全国高等教育自学考试指导丛书

GAODENGSHUXUEZIXUEKAOSHI

主审 高汝熹

高等数学（一）

自学考试指导与题解

YUTIJIE

主编 汤羡祥

东北财经大学出版社

全国高等教育自学考试指导丛书

高等数学(一)
自学考试指导与题解

主审　高汝熹
主编　汤羡祥

东北财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学(一)》学习指导与题解/汤羡祥主编. -大连:东北财经大学出版社,1998.9(1999.12重印)
(全国高等教育自学考试指导丛书)
ISBN 7-81044-327-5

Ⅰ.高… Ⅱ.汤… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第00944号

东北财经大学出版社出版
(大连市黑石礁尖山街217号 邮政编码 116025)
网 址:http://www.dufep.com.cn
读者信箱:dufep@mail.dlptt.ln.cn
大连印刷工业总厂印刷 东北财经大学出版社发行

开本:850×1168毫米 1/32 字数:285千字 印张:11 3/8
印数:18 001—28 000册
1998年9月第1版 1999年12月第3次印刷

责任编辑:郭 洁 栗方忠 责任校对:白 萱
封面设计:钟福建 版式设计:吴 伟

定价:16.80元

全国高等教育自学考试指导丛书

出版说明

“全国高等教育自学考试指导丛书”面世了。作为本套丛书的出版者，我们对广大自学考生有几点特别的说明。

一、本套丛书得以推出，首先得益于学校的优势。作为东北地区规模最大的财经高校，东北财经大学一直是本省经济管理类各专业的主考学校，拥有一批经验丰富而又治学严谨的自考辅导教师和为数极众的自考学生。我们处在这样一个环境之中，深切感受到了自学成才热潮的涌动，也体察到了自考学生对真正“高起点、高质量”的自考辅导书的需求。这是我们组织编写和出版本套书的最初动因。

二、本套丛书得以推出，还得益于作者的帮助。几乎所有我们拜访过的自考组编本教材作者都对我们提出的“高起点、高质量”表示了热情关注，这些资深而极具责任感的教授们对时下自考教辅图书市场乱且滥的现象与我们一样不无忧虑，在经过深入研究和审慎考虑之后，他们终于在百忙之中开始了写作工作，从而从根本上保证了本套丛书的“高起点”与“高质量”。

三、本套丛书得以推出，也得益于我们对这套书整体策划的信心。立足于“高起点、高质量”，我们注重了指导性与实用性，本套书与全国自考组编本教材配套，严格按教材章节排序，以最精练的文字指导学习，以统考标准题型的形式对考生进行综合测试，使考生能够在掌握教材的基础上熟悉统考题型，从而达到督促学习、指导学习、指导考试的目的。

四、虽然在组织编写本套丛书之前我们拟定了详细的写作要求，但教授们在写作过程中还是相对表现出了自己的特色，而这种写作特色与教材是相一致的，故此，为了保持这种特色，我们并未过分强求一律，只是在版式上做了统一安排，使全套书具有了相对一致性，相信这样会为考生配合教材使用这套丛书提供便利。

最后，借用一自考学生的话送给大家：寻遍书市作比较，“风景”这边独好！

祝您成功！

出版者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

本书是根据《高等数学(一)自学考试大纲》的要求,结合编者从事自学考试教学辅导的经验和自学考试学生的实际情况编写而成的。全书分三大部分:第一部分是学习指导与综合测试题。该部分按章设“学习指导”和“综合测试题”,“学习指导”是对考生学习高等数学(一)时的一种宏观上的指导,以帮助考生能准确把握考试大纲所要求的每一个知识点和考核点;“综合测试题”是与统考题型相一致的,并尽可能按知识考核点分类给出,具有典型性和代表性。第二部分是综合测试题的答案及答案要点。第三部分是附录,包括高等数学(一)全国统考试卷样式、评分标准与标准答案,以及高等数学(一)的学习方法与应试技巧。

为了与国际接轨,在本书中把三角函数中正切符号“tg”用“tan”表示,余切符号“ctg”用“cot”表示,反正切、反余切也分别改用 arctan 与 arccot 表示。

本书由复旦大学高汝熹教授主审,华东师大汤羡祥教授主编。参加编写的还有包超兰副教授、丁大公副教授。

限于编者水平,书中难免有一些疏漏,恳请读者批评指正。

编者

1999 年 12 月

目　　录

第一部分　学习指导与综合测试题

第二部分　综合测试题答案及答案要点

第三部分　附　录

第一部分　学习指导与综合测试题

第一章　函数及其图形

◎本章学习内容提示与分析

函数是高等数学研究的主要对象，所以在学习和复习这一章时必须予以足够的重视。主要应抓住以下几个方面：

（一）了解集合的概念，集合的表示方法，掌握两个集合之间的关系及集合之间的运算与所满足的运算律

1. 关于集合的概念，应了解什么是集合、集合的类型，搞清什么是空集。集合是指具有某个共同属性的一些对象的全体，构成集合的每一个对象称为该集合的“元素”。集合有两种类型：有限集（指包含有限多个元素的集合）和无限集（指包含有无限多个元素的集合）。空集是指不含任何元素的集合，记为 ϕ。

2. 关于两个集合的关系，应搞清子集和集合相等两个概念。设有两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是 B 的子集，用记号 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 表示。任何一个集合都是它自身的子集。空集是任何一个集合的子集。两个集合相等是指集合 A 和集合 B 含有相同的元素，记为 $A = B$。

3. 关于集合的运算，主要应掌握集合之间的并、交、补三种运算。

集合 A 和集合 B 的并集，记作 $A \cup B$，指

$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$

集合 A 和集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，指

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$

集合 A 关于集合 B 的补集，是指满足：（1）集合 A 是集合 B 的一个子集；（2）集合中的元素属于 B 但不属于 A。记作 A_B^C，或简记为 A^C。

集合的运算律有交换律、结合律、分配律和对偶律。

（1）交换律：

$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

（2）结合律：

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

（3）分配律：

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（4）对偶律：

$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

4. 集合常用的表示方法有列举法和描述法。

5. 全体实数构成一个集合，记作 R，则 $R=\{x|-\infty<x<+\infty\}$。实数在几何上可用数轴上的点来表示。全体实数与数轴上的点建立了一一对应关系，即每一个实数在数轴上对应一个点，数轴上的每一个点也对应着一个实数。应掌握各种区间等价的集合表示形式，即：

开区间$(a,b)=\{x|a<x<b\}$

闭区间$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

半开区间$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

无穷区间$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$

$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$

$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$$

对上述各种区间应能在数轴上正确地表达出来。

6. 实数集合$\{x \mid |x-a| < \delta, \delta > 0\}$($=\{x \mid a-\delta < x < a+\delta, \delta > 0\}$)称为 a 的 δ 邻域。亦即以 a 为中心的开区间$(a-\delta, a+\delta)$，点 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径，在数轴上的表示如图 1—1。

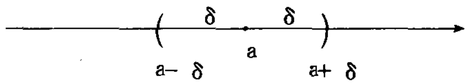

图 1—1

(二)了解映射的含义及函数与映射的关系

、正确理解函数的定义，掌握函数自变量与因变量之间的对应关系与函数的定义域是决定函数的两个要素。会求函数的定义域和值域。

1. 映射的定义是：若集合 X 与集合 Y 之间建立了这样一种对应关系 f：(1)对于集合 X 的每一个元素，都能按某种规则同集合 Y 中的某个元素相对应；(2)对于集合 X 的每一个元素，集合 Y 中与它对应的元素只有一个，则称这样的对应关系 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 $f: X \to Y$。

2. 函数的定义是：若 X 和 Y 都是实数集合，则两实数集合之间的映射 $f: X \to Y$ 称为函数。易见函数定义是映射定义的特例。习惯上，我们把 X 称为函数 f 的定义域，记作 D_f，并记函数 f 为：

$$y = f(x), x \in D_f$$

称 x 为自变量，y 为因变量，y 的取值范围称为函数的值域，记作 R_f。

在函数概念中，要搞清两个函数是相同的(或相等的)条件。如果两个函数定义域相同，对应关系(法则)相同，则称这两个函数是相同的(或相等的)。它与自变量和因变量用什么字母来表示无关。

函数常用的表示方法有三种：解析法，表格法，图示法。

3. 对于用解析法表示的函数，在确定其定义域时应使该解析式在实数范围内有意义。具体应注意以下几点：

(1)在分式中分母不能为零；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(2)对于偶次根式,根号里的整个式子必须大于或等于零;

(3)在对数表达式中,要使真数大于零;

(4)对反三角函数,要符合反三角函数定义域的要求。例如 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$,均要求 $x\in[-1,1]$;

(5)若函数的表达式是由若干项组成,则整个函数的定义域应取各项定义域的公共部分。

4. 分段函数是用几个解析式子合起来表示的一个函数,这些解析式子自变量各自取值范围(集合)必须明确标出,该分段函数的定义域就是这些集合的并集。对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围的解析式子中去求。例如,函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x & 0\leqslant x<1\\ 2 & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

是一个分段函数,其定义域为

$$(-\infty,0)\cup[0,1)\cup[1,+\infty)=(-\infty,+\infty)$$

$$f(-1)=\frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}\quad(\because -1\in(-\infty,0))$$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\quad(\because \frac{1}{2}\in[0,1))$$

$$f(3)=2\quad(\because 3\in[1,+\infty))$$

(三)理解和掌握函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性,会判断具体的函数是否具有这些性质

1. 单调性:设函数 $y=f(x)$, $x\in D_f$,若对任意两点 $x_1,x_2\in D_f$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 D_f 内严格单调增加(或减少)。

2. 有界性:若存在两个数 A 和 B,对一切 $x\in D_f$,恒有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D_f 内是有界函数,否则称 $f(x)$ 为无界函数。

3. 奇偶性:对函数 $y=f(x)$,其定义域 D_f 关于原点对称,若对

任何 $x \in D_f$ 恒有 $f(-x)=f(x)$，则称此函数为偶函数；若对任何 $x \in D_f$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称此函数为奇函数。

4. 周期性：对函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，若存在正数 T，对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，并把满足上述关系式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的周期。

(四)熟练掌握基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形和简单性质(单调性、有界性、奇偶性和周期性)

基本初等函数包括下列五类函数：

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任何实数）

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

反三解函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\mathrm{arccot}\, x$

上述函数是研究函数极限、导数、积分的基础，必须非常熟悉。例如，函数 $y=\mathrm{arccot}\, x$，就应知道其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,\pi)$，属非奇非偶函数及有界函数，但不是周期函数，而是单调减函数，其图形如图 1—2 所示。

在三角函数中，还应熟记下述公式：

$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \tan^2 x+1=\sec^2 x, \cot^2 x+1=\csc^2 x$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

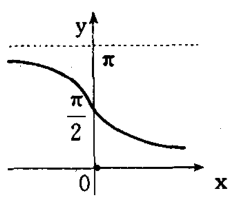

图 1—2

$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x), \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos x)$

(五)理解复合函数的概念,能正确地分析复合函数的复合过程。理解初等函数的概念

1. 复合函数的定义:设有两个函数,$y=f(u),u\in D_f,u=g(x)$,$x\in D_g$,如果函数 $g(x)$ 的 R_g 包含在函数 $f(u)$ 的定义域 D_f 中,亦即 $R_g\subset D_f$,就称函数 $y=f[g(x)],x\in D_g$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数,称 u 为中间变量。

注意判断两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 能否复合成函数 $y=f[g(x)]$ 的关键是看 $g(x)$ 的值域 R_g 是否包含在 $f(u)$ 的定义域 D_f 中,即 R_g 应是 D_f 的一个子集。实际上对具体的函数,只要当 $R_g\cap D_f\neq\phi$ 时,通过限制 x 的变动范围,使它们能复合。

例如,$y=\sqrt{u},u=1-x^2,x\in(-\infty,+\infty)$时,两个函数是不能复合的。只有把 x 限制在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,两个函数才能构成复合函数 $y=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1]$。又如函数 $y=\ln u$ 与 $u=-x^2$ 就不能复合,因为函数 $u=-x^2$ 的值域$(-\infty,0]$未包含在函数 $y=\ln u$ 的定义域$(0,+\infty)$中 ,且 $(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\phi$,所以无论对 x 怎样限制,也不能构成复合函数。

在讨论一个复合函数由哪些基本初等函数或简单函数复合而成时,应注意由外逐层依次向内分解。例如,$y=e^{\arccos\sqrt{x^2+1}}$ 可看成由 $y=e^u,u=\arccos v,v=\sqrt{w},w=x^2+1$ 复合而成。

2. 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和复合而得到的且能用一个式子表示的函数称为初等函数。注意分段函数不是初等函数。

(六)了解反函数的概念及函数存在反函数的条件,对给定的函数会求其反函数

反函数的定义:给定函数 $y=f(x)$,如果对其值域 R_f 中的任一值 y,都可通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 D_f 中确定唯一的一个 x 与它对应,则得到一个定义在 R_f 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数,称此新函数为 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$。习

惯上，记 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，反函数的定义域为 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=D_f$。函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。

反函数存在定理指出了函数存在反函数的充分条件，即若函数 $y=f(x), x\in D_f$ 是严格单调增加(或减少)的，则存在反函数 $x=f^{-1}(y), y\in R_f$，且此反函数也是严格单调增加(或减少)的。

由反函数的定义可知，若函数 $y=f(x)$ 存在反函数，则 x 与 y 必须是一一对应的。而如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D_f 是严格单调增加(或减少)，就充分保证 x 与 y 是一一对应的，故必有反函数。例如，$y=x^2$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，由于对任一 $y\in(0,+\infty)$，均有两个 $x(=\pm\sqrt{y})$ 与 y 对应，因而，它没有反函数。但是，如果把 $y=x^2$ 的定义域限制在 $[0,+\infty)$ 时，由于 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加，故有反函数 $x=\sqrt{y}$。

(七)了解经济学上一些常见函数的解析式及其图形，对一些简单的经济问题，会建立函数关系

1. 应理解以下几个常用的经济函数：

(1)需求函数　在假定其他因素(诸如消费者的收入、偏好、相关商品的价格等)不变的条件下，所建立的需求量 Q 与价格 P 的函数称为需求函数，记为 $Q=f(P)$，有些经济著作中也常用 $P=f^{-1}(Q)$ 表示需求函数。

(2)总收益函数　设某产品的价格为 P，相应的需求量为 Q，则销售该产品的总收益 $R=Q\cdot P$，又若需求函数为 $Q=f(P)$，其反函数为 $P=q(Q)$，则总收益函数为 $R=Q\cdot P=Q\cdot q(Q)$。

(3)成本函数　产品成本是产量 Q 的函数，它由固定成本 C_0 和变动成本 C_1 组成，记成本函数为 $C(Q)=C_0+C_1(Q)$。另外，把 $\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}$ 称为平均成本函数。

(4)利润函数　利润函数 $L(Q)$ 可表示为总收益函数与总成本函数之差，即 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$。

2. 对实际问题建立数学模型,即建立函数关系式,具体应抓住下列步骤:

(1)根据建模的要求分析实际问题中各种量,确定因变量和自变量;

(2)根据题意,建立函数关系式;

(3)确定函数定义域(做这一步时,除考虑函数解析式外,还应注意符合实际问题的要求)。

最后,应熟记实数 x 绝对值的定义和有关的性质,并能熟练、灵活地应用。

实数 x 的绝对值定义为:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

其性质有:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|x| = |-x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(5) $|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$

(6) $|x| < x_0$ 等价于 $-x_0 < x < x_0$,即 $\{x \mid |x| < x_0\} = \{x \mid -x_0 < x < x_0\}$

(7) $|x| \geqslant x_0$ 等价于 $x \geqslant x_0$ 或 $x \leqslant -x_0$,即 $\{x \mid |x| \geqslant x_0\} = \{x \mid x \geqslant x_0\} \cup \{x \mid x \leqslant -x_0\}$.

◎本章综合测试题

一、单项选择题(在备选答案中选出一个正确答案)

(一)集合的概念,判断集合之间关系与集合运算的结果

1. 点 x_0 的 δ 邻域($\delta > 0$)是指点集

A. $\{x \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$　　B. $\{x \mid x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$

C. $\{x|x\in(x_0-\delta,x_0+\delta]\}$　　D. $\{x|x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\}$

2. 表示满足点集 $\{x|1<|x-2|<3\}$ 的区间是

A. $(-1,1)$　　B. $(3,5)$

C. $(-1,5)$　　D. $(-1,1)\cup(3,5)$

3. 设 $A=\{x|-4\leqslant x\leqslant 4\}$, $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$, 则有

A. $A\supset B$　　B. $A\subset B$

C. $A\cap B\supset B$　　D. $A\cap B\subset B$

4. 如果集合 $E=\{x|x(x^2-1)=0\}$, 下列集合中哪个集合与 E 相等

A. $\{x|x(x+1)=0\}$　　B. $\{x|x^2(x^2-1)=0\}$

C. $\{x|(x-1)(x^2-1)=0\}$　　D. $\{x|e^x(x^2-1)=0\}$

5. 设集合 $E=\{x||x|\leqslant 2\}$, $F=\{x|x^2-4<0\}$, 则有下列关系

A. $E\subset F$　　B. $E=F$　　C. $E\supset F$　　D. $E\cap F=\phi$

6. 下列集合运算结果为空集的是

A. $\{1,2,3,5\}\cap\{4,5,6,7\}$　　B. $\{1,2,3\}\cap\{4,5,6\}$

C. $\{0,1,3,5\}\cap\{0,4,9\}$　　D. $\{0,2,3\}\cap\{2,4,8\}$

7. 下列集合中为空集的是

A. $\{x|x<\frac{1}{2}$ 且 $x\geqslant 0\}$　　B. $\{x|x+5=0\}$

C. $\{x|x^2+1=0, x$ 为实数$\}$　　D. $\{x|x>3$ 且 $x<7\}$

8. 设 $M=\{x|x^2-x-6>0\}$, $R=\{x|x-1\leqslant 0\}$, 则 $M\cap R=$

A. $\{x|x>3\}$　　B. $\{x|x<-2\}$

C. $\{x|-2<x\leqslant 1\}$　　D. $\{x|x\leqslant 1\}$

9. 如果集合 A 与 B 满足 $A\cap B=B$, 则 A 与 B 的关系必是

A. $A=B$　　B. $A\subset B$　　C. $A\subseteq B$　　D. $B\subsetneq A$

10. 用区间表示满足不等式 $|x|+1>|x-3|$ 所有 x 的集合是

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-1,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

11. 设 $A=\{x||x|>x\}$, $B=\{x|1<x<3\}$, $C=\{x|-2<x<$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com