现代物理学已非能量表象所莫属了。可见，掌握和通晓分析力学的抽象思维和分析方法，对当今的一位科技工作者来说，是多么必要啊！

当然，分析力学作为一门学科也还在不断地发展着。例如，对非完整力学体系的研究仍在继续。特别是，随着现代数学的诞生和成熟，相应地已引起了数学物理及力学探讨方法的根本改革，“几何式”的探讨方法优越于分析方法的表述，超过用分析方法获得的描述结果，微分形式（differential form）和可微流形（differentiable manifold）的概念和理论，促成了力学内容和表述结构的重大变革。现代数学的抽象思维方法采用辛流形（symplectic manifold）的数学模型作为分析力学的研究对象（为此，也把分析力学称为辛力学），使

分析力学的繁琐推导和冗赘表述得以简化，并使人更易于理解和接受，而且还能给出明确简洁和紧凑的表式(参阅文献 27.和 28.)。

作者经长期深入摸索、积累、写就(书中还渗入作者有关研究成果)；并将部分内容对物理专业本科生作过授课试验为调研依据，对本书作了两次重点修订和最近一次全面的修改、增补、充实而形成的，前后经历约十年时间。其主要特点如下：

1. 本书内容的选取和编排，注意到兼顾系统性、科学性、导向性。全书各部分内容既有相对独立性又有不可分割的内在的紧密联系性，形成一个完整的系统；各个阶段的内容按照分析力学前后发展所形成的内在科学逻辑和相互依赖而编排的；此外，鉴于分析力学是一门基础理论学科，务必要求能够沟通和适应现代物理学科的发展，而按排有限的适当的能反映学科导向性的内容。

2. 兼顾对理论和方法的需求。全书给出了一个严密联系的和相互依存的分析力学体系，作者设法尽量做到论题鲜明，论证严谨，论理透彻，脉络清晰。不仅如此，作者还设法尽量能通过本书培养和提高读者分析问题和解决问题的能力。在阐明概念和理论之后，紧相随地给出简明凑效的解题方法和提供求实的解题步骤。利于原理和方法的统一，利于知识吸收和智能培养的统一，利于理论和实践的统一。

3. 兼顾内容的深度与广度的需求。全书对各章内容的论述达到了一定的深度，而且又全面顾及到分析力学基本内容的构成。书中形成的系统达到了必要的深度与广度的结合。

4. 便于读者进行自学，易于读者阅读、理解和接受。在叙述上，尽量做到层次分明，循序渐进，由简到繁，从易至难，以便读者的吸收消化。同时注意到举例典型，例题丰富，类型多样。各章末习题的编排，注意到概念和运算、推演训练的兼顾，习题易难程度兼顾，习题的数量和类型兼顾。全书共举出 62 道例题，配备 111 道习题，并随附习题答案。所有的种种努力，为的是利于读者掌握和运用本书的基本理论观点和提供的思维方法、思路、解题途径、分析、判断和解决问题。

5. 强调能量表象对物理学发展的重要作用和优越性，并把阐述能量表象的科学思维方法贯穿于全书的始末。

在写作本书的过程中，笔者得到多方同行们的鼓励、关心和支持，在此表示由衷感谢。因水平所限，书中难免存在缺点，盼能得到广大读者的批评指正。

陈强顺
1996 年 8 月
于同济大学

目　　录

序言 …… 1
第一章　广义坐标　力学方程 …… 1
§1-1　牛顿力学的局限性 …… 1
§1-2　自由度　广义坐标 …… 3
§1-3　约束　虚位移 …… 6
§1-4　理想约束　虚功原理 …… 13
§1-5　广义虚位移　广义虚功原理 …… 21
§1-6　达朗伯原理　达朗伯-拉格朗日方程 …… 30
§1-7　达朗伯-拉格朗日方程的广义形式 …… 39
习题 …… 47
第二章　拉格朗日动力学 …… 51
§2-1　第一类拉格朗日方程 …… 51
§2-2　第二类拉格朗日方程 …… 58
§2-3　能量积分　循环积分 …… 65
§2-4　空间的均匀性和各向同性所对应的守恒定律 …… 72
§2-5　第二类拉格朗日方程的应用举例 …… 76
§2-6　电磁场中带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数 …… 88
§2-7　狭义相对论中的拉格朗日函数和哈密顿函数 …… 95
习题 …… 97
第三章　多自由度力学体系的微振动　简正坐标 …… 101
§3-1　耦合谐振子的微振动 …… 101
§3-2　多自由度体系的微振动 …… 106
§3-3　怎样寻找简正坐标　简正振动微分方程 …… 121

§3-4 振动实验平台的微振动 …………………………… 144
§3-5 耦合谐振频率分布的对称性同原子光谱塞曼效应的对照 …………………………… 147
习题…………………………… 150
第四章 哈密顿动力学…………………………… 155
§4-1 力学规律表达形式的普遍化和正则化 …………………………… 155
§4-2 变分运算简介 欧拉方程 …………………………… 158
§4-3 力学的变分原理——哈密顿原理 …………………………… 165
§4-4 哈密顿正则方程 …………………………… 178
§4-5 最小作用量原理 最小作用量原理的雅可比形式 …………………………… 196
§4-6 相空间 刘维定理 …………………………… 206
§4-7 维里定理 …………………………… 209
习题…………………………… 212
第五章 正则变换…………………………… 214
§5-1 为什么要作正则变换 …………………………… 214
§5-2 正则变换 生成函数 …………………………… 216
§5-3 正则变换中生成函数的主要形式 …………………………… 227
习题…………………………… 237
第六章 泊松括号 拉格朗日括号…………………………… 240
§6-1 泊松括号的引进 …………………………… 240
§6-2 泊松括号的重要性质 …………………………… 242
§6-3 雅可比恒等式的推导 …………………………… 247
§6-4 泊松定理及其应用 …………………………… 248
§6-5 用拉格朗日括号、泊松括号判别正则变换…………………………… 252
§6-6 量子力学中的泊松括号简介 …………………………… 261
习题…………………………… 263
第七章 哈密顿-雅可比方法 …………………………… 265
§7-1 哈密顿-雅可比方法的产生 …………………………… 265

§7-2　哈密顿-雅可比方程　哈密顿主函数 ………………… 266
§7-3　雅可比定理 ………………………………………… 270
§7-4　应用哈密顿-雅可比方程解题的步骤及其示例 …… 273
§7-5　哈密顿特征函数　哈密顿-雅可比方程的修正形式
………………………………………………………… 276
§7-6　怎样求解哈密顿-雅可比方程的修正形式 ………… 281
§7-7　作用变量和角变量　周期运动的频率 …………… 289
§7-8　哈密顿-雅可比方法跨学科的应用举例 …………… 297
习题…………………………………………………………… 303
参考文献……………………………………………………… 306

第一章　广义坐标　力学方程

本章是学习分析力学(analytical mechanics)的基础。这里，将阐述牛顿力学在求解复杂力学问题时的局限性，阐明力学体系的自由度、广义坐标、约束、虚位移(等时变分)、虚功等基本概念，以及完整体系、广义力的概念；探讨分析力学形成前夕和初期所建立的力学基本方程：虚功原理、广义虚功原理、达朗伯原理、达朗伯-拉格朗日方程。于本章末还特别介绍了达朗伯-拉格朗日方程的广义形式，并相随引进了广义惯性力的概念。强调了达朗伯-拉格朗日方程及其广义形式是经典力学的最基本最普遍的方程。

§1-1　牛顿力学的局限性

各质点的运动状态相互联系相互制约，彼此存在相互作用的质点的集合，称为力学体系(mechanical system)。设有一个力学体系由 n 个质点所组成的，总可以找到一个适当的惯性参照系来描述该力学体系的运动状态。若该力学体系的第 i 个质点在所选定的坐标系中的位矢为 $\boldsymbol{r}_i$，依照牛顿第二运动定律，其运动微分方程则为

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-1}$$

式中 m_i 为第 i 个质点的质量，作用于质点上的合外力已被分离成两个部分：$\boldsymbol{F}_i$ 被叫做主动力(initiative force)；$\boldsymbol{R}_i$ 为约束力(constrained force)。简言之，$\boldsymbol{F}_i$ 表示作用于第 i 个质点上除约束力之外所有其他外力之矢量和；而 $\boldsymbol{R}_i$ 表示对第 i 个质点的空间位置或运动施加约束的作用力。

一般说来，通常作用于物体上的力分为两类：(1)接触力

(contact force)；(2)场力(field force)。前者是指直接施加于物体上的机械推力、拉力或压力；后者是指相距一定距离的物体通过场的传递而作用于物体上的力，如引力、电磁力以及其他性质的场力。接触力仅仅作用于物体的边界面上；而场力则遍布于整个物体的各个部位。约束力 $\boldsymbol{R}_i$ 因为同几何约束相关，故通常是接触力。而主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 或是接触力或是场力，也可能是两者兼而有之。

为了便于计算处理，常用笛卡尔直角坐标系的坐标值(x_i,y_i,z_i)表示第 i 个质点的空间位置，并把方程(1-1)式化为三个分量形式

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i=F_{ix}+R_{ix} \\ m_i\ddot{y}_i=F_{iy}+R_{iy} \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ m_i\ddot{z}_i=F_{iz}+R_{iz} \end{cases} \tag{1-2}$$

式中 F_{ix}和 R_{ix}，F_{iy}和 R_{iy}，F_{iz}和 R_{iz}分别为 $\boldsymbol{F}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_i$ 的 x 分量，y 分量，z 分量。

如果不存在约束，这时 $\boldsymbol{R}_i=0$，质点为自由质点(free particle)；主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 一般为质点位置、速度和时间的函数。于是由 n 个质点所组成的力学体系共有 $3n$ 个二阶运动微分方程。理论上虽说方程是可解的，但常常并非完全可积的。这是一类动力学问题。

另一类动力学问题，就是存在约束 $\boldsymbol{R}_i\neq0$ 的情况，质点为非自由质点(non-free particle)。譬如有 k 个约束，则力学体系的方程数目总共为$(3n+k)$个。其中 $3n$ 个为体系的运动微分方程，k 个为约束方程。牛顿建立的矢量力学是以单个质点作为研究对象的，当求解一个力学体系的动力学问题时，必须对体系中的每一个质点予以隔离并作出受力分析，写出每一个质点的动力学方程。于是，每多一个质点，体系就增多 3 个运动微分方程；每多一个约束就给力学体系增添一个约束方程。不难想象，要解出这么众多的方程绝非是轻而易举的！这就是矢量力学在解多质点多约束力学体系面临的难处。

到 18 世纪后半期，随着工业生产的进一步发展，各种机械构造和力学构造物设计的不断更新，伴随形形式式约束条件的出现，使力

学问题随之进一步复杂化。面临这一现实，应用矢量力学的方法求解，已让人们感到繁琐和难以适从。提出和创建这一类动力学问题的新解法，最初出现于1743年达朗伯完成的《动力论》专论中；而后于1788年拉格朗日在其《分析力学》专著中全面完整地阐述了这类动力学问题的解法。工业生产发展之需要，直接刺激和推动新的力学学科——分析力学的建立和发展。

§1-2 自由度 广义坐标

(一) 自由度(degree of freedom)

自由度是力学体系的一个重要性质，为描述一个力学体系的运动状态所需要的独立坐标的数目，称为该力学体系的自由度(注意：此说仅限于对完整约束的情况，容后细说)。

空间和时间是物质存在的基本形式。物质运动及其相互作用总是在空间和时间进程里进行的。一个质点在空间中的位置需用3个坐标才能完全确定。因而，由 n 个质点所组成的力学体系，总共需用 $3n$ 个坐标确定。可是，一般说来力学体系的空间位置和运动总要受到种种限制，即受到约束，于是其坐标必将被相应的约束方程联系和制约着，从而使其坐标并非都完全独立的。每增加一个约束，相应地出现一个约束方程，独立坐标的数目也随之相应地减少一个。所以，力学体系的自由度等于其坐标的总数减去约束方程的总数。

n 个质点组成的力学体系，若存在 k 个约束方程的话，则其自由度为

$$s=3n-k \tag{1-3}$$

例1-1 图1-1为一双摆，摆端上的两个质点，其质量分别为 m_1 和 m_2，两摆杆均为刚性轻杆，杆长分别为 l_1 和 l_2。试求该体系所受的约束及其自由度。设悬挂点 O 及两杆均用光滑铰链连结。

解：以悬挂点 O 为原点建立一直角坐标系 $Oxyz$。由于摆杆为刚

性轻杆，质量不计且不可伸缩，使得悬挂点 O 与质点 m_1，质点 m_1 与 m_2 间的距离在双摆运动过程中始终维持不变。这就是施加于体系之上的约束。对应的两个约束方程为

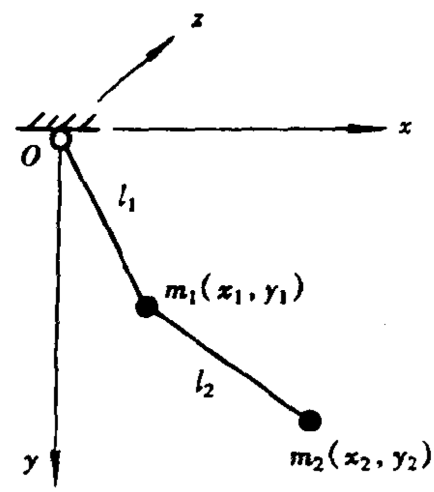

图 1-1

$$x_1^2+y_1^2-l_1^2=0$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l_2^2=0$$

体系只限作平面运动，其坐标分别为：$m_1(x_1,y_1)$；$m_2(x_2,y_2)$，坐标总数为 4。因而，体系自由度为

$$s=4-2=2$$

如果从空间坐标的角度来分析，体系二质点坐标分别为：$m_1(x_1,y_1,z_1)$；$m_2(x_2,y_2,z_2)$，总数 $3n=3\times2=6$。

但约束方程除了以上两个之外，鉴于双摆被限于在竖直平面内 xoy 坐标面上摆动，故还应计入另外两个约束方程：

$$z_1=0 \quad 和 \quad z_2=0$$

即从空间坐标的角度来看，约束方程总数 $k=4$，于是体系的自由度为

$$s=3n-k=6-4=2$$

可见，不管是从平面坐标还是从空间坐标的角度来分析，同一体系的自由度仍然一样。问题在于务必计入相应的坐标和约束方程。

（二）广义坐标(generalized coordinate)

我们可以选用各种形式的坐标系（例如笛卡尔直角坐标系，球坐标系，柱坐标系）来描述同一个力学体系的运动状态。当然，各种形式的坐标系之间存在着相应的变换关系。在矢量力学中，求解动力学问题时，用以表示体系内各质点的坐标往往并非独立的，因为各坐标之

间由施加于力学体系上的约束条件而相互联系和制约着。但在分析力学中则不同，为了简化动力学问题的求解，通常根据力学体系的自由度 s 来选取用以描述体系运动状态的坐标个数。循此要求，所选定的 s 个独立参数 $q_1,q_2,\cdots,q_s$，称为广义坐标。广义坐标可以是线量，也可以是角量，甚至其他物理量，但它们彼此间互为独立。

对于由 n 个质点组成的力学体系，当受到约束存在 k 个约束方程时，则体系的自由度 $s=3n-k$，可选定广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_s$，它们同体系的笛卡尔直角坐标（或球坐标，柱坐标）之间的变换关系可表为

$$\begin{cases} x_i=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_s,t) \\ y_i=y_i(q_1,q_2,\cdots,q_s,t) \quad (i=1,2,\cdots,n;s<3n) \\ z_i=z_i(q_1,q_2,\cdots,q_s,t) \end{cases} \tag{1-4}$$

式中圆括号中的 t 代表时间。一般地，体系的坐标为广义坐标和时间的函数。

究竟选取哪一组参数作为广义坐标，这是一个多少带有随意性的问题，原则上不受任何限制。不过，在实际处理问题过程中，如果把广义坐标选得合适的话，那就会在解题过程中避烦就简，或者能够引得好的结果，从此意义上看，选取什么广义坐标则必须要好好研究了。

例 1-2 讨论例 1-1 中的双摆，选取广义坐标，并写出广义坐标同双摆质点的直角坐标之间的变换关系。

解：在例 1-1 中已解得双摆体系具有 2 个自由度。为了描述该体系的运动状态，可选 2 个广义坐标。

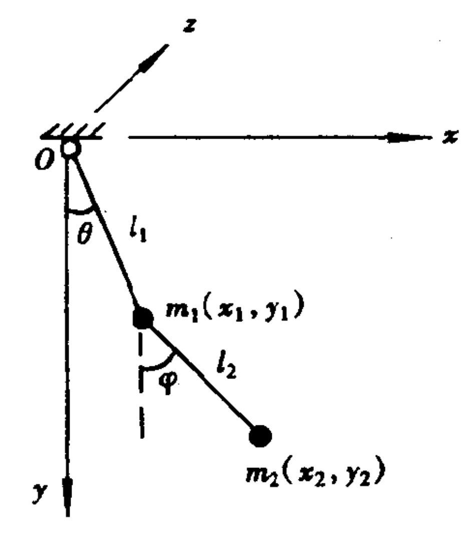

图 1-2

视图 1-2，若选取双摆的摆角 θ 和 φ 为广义坐标（角量），则体系的笛卡尔坐标同广义坐标之间的变换关系为

$$\begin{cases} x_1 = l_1\sin\theta \\ y_1 = l_1\cos\theta \\ x_2 = l_1\sin\theta + l_2\sin\varphi \\ y_2 = l_1\cos\theta + l_2\cos\varphi \end{cases}$$

若选取 x_1 和 x_2 为广义坐标，则变换关系为

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ y_1 = \sqrt{l_1^2 - x_1^2} \\ x_2 = x_2 \\ y_2 = \sqrt{l_1^2 - x_1^2} + \sqrt{l_2^2 - (x_2 - x_1)^2} \end{cases}$$

当然，还可以选取 y_1 和 y_2，或 x_1 和 φ，或 x_2 和 θ…为各组广义坐标。自由度确定之后，选取什么量作为广义坐标并不受限制的。但是，在这一组组参数中间，究竟取哪一组合适呢？倒是一个不容忽视的问题。因为若广义坐标选得不巧，解题就麻烦，事倍功半；相反，若把广义坐标选得合适，解题就简便，事半功倍，还可能得到较有意义的结果（如运动积分）。从这个意义上看，选取什么量作为广义坐标又决非随意的。

怎样选取较好的广义坐标，虽然没有一定的规则可循，但是经验说明描述转动和摆动的场合，选取角量为广义坐标较方便，例如本例取角量 θ 和 φ 作为广义坐标为宜；描述平动时，选取线量为广义坐标较方便。读者可通过解题实践，不断摸索并积累经验。

§1-3 约束 虚位移

（一）约束(constraint)

由 n 个质点组成的力学体系，当它的运动可以完全自由地进行，可以通过空间的任意位置（至于它的运动状态应由所受的作用力和起始条件决定），则该力学体系所含的质点为自由质点，力学体系称