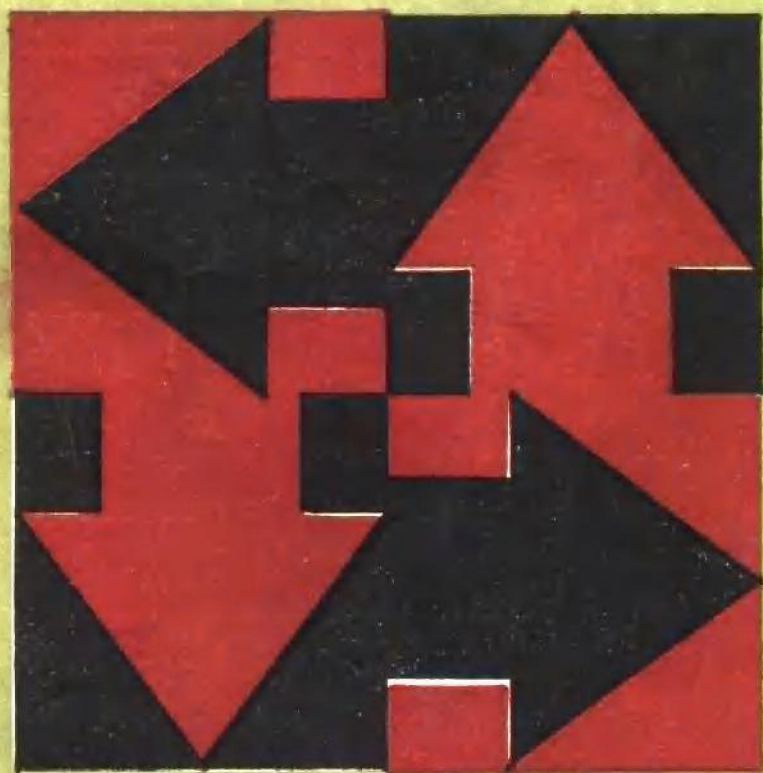


高等学校试用教材

理论力学

肖家鑫 编



高等学校试用教材

理论力学

肖家鑫 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书是根据编者多年使用的自编《理论力学》讲义修改而成的。内容包括: 矢量力学及拉格朗日力学的基本内容。并利用拉格朗日方程及矢量力学的方法讨论小振动、有心力场及刚体力学。进而讨论哈密顿动力学及连续体力学。书中配有大量的例题和习题, 所有习题都给出了答案。

本书考虑到当前教学改革中, 各院校在教学内容安排上不尽相同, 所以在内容的选择及安排上力求适应各种要求, 便于教师灵活安排。因此, 本书不仅适用于综合大学、师范院校及工科大学的物理系, 而且工科大学的某些相应专业、师专、工科大专经适当选择安排后, 也可采用本书作为教材。

高等学校试用教材

理 论 力 学

肖家鑫 编

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 13.5 字数 325,000

1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷

印数 0001—1,620

ISBN 7-04-002725-9/TU·39

定价 3.90 元

前 言

本书是编者在天津大学物理系授课使用的“理论力学”讲义的基础上修改而成的。本书的主要特点如下:

一、加强了分析力学的地位:为此采用了新的体系,在第一章及第二章讲授了矢量力学的基本内容之后,随即进入第三章,讲授拉格朗日力学,为分析力学及其简单应用打下一个初步基础。第四、五、六三章则同时利用拉格朗日方程及矢量力学的方法处理小振动、有心力及刚体力学等几个专题。在此基础上,在第七章讲授哈密顿力学,进一步提高分析力学的深度及广度。在第八章连续介质力学简介中,也注意到分析力学与矢量力学的配合;不仅从应力、应变的分析建立了各向同性弹性体动力学方程,而且也从能量分析入手,写出体系的拉格朗日函数,利用哈密顿原理导出弹性体动力学方程。这样使分析力学在不同层次上,逐步得到加强。

二、适用面较广:考虑到在当前教学改革中,各院校在教学内容的安排上不尽相同。本书在内容的选择及安排上力求适应各种要求,便于教师灵活安排。凡课时为30学时左右者,可以只学前三章,即可了解与掌握矢量力学与分析力学的最基本内容及其简单应用。课时为50学时左右者,可删去七、八两章,这样不仅可以学习矢量力学及分析力学的基本内容,还可应用它们讨论如小振动、有心力、刚体等一些较复杂的专题。课时为64学时者,可以删去第八章。第八章为理论力学应用于后续理论物理课程的过渡给出了典型的范例。

本书还增加了静力学的基本内容及连续介质力学简介,同时也增加了一些工程实际的应用例题。因此本书不仅适用于综合大

学、师范院校及工科院校的物理系，而且工科院校的某些相应专业、师专、工科大专经适当选择安排后，也可采用本书作为教材。

三、本书配有较丰富的例题与习题：全书共编入例题 77 个，习题 233 个，且均给出了答案，这样即使在本书尽量减少了与普通物理的重迭，较早地引入分析力学的基本内容的情况下，由于有较多的例题与之配合，且许多例题同时使用矢量力学与分析力学的方法处理，使之既具有矢量力学图象清晰的优点，又具有分析力学方法简捷规范的长处。这不仅有利于后续理论物理课程的学习，而且对自学理论力学，尤其是自学分析力学的读者带来了不少方便。

编者十分感谢北京工业大学李子平教授、浙江大学徐亚伯教授以及清华大学许崇桂教授详细地审阅了本书的初稿及修改稿。感谢他们提出的有益的建议及修改意见。编者也感谢天津大学各级领导对编写本书的有力支持以及应用物理教材编审委员会为评审本教材所做的大量组织工作。本书一定还有许多疏漏和不当之处，敬请广大读者批评指正。

肖家鑫

1989 年 6 月于天津大学

目 录

前言	1
绪论	1
(一) 理论力学的研究对象	1
(二) 理论力学的地位与作用	1
第一章 动力学概论	3
§ 1-1 基本概念	3
(一) 参照系、坐标系、计算系统	3
(二) 运动方程、轨道	4
(三) 位移、速度、加速度	6
§ 1-2 速度、加速度的分量表示式	8
(一) 直角坐标、轴向分量	8
(二) 极坐标、径向分量及横向分量	2
(三) 自然坐标、切向分量及法向分量	19
§ 1-3 相对运动	16
(一) 平动参照系	17
(二) 转动参照系	19
§ 1-4 牛顿三定律	25
(一) 惯性及惯性质量	25
(二) 力的定义及量度	26
(三) 惯性参照系	27
§ 1-5 质点运动微分方程	29
(一) 自由质点、非自由质点、主动力、被动力	29
(二) 质点运动微分方程	30
(三) 质点运动微分方程的求解	32
§ 1-6 初积分及守恒定律	43

(一) 初积分	44
(二) 守恒定律	44
(三) 相平面法举例	54
§ 1-7 非惯性系动力学	57
(一) 非惯性系与惯性力	57
(二) 地球自转的影响	60
习题	67
第二章 牛顿力学的基本定理	77
§ 2-1 动量定理、动量守恒定律	77
(一) 内力、外力、质心	77
(二) 动量定理	83
(三) 质心运动定理	84
(四) 动量守恒定律	85
(五) 质心系	86
§ 2-2 角动量定理、角动量守恒定律	87
(一) 质点组的角动量	87
(二) 角动量定理及角动量守恒	89
(三) 质心系中的角动量定理	90
§ 2-3 动能定理、机械能守恒定律	92
(一) 质点组的动能	92
(二) 动能定理	93
(三) 机械能守恒	94
§ 2-4 基本定理应用举例	95
§ 2-5 两体问题	99
§ 2-6 碰撞	101
§ 2-7 可变质量物体的运动方程	106
(一) 基本运动方程	106
(二) 可变质量问题举例	108
§ 2-8 非惯性系质点组动力学	112
(一) 惯性力与动量定理	112

(二) 惯性力矩与角动量定理	113
(三) 惯性力的功与动能定理	114
习题	118
第三章 拉格朗日方程	124
§ 3-1 约束与广义坐标	125
(一) 约束	125
(二) 自由度	131
(三) 广义坐标	131
§ 3-2 虚功原理	133
(一) 实位移与虚位移	133
(二) 虚功原理	137
(三) 虚功原理应用举例	140
§ 3-3 达朗贝尔原理	147
§ 3-4 拉格朗日方程	155
(一) 第二类拉格朗日方程	157
(二) 保守力系的拉格朗日方程	159
(三) 拉格朗日函数	161
§ 3-5 拉格朗日方程的应用	163
§ 3-6 守恒律	175
(一) 广义能量守恒	175
(二) 广义动量守恒	178
(三) 守恒律与对称性	179
习题	182
第四章 微振动	189
§ 4-1 一维振动	189
§ 4-2 多自由度系统的振动方程	196
§ 4-3 振动微分方程的本征解	203
§ 4-4 简正坐标	207
习题	215

第五章 有心力运动	219
§ 5-1 有心力的基本性质	219
§ 5-2 运动方程及轨道	222
§ 5-3 与距离平方成反比的引力	226
§ 5-4 有效势能与惯性离心势能	239
§ 5-5 平方反比斥力—— α 粒子散射	249
习题	253
第六章 刚体力学	257
§ 6-1 刚体运动学	257
(一) 刚体的自由度	257
(二) 平动与转动	258
(三) 角速度矢量	261
(四) 线量 v a 与角量 ω 的关系	265
(五) 举例	268
§ 6-2 刚体动力学	275
(一) 力系简化与刚体平衡	275
(二) 刚体动力学基本方程	287
(三) ω 与 J 的关系	288
(四) 惯量张量、惯量主轴、惯量椭球	291
(五) 刚体转动动能与角速度的关系	300
§ 6-3 刚体定轴转动	303
(一) 定轴转动的基本方程	303
(二) 轴上的附加压力	304
§ 6-4 刚体平面平行运动	309
§ 6-5 刚体绕固定点的运动	314
(一) 欧勒角、欧勒运动学方程	314
(二) 欧勒动力学方程	316
*§ 6-6 刚体绕定点的自由运动(Euler-Poinsot 情形)	319
*§ 6-7 重陀螺的定点运动(Lagrange-Poisson 情况)	325

*§ 6-8 拉摩进动	331
习题	332
第七章 哈密顿动力学	341
§ 7-1 哈密顿原理	341
(一) 变分法简介	342
(二) 哈密顿原理	346
§ 7-2 正则方程	350
(一) 勒让德(Legendre)变换	350
(二) 正则方程	351
(三) 正则方程的初积分	356
*§ 7-3 泊松(Poisson)括号与泊松定理	358
(一) 泊松括号的定义	358
(二) 泊松括号与正则方程的关系	359
(三) 泊松括号的性质	361
(四) 泊松恒等式	362
(五) 泊松定理	363
*§ 7-4 正则变换	365
(一) 正则变换的条件	366
(二) 母函数	368
§ 7-5 哈密顿-雅科毕理论	373
习题	381
第八章 连续介质力学	387
§ 8-1 守恒方程	389
(一) 传递方程	389
(二) 质量守恒、连续性方程	390
(三) 应力、动量守恒及运动方程	391
(四) 能量守恒	395
§ 8-2 流体动力学的基本关系	396
(一) 流体的特点	396

(二) 研究流体运动的两种方法、流场	397
(三) 流体动力学问题举例	400
§ 8-3 弹性固体力学	405
(一) 应变分析	405
(二) 应力与应变的关系	410
(三) 弹性体动力学基本方程	412
(四) 哈密顿原理及拉格朗日方程	414
习题	417
结束语	419
附录 主要参考书目	422

绪 论

(一) 理论力学的研究对象

力学是研究物体机械运动的学科。所谓机械运动是指物体的空间位形随时间的变化。如物体的移动、转动、流动、变形等，静止及平衡是其中的一种特例。

宇宙中的物体按其几何线度可分为三类：原子、电子等微观粒子线度的微观物体，恒星或星系线度的宇观物体，以及大小界于以上二者之间的宏观物体。

按物体运动速度又可分为两类：运动速度远小于光速（约 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ）的低速运动物体及运动速度接近光速的高速运动物体。

以牛顿运动定律为基础的所谓经典力学只限于讨论宏观物体低速运动规律。至于研究原子、电子等微观粒子的运动，速度接近光速的高速物体的运动以及恒星、星系等宇观物体的运动则分别属于量子力学、狭义相对论及广义相对论的研究范畴。

理论力学是在经典力学范畴内，侧重研究质点、质点组、刚体、连续体等力学模型运动规律的学科。由于研究固体变形与内应力关系的固体力学，研究流体流动与压力关系的流体力学已分别发展成为独立的学科分支，故我们将重点放在利用矢量力学与分析力学的方法讨论质点、质点组、刚体的运动规律，而对研究固体与流体的连续介质力学仅作一简要的介绍。

(二) 理论力学的地位与作用

机械运动是自然界最普遍、最简单的运动形态，它蕴含于所有

高级的复杂的运动形态之中。在古代人类就已积累了有关农田灌溉、建筑施工、运输机械等力学知识。如墨翟(公元前 468-382 年)等在《墨经》中对力的概念及杠杆原理有了初步的认识。古希腊的亚里斯多德(公元前 384-322 年)、阿基米德(公元前 287-212 年)等总结了杠杆平衡及重心原理,以后又逐步总结出一些动力学规律。直到 1687 年牛顿(1642-1727 年)的名著“自然哲学的数学原理”问世,才将原来零散而粗糙的力学知识总结为运动三定律,从而奠定了力学作为一门“精确”科学的基础。此后又依次发表了达朗贝尔(1717-1783 年)原理,拉格朗日(1736-1813 年)的分析力学,哈密顿(1805-1865 年)-雅柯比(1804-1851 年)理论等,从而使力学理论更臻完善,发展为理论严谨、体系完整的学科。

力学理论所揭示的机械运动规律不仅广泛应用于水利工程、土木建筑、机械制造、航空航天技术等工程技术领域;而且对于研究天体的运行及演化、生物化学的反应机制等也是必不可少的基础。并已逐步形成了天体力学、生物力学等有关的新学科分支。所以理论力学是一门极其重要的基础学科。

另一方面,理论力学是理论物理学的一个重要组成部分,它为后续的理论物理课程提供了许多重要的基本概念、规律及研究方法。所以学习和掌握它仍是进一步学习和掌握纯粹科学与应用科学的基础。多数学生学习本课程的困难常在于如何根据力学的基本原理、应用适当的数学工具去解决具体的物理问题。解决这一困难的唯一途径是在钻研力学的基本概念、原理与演算例题、习题之间多次反复交替,以达到逐步深化。对于那些值得攻坚的难题,虽然攻克非易,但其价值在于使读者在反复的努力中获得裨益。

第一章 动力学概论

本章通过研究质点的运动规律，学习质点动力学的基本概念及牛顿运动定律，重点掌握质点运动微分方程的建立及求解。

§ 1-1 基本概念

(一) 参照系、坐标系、计算系统

在力学中我们可以将具有一定质量的物体忽略不计它的形状、大小及内部结构而抽象为一个质点。利用质点模型，一切物体皆可看作质点的集合，称为质点组。任何两质点间的距离保持不变的质点组称为刚体。实际物体是否可以简化为质点或刚体，要由问题的性质而定。

运动是绝对的，但对于运动的描述却是相对的。观察或描述运动的参考物体称为参照系。应该注意，作为参照系的物体必须是有形状、有大小的实际物体，而不能被抽象为一个“点”，因为用一个“点”作参照系是不能确定物体的方位的。另外，在不同参照系中对同一物体运动的描述是不同的，但这些描述是彼此联系的，且统一于运动本身。

为了定量描述物体的运动，必须在参照系上建立适当的坐标系。这样可将质点的几何位置用一组数(坐标)表示。

应该注意的是，参照系与坐标系是两个不同的概念。前者是描述运动的参考物体。一物体是否运动及运动情况以参照系为标准来确定。而坐标系只是作为一种计算工具把有关物理量的关系表达出来而已，它的不同选取并不会影响对运动的描述。但若将

坐标系固定在某一参照系中，则可以用此坐标系来代表该参照系。

空间坐标配以记载时间的方法，即称为一个计算系统。任何周期过程均可用来计时。具体问题中，时间的原点可以任选，时间的长短可用“时间间隔”（简称时间）表示。

经典力学认为物体的运动虽在时间和空间中进行，但是时间的流逝和空间的性质与物体的运动彼此没有任何联系。牛顿说：“绝对的真正的和数学的时间自己流逝着，并由于它的本性而均匀地与任一外界对象无关的流逝着。”“绝对空间就其本性而言，与外界任何事物无关，而永远是相同的和不动的。”这种把物质和运动完全脱离的“绝对时间”和“绝对空间”的观点是牛顿当时的认识，是从低速范围内总结出来的结论并加以绝对化的结果。所以在经典力学中，长度和时间的量度与计算系统的选择无关。

（二）运动方程、轨道

质点运动学的基本问题是确定质点位置随时间的变化规律，这一规律的数学表示式称为运动方程。在运动过程中，质点在空间描绘的连续曲线称为轨道，其数学表示式为轨道方程。

常用的描述运动的数学方法有以下三种：

1. 向量表示法：引入位置矢量（简称位矢或向径） $\mathbf{r}$ ，如图1-1-1， $\mathbf{r}$ 的始端在原点 O ，终端即为质点所在位置 P 。质点运动方程为：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-1-1)$$

$\mathbf{r}(t)$ 的终端曲线（常称矢端曲线）便是质点运动轨道。

2. 坐标表示法：随所选坐标系不同而有各种不同的坐标表示，如在直角坐标中质点 P 的位置以坐标 (x, y, z) 表示，运动方程为：

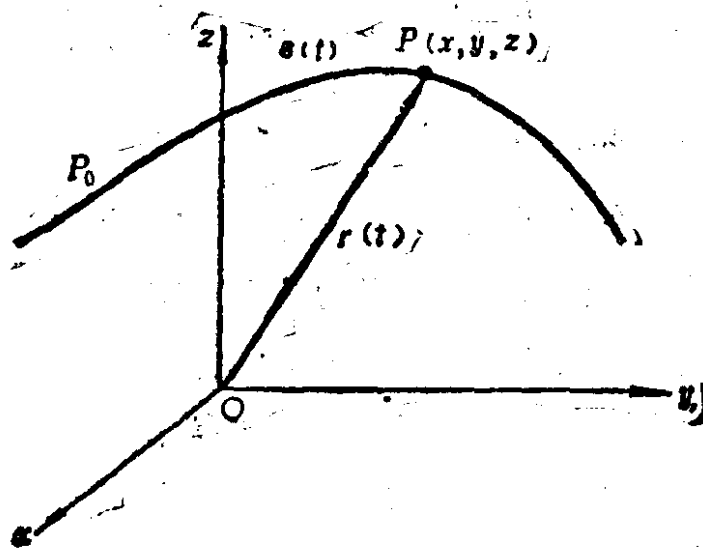


图 1-1-1 质点位置的确定

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad (1-1-2)$$

上式又是以 t 为参数的轨道方程, 消去 t , 则得轨道的直角坐标方程 $f(x, y, z)=0$.

3. 自然表示法: 当轨道已知时, 设 $t=0$ 时质点在 P_0 , 以后沿已知轨道运动, 在 t 时刻质点运动到 P 点, $\widehat{P_0P}=s$, s 表示质点沿该已知轨道在 $[0, t]$ 时间间隔内所经过的实际路程, 运动方程的自然表示可以写为:

$$s=s(t) \quad (1-1-3)$$

以上常用的三种表示是彼此联系的, 设 i, j, k 表示沿 x, y, z 三个轴向的单位矢量, 则有

$$\mathbf{r}=xi+yj+zk$$

一个空间矢量运动方程 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 对应着三个标量运动方程

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t),$$

在轨道已知的条件下又对应着一个标量运动方程 $s=s(t)$. 由于任一时刻质点有一个, 且只有一个确定的位置, 因此, 在运动中质点从某一初位置只能连续地通过一系列中间位置变化到末位置,

所以各种形式的运动方程都应该是时间 t 的单值连续函数。

(三) 位移、速度、加速度

位移: 质点在 t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔(记作 $[t, t+\Delta t]$)内的位置改变可用位移 $\Delta \mathbf{r}$ 表示, 它定义为由质点初位置 $\mathbf{r}(t)$ 指向质点末位置 $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ 的一个矢量, 如图 1-1-2, 显然

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

注意: 位移是矢量! 其方向由初位置指向末位置, 其量值为初末位置间的直线距离, 而不是实际路程。

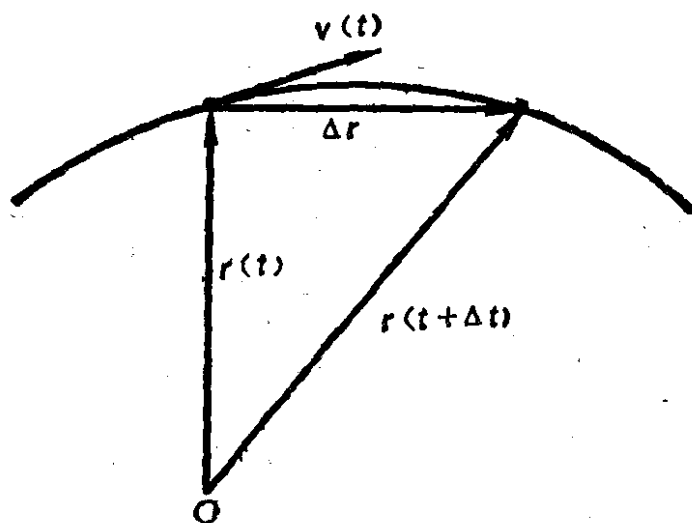


图 1-1-2 位移与速度

速度: 在 $[t, t+\Delta t]$ 时间内, 质点位移为 $\Delta \mathbf{r}$, 则在该段时间内, 质点的平均速度为

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均速度的极限即为 t 时刻的瞬时速度(简称 t 时刻的速度)

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad (1-1-4)$$

① 今后, 凡加“.”或“..”于任何变量之上, 均表示该变量对时间 t 的一阶或二阶导数。