

J. A. 孔著 霍美瑜译 谢处方校

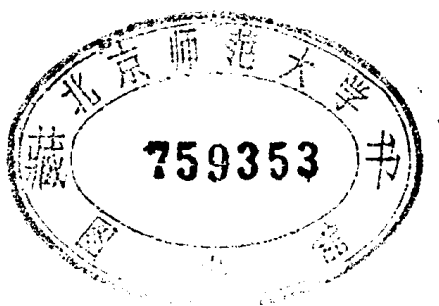
# 电磁波 理论

人民教育出版社

# 电 磁 波 理 论

J·A·孔 著  
霍美瑜 译  
谢处方 校

041159/28



人民教育出版社

## 内 容 提 要

本书根据狭义相对论从麦克斯韦方程和本构关系形式不变性的观点出发,介绍了宏观电动力学的统一理论。对电磁波在各种媒质(包括各向异性、双各向异性媒质以及运动媒质)中的性能作出了理论分析;研究了不同形状物体对电磁波的作用。最后还举例说明一些在求解电磁波问题中有用的定理和概念,对宏观媒质中电磁波的量子化也作了讨论。

本书可供高等院校电子、激光和通信等专业的研究生、高年级学生和教师参考;对从事电磁波理论研究和实际工作的人员也有一定的参考价值。

## THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVES

Jin Au Kong

JOHN WILEY & SONS 1975

\* \* \*

## 电 磁 波 理 论

J·A·孔 著

霍美瑜 译

谢处方 校

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

\*

开本 787×1092 1/16 印张 13 字数 280,000

1980年2月第1版 1980年12月第1次印刷

印数00,001—7,300

书号 15012·0245 定价 1.10 元

## 译 序

原书作者在美国麻省理工学院连续几年讲授电磁波理论方面的研究生课程后，于七十年代中期写成此书。

场矢量之间的函数依从关系用本构关系描述。本书根据狭义相对论，从麦克斯韦方程和本构关系的形式不变性观点出发，介绍了宏观电动力学的统一理论。对于静态的和运动的媒质中的电磁波，以及回旋媒质中的电磁波也作了理论分析。书中引入张量、并矢格林函数及鞍点法，并广泛使用了汉克尔函数。最后还进一步引入了在解电磁波问题中其它有用的定理和概念，并对宏观媒质中电磁波的量子化作了讨论。

翻译工作是在华南工学院教务处和无线电系直接关怀下进行的。成都电讯工程学院谢处方教授校译了全书，翻译过程中得到冯秉铨教授很多有益的帮助，译者在此表示感谢。

凡对原书错漏作了修改之处均加有译注。由于译者业务水平不高，译本错漏之处一定很多，希望读者批评指正。

译 者

1979年3月5日

## 序 言

本书介绍宏观电动力学的统一理论,这是根据狭义相对论、从麦克斯韦方程和本构关系的形式不变性观点出发作出的。对波在线性的、但并非各向同性的媒质内部的性能给予注意的情况下,研究了各种电磁波。选介了为理解电磁波所必不可少的各种论题,以便使本书能成为一本有用的研究生教材。

在描述自然界的物理定律时,相对于均匀运动的观察者为形式不变的方程,称为洛伦兹协变的。以张量标记法写出时,麦克斯韦方程和本构关系两者显然都是协变的。关于本构关系的洛伦兹协变性的描述称为双各向异性的。第一章概述宏观麦克斯韦理论,讨论基本方程和本构关系。第二章论述电磁场和狭义相对论。从一个参考系到另一个参考系的场量和本构关系的变换是从空间和时间的洛伦兹变换推导出来的。当从一运动着的参考系来观察时,各向同性或各向异性媒质都变为双各向异性的。涉及一个运动着的媒质的问题通常可以在媒质的静止系内求解,然后把这结果变换回到观察者的参考系中去。当牵涉到多于两个运动着的媒质时,双各向异性媒质的概念是不可缺少的,因为在一个媒质的静止系内所有其他媒质都是在运动中。在第七章,引入了四维的标记法,并从变分法原理推导出宏观麦克斯韦方程以及能量动量守恒定律。

在全书中,电磁波是主要关心的问题。例如,当电磁波遇到媒质时,我们关心的是波如何受媒质影响,而不是媒质对波场的反应。由于对非各向同性媒质的兴趣不断增加,所以,在这里对问题的表述和求解是这样取定,以使其可以方便地推广于处理那样的媒质。只要代数推演不会变得非常之复杂,以致看不出主要结果及其物理意义,则对各向异性和双各向异性媒质的简单情况均作了一些举例说明。第三章提出  $kDB$  系统,以处理在均匀各向异性和双各向异性媒质中的平面波问题。平面波的反射和透射在第四章中讨论。在第五章我们研究导行波并将此表述加以推广,使能包括运动着的回旋媒质。第六章研究由点源引起的辐射,由分层单轴媒质引起的偶极子场的散射,以及由波纹表面、圆柱体和球体引起的平面波的散射。为了给学生提供适当的数学基础,我们介绍了鞍点法并广泛使用汉克尔函数。经过这样的训练后,学生将具有足够的信心对待更复杂的技术和各种特殊函数。在第七章举例说明了在解电磁波问题中有用的定理和概念。对宏观媒质中电磁波的量子化也作了讨论。

我们用黑体字母表示矢量,黑体字母上加一横线则表示矩阵和并矢。对时谐场,我们选择时间依从因子  $\exp(-i\omega t)$ ,它导致在量子理论中熟知的方程。它也导致一个阻抗的定义,这个阻抗与电路理论中所用的阻抗是复数共轭的,不过在本书中并不强调电路概念。对四维张量,采用反变和协变的惯用标记。并不强调使用位函数来处理电磁波问题,因为它们看来并不具有直接的物理意义,而且在处理非各向同性媒质时它们会导致代数运算的复杂化。位函数在第七章中介绍。

本书是作者在麻省理工学院讲授研究生课程的产物。各种概念的发展,在很大程度上依靠

于目前已经发表的各种著作。作者并不企图参考全部有关出版物。在参考文献一节中所列的书目和杂志论文清单最多不过是有代表性的,而决不是全面的。本书所包括的某些成果,是以前作者在叙拉古大学(Syracuse University)当研究生和担任取得博士学位后的研究工程师,以及在麻省理工学院任文顿·海斯(Vinton Hayes)研究员的时候所获得的。感谢叙拉古大学的郑钧教授,麻省理工学院的 P·L·小潘菲, L·D·斯姆林和 H·J·齐默尔曼诸教授所给予我的机会和支持,以及鼓励我从事电磁场方面的研究。也感谢我的助教曾亮(译音)和 N·J·菲士对本书所提的意见和建议。此处还对我的许多学生表示感谢,他们的热情反应给予我在教学上以喜悦和满意。最后,感谢阅读和编辑本书手稿的 H·L·托马斯博士,帮助打字的我的妻子袁文(译音)和制订最后稿本的 C·科普芙小姐。

J·A·孔

麻省 剑桥

1974年11月

# 目 录

第一章 宏观麦克斯韦理论	1
1.1 基本方程	1
1.2 本构关系	5
第二章 电磁理论和狭义相对论	16
2.1 空间时间变换	17
2.2 场矢量的变换	19
2.3 本构关系的变换	25
第三章 均匀媒质中的平面波	33
3.1 色散关系	33
3.2 波矢量 $\mathbf{k}$	39
3.3 $\mathbf{kDB}$ 系统和特征波	45
第四章 反射和透射	58
4.1 相位匹配	58
4.2 反射和透射系数	63
4.3 分层媒质	69
第五章 导行和谐振	80
5.1 平面波导	80
5.2 柱状波导	90
5.3 空腔谐振器	100
第六章 辐射和散射	110
6.1 辐射	110
6.2 偶极天线和分层媒质	121
6.3 散射	137
第七章 波和媒质的定理	150
7.1 等效原理	151
7.2 反作用和可逆性	162
7.3 电磁波的量子化	171
7.4 四维标记法	180
7.5 宏观电磁理论中拉格朗日公式的编列	187
参考文献	195

# 第一章

## 宏观麦克斯韦理论

1.1 基本方程	1
1.1a 麦克斯韦方程	1
1.1b 边界条件	2
1.1c 坡印亭定理	4
1.2 本构关系	5
1.2a 本构矩阵	6
1.2b 对称条件	7
1.2c 各向同性、各向异性和双各向异性媒质	8
习题	11

在研究电磁波传播和辐射问题时，我们的主要兴趣在于波与其周围环境相互作用下所表现出来的性能。电磁上所谓周围环境是由指定的材料媒质的本构关系及几何轮廓来定义的。原则上，任何宏观媒质均可作为微观基本粒子的集合来处理。这些粒子构成电磁场的源并与场相互作用。媒质的宏观描述可以借助于适当的平均化处理而从微观理论获得，多年来这个艰难的课题已经引起了研究兴趣。我们的研究不借助于微观理论。我们的探究方法是从现象入手进行推理的，而其基础是宏观麦克斯韦理论。

基本关系是支配电磁场性能的麦克斯韦方程。媒质的性质由本构关系来进行表象的描述。麦克斯韦方程和本构关系一起，构成一个自身一致的方程组。对于不适宜用微分方程描述的边界和源，麦克斯韦方程由边界条件来补充。原则上，有了适当规定的源分布、几何轮廓和媒质的性质，在给定问题中电磁场的解总是可以获得的。我们将首先介绍电磁学的基本定律，并导出边界条件。然后引入双各向异性媒质的概念，以提供本构关系的一般叙述。

### 1.1 基本方程

#### 1.1a 麦克斯韦方程

存在材料媒质时，电磁场的性能由宏观电动力学的麦克斯韦方程支配：

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{法拉弟感应定律}) \quad (1.1a)$$



$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\text{广义的安培定律}) \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{高斯磁场定律}) \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{高斯电场定律}) \quad (1.1d)$$

式中

$\mathbf{E}$  = 电场强度(伏/米)

$\mathbf{H}$  = 磁场强度(安培/米)

$\mathbf{B}$  = 磁通量密度(韦伯/米<sup>2</sup>)

$\mathbf{D}$  = 电位移(库仑/米<sup>2</sup>)

$\mathbf{J}$  = 电流密度(安培/米<sup>2</sup>)

$\rho$  = 电荷密度(库仑/米<sup>3</sup>)

安培定律中著名的位移电流项  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  源出于麦克斯韦。从(1.1b)和(1.1d)得出连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1e)$$

方程(1.1e)表示电荷守恒,它是物理学中的一个基本定律。

我们通常感兴趣的是这样一些场量,其时间依从关系是单色的,即这些量是单一角频  $\omega$  的函数。我们写出

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}]$$

对其它场量  $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{J}$  和  $\rho$  也类似。在频域内场矢量  $\mathbf{E}(\omega)$  与时域内的  $\mathbf{E}(t)$  不一样,  $\mathbf{E}(\omega)$  是一个复量,而  $\mathbf{E}(t)$  则总是实量。在频域内,麦克斯韦方程变为

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (1.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (1.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.2d)$$

要注意,现在(1.2)式中的所有场量都是复量。我们将不用不同的符号来区分在频域内的复量和在时域内的实量,它们的意义从上下文中应该是清楚的。在(1.2)式中,我们已省略了时间依从因子  $e^{-i\omega t}$ 。

### 1.1b 边界条件

麦克斯韦方程组的每一方程都与一边界条件相联系。试讨论一连接着两不同媒质的面边界(图 1.1a),并令  $\hat{n}$  为指向媒质 1 内的边界上的面法线。对应于麦克斯韦方程组的边界条件如下。切向  $\mathbf{E}$  连续:

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (1.3a)$$

切向  $\mathbf{H}$  的不连续性等于面电流密度  $\mathbf{J}_s$ :

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (1.3b)$$

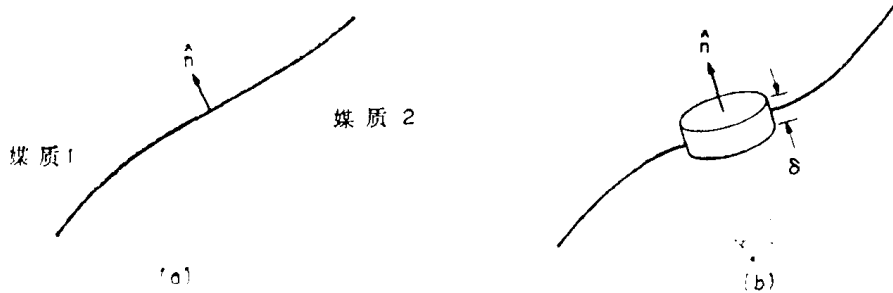


图 1.1 (a) 两不同媒质间的面边界。(b) 为推导边界条件用的小扁盒。

法向  $\mathbf{B}$  连续:

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (1.3c)$$

法向  $\mathbf{D}$  的不连续性等于面电荷密度  $\rho_s$ :

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (1.3d)$$

我们看到, 边界条件取与麦克斯韦方程组相同的形式, 只是旋度算子用  $\hat{n}$ 、时间导数用零、场量用它们在边界两侧的差值来代替, 而  $\mathbf{J}$  和  $\rho$  则分别用面电流密度和面电荷密度代替。

为了推导出边界条件, 我们必须引进矢量恒等式。让我们来讨论一个矢量场  $\mathbf{A}$  的体积分, 其体积  $V$  为具有面法线  $\hat{s}$  的表面  $S$  所包围。下面的公式是有用的:

$$\iiint_V dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \oiint_S dS \hat{s} \cdot \mathbf{A} \quad (1.4a)$$

$$\iiint_V dV \nabla \times \mathbf{A} = \oiint_S dS \hat{s} \times \mathbf{A} \quad (1.4b)$$

应注意, (1.4a) 是高斯定理, 它把一个矢量场散度的体积分转换为该场在包围面上的面积分。注意到,  $\mathbf{C}$  是常矢量时  $\nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ , 方程 (1.4b) 是可以从 (1.4a) 导出的。应用 (1.4a) 于  $\nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ , 我们求得两边被  $\mathbf{C}$  所点乘的 (1.4b)。假设  $\mathbf{C}$  是一任意常矢量, 我们就得到 (1.4b)。

在边界面上, 微分描述 (1.1) 不能应用。我们假定积分形式的麦克斯韦方程在全部区域内包括边界面都是正确的。在跨过两媒质边界上一个小扁盒的体积 (图 1.1b) 上积分 (1.1) 式, 并应用 (1.4a)、(1.4b) 于积分, 我们有

$$\oiint dS (\hat{s} \times \mathbf{E}) + \iiint dV \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.5a)$$

$$\oiint dS (\hat{s} \times \mathbf{H}) - \iiint dV \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \iiint dV \mathbf{J} \quad (1.5b)$$

$$\oiint dS (\hat{s} \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (1.5c)$$

$$\oiint dS (\hat{s} \cdot \mathbf{D}) = \iiint dV \rho \quad (1.5d)$$

虽然场矢量  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{D}$  可能是不连续的, 但假定在边界两侧它们的取值是有限的。使  $\delta$  趋于零然后使圆形围线缩成一点, 以使扁盒的体积趋于零。当边界是恒定的时候, 偏导数可以从积分号中取

出。我们去掉与  $\delta$  成正比的各项；于是包含时间导数的项将消失。包含有  $\hat{s}$  叉乘和点乘的项也将被丢弃，除非  $\hat{s}$  与  $\hat{n}$  或  $-\hat{n}$  同方向。对于包含有对  $\mathbf{J}$  求积分的项，我们假设边界可以维持这样一个面电流  $\mathbf{J}_s$ ，使  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \mathbf{J} = \mathbf{J}_s$ 。因此  $\mathbf{J}$  沿着边界面可为无限，而(1.5b)的右边将保持有限值。因而从(1.5a)和(1.5b)我们获得边界条件(1.3a)和(1.3b)。假设面电荷层  $\rho_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \rho$ ，我们同样从(1.5c)和(1.5d)获得边界条件(1.3c)和(1.3d)。

边界条件(1.3)，只是对于恒定的边界才是正确的。当边界面正在移动时，我们可以应用与前面相同的步骤，但必须注意，对于时间的偏导数我们不能再把它们取出积分号之外。根据运动学理论，当边界移动时，

$$\frac{d}{dt} \iiint dV \mathbf{A} = \iiint dV \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \iint dS (\hat{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{A} \quad (1.6)$$

式中  $\mathbf{v}$  是边界运动的速度。一个涉及到运动的表面项必须加到矢量场  $\mathbf{A}$  对时间求导数的体积分上，这个体积是由该面所包围的。将(1.6)代入(1.5)中，取代(1.3)我们得到如下的边界条件<sup>24</sup>：

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) - (\hat{n} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (1.7a)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) - (\hat{n} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \mathbf{J}_s \quad (1.7b)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (1.7c)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (1.7d)$$

变化发生在(1.7a)和(1.7b)中。边界两侧的切向场  $\mathbf{E}$  的连续性，现在被等于  $(\hat{n} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)$  的切向场  $\mathbf{E}$  的不连续性所取代。同样，面电流  $\mathbf{J}_s$  不单是由于  $\mathbf{H}$  的不连续性所产生，法向  $\mathbf{D}$  分量也有贡献。在  $\hat{n} \cdot \mathbf{v} = 0$  的情况下，即速度平行于表面时，(1.7)还原为(1.3)。

### 1.1c 坡印亭定理

能量守恒可直接从麦克斯韦方程得到。我们用  $\mathbf{H}$  点乘(1.1a)，用  $\mathbf{E}$  点乘(1.1b)，然后相减。应用矢量恒等式  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$ ，我们得到坡印亭定理：

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (1.8)$$

坡印亭矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.9)$$

可以解释为其量纲是瓦每平方米的功率流密度。在(1.8)的右边， $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  是电流密度  $\mathbf{J}$  提供的功率， $\mathbf{H} \cdot \partial \mathbf{B} / \partial t - \mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D} / \partial t$  代表储存的电能和磁能对时间的变化率。考虑围绕一点的一个无限小的体积。方程(1.8)指出，由体积内部源提供的功率等于电磁能量的增加量与流出体积的坡印亭功率之和。

坡印亭定理也可以从(1.2a)和(1.2b)以复数标记法同样地推导出来。我们有

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = i\omega(\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* \quad (1.10)$$

复坡印亭矢量定义为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (1.11)$$

注意, 虽然我们在(1.9)和(1.11)中使用同样的符号  $\mathbf{S}$ , 这两个符号是有区别的: 一个是实量; 另一个是复量。我们再次申明, 我们将不引入不同的符号来区别实量和复量。在(1.10)的最后一项  $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*$ , 可以解释为由源  $\mathbf{J}$  交付给场的复功率密度。

场量乘积的瞬时值, 例如功率流或储存能量的瞬时值, 只有当瞬时场量被确定以后才能被确定。因为时间的依从关系是谐和的, 而且一切均按角频率  $\omega$  周期性地振荡, 所以我们感兴趣的功率和能量是其时间平均值。任何两个复量场乘积的时间平均值可容易地获得。例如, 表示为  $\langle \mathbf{S} \rangle$  的时间平均坡印亭矢量, 由下式给出:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (1.12)$$

让我们验证由  $\text{Re}(E_y)$  和  $\text{Re}(H_z)$  引起的  $S_x$  的时间平均值。  $\text{Re}(E_z)$  和  $\text{Re}(H_y)$  的贡献不予考虑。我们写出

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \text{Re}(E_y) \text{Re}(H_z) \quad (1.13)$$

式中  $T$  是时间变化的一个完整周期, 而

$$\begin{aligned} \text{Re}(E_y) &= \text{Re}\{E_0(r) e^{-i(\omega t + \phi_1(r))}\} \\ &= E_0 \cos[\omega t + \phi_1(r)] \\ \text{Re}(H_z) &= \text{Re}\{H_0(r) e^{-i(\omega t + \phi_2(r))}\} \\ &= H_0 \cos[\omega t + \phi_2(r)] \end{aligned}$$

我们假设  $E_0(r)$  和  $H_0(r)$  都是空间的实函数, 而  $\phi_1$  和  $\phi_2$  包含关于相位依从关系的所有信息。积分后, 求得

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{1}{2} E_0(r) H_0(r) \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(E_y H_z^*) \end{aligned} \quad (1.14)$$

关系式(1.14)对于任何两个复量场分量的乘积都是正确的。于是一般来说我们可以指出, 两个时间谐和复量的时间平均值等于一个量和另一个量的复共轭值乘积的实数部分的一半。

## 1.2 本构关系

在麦克斯韦方程组中有 8 个标量方程。高斯电场定律是安培定律和连续性方程的结果, 高斯磁场定律是法拉第定律的结果, 它基于这样的物理事实, 即没有一个地方能够找到单个的磁单极子。因此, 在 8 个标量方程中只有 6 个是独立的。由已给定的源分布  $\mathbf{J}$  和  $\rho$ , 我们希望解出电磁场矢量。给出的源必须满足连续性方程。电磁场矢量是  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$ ; 它们具有 12 个标量分量。所以麦克斯韦的 6 个独立的标量方程不足以确定场矢量, 必须再提供 6 个标量方程。这些就是本构关系。这个见解得到简单的具体物理意义所支持。麦克斯韦方程没有考虑媒质的性质,

而媒质的性质必然在最后的解中起作用。本构关系提供媒质的一种描述。用数学术语说，本构关系描述场矢量之间的函数依从关系。

### 1.2a 本构矩阵

在最一般的形式上，本构关系可以写作

$$c\mathbf{D} = \overline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{E} + \overline{\mathbf{L}} \cdot c\mathbf{B} \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{H} = \overline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{E} + \overline{\mathbf{Q}} \cdot c\mathbf{B} \quad (1.15b)$$

式中  $c = 3 \times 10^8$  米/秒是真空中光速，而  $\overline{\mathbf{P}}$ 、 $\overline{\mathbf{Q}}$ 、 $\overline{\mathbf{L}}$  和  $\overline{\mathbf{M}}$  都是  $3 \times 3$  矩阵。它们的元素称为本构参数。我们将本构关系写成上述形式的理由是基于相对论的考虑。首先，场  $\mathbf{E}$  和  $c\mathbf{B}$  在四维空间构成一个单一的张量， $c\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  也是这样。其次，本构关系写成(1.15)的形式是洛伦兹协变的。这些方面将在第二章讨论。

方程(1.15)可以再写为下面形式

$$\begin{bmatrix} c\mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{C}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ c\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (1.16a)$$

其中  $\overline{\mathbf{C}}$  是一个  $6 \times 6$  本构矩阵：

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{P}} & \overline{\mathbf{L}} \\ \overline{\mathbf{M}} & \overline{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (1.16b)$$

它具有导纳的量纲。

本构矩阵  $\overline{\mathbf{C}}$  可以是空间时间坐标的函数，热力学的和连续力学的变量，或电磁场强度的函数。按照  $\overline{\mathbf{C}}$  的函数依从关系，我们可以将各种不同媒质分类为：(i) 不均匀的，如果  $\overline{\mathbf{C}}$  是空间坐标的函数，(ii) 不稳定的，如果  $\overline{\mathbf{C}}$  是时间的函数，(iii) 时间色散的，如果  $\overline{\mathbf{C}}$  是时间导数的函数，(iv) 空间色散的，如果  $\overline{\mathbf{C}}$  是空间导数的函数，(v) 非线性的，如果  $\overline{\mathbf{C}}$  是电磁场的函数，等等。一般情况下， $\overline{\mathbf{C}}$  可以是积分微分算子的函数并可与其它物理学科的基本方程联系在一起。在本书中我们关心的是线性媒质。

我们已经通过用  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  表示  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  的方法定义了本构关系。我们也可以把本构关系表示为  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{B}$  是  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  的函数的形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{C}}_{EH} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (1.17a)$$

式中

$$\overline{\mathbf{C}}_{EH} = \begin{bmatrix} \overline{\epsilon} & \overline{\xi} \\ \overline{\zeta} & \overline{\mu} \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{P}} - \overline{\mathbf{L}} \cdot \overline{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{M}} & \overline{\mathbf{L}} \cdot \overline{\mathbf{Q}}^{-1} \\ -\overline{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{M}} & \overline{\mathbf{Q}}^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.17b)$$

这里  $\overline{\mathbf{C}}_{EH}$  是在  $\mathbf{EH}$  表示法下的本构矩阵。也可藉  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{D}$  表示  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$ ，我们写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{C}}_{DB} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (1.18a)$$

式中

$$\overline{\mathbf{C}}_{DB} = \begin{bmatrix} \overline{\kappa} & \overline{\chi} \\ \overline{\gamma} & \overline{\nu} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{P}}^{-1} & -\overline{\mathbf{P}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{L}} \\ \overline{\mathbf{M}} \cdot \overline{\mathbf{P}}^{-1} & \overline{\mathbf{Q}} - \overline{\mathbf{M}} \cdot \overline{\mathbf{P}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{L}} \end{bmatrix} \quad (1.18b)$$

这里  $\overline{\mathbf{C}}_{DB}$  是在 **DB** 表示法下的本构矩阵。没有列出用 **H** 和 **D** 表达 **E** 和 **B** 的另一种可能的结构，因为在以后的推演中不需要。

### 1.2b 对称条件

在时谐激励下，本构矩阵  $\overline{\mathbf{C}}$  通常是复数的，并且是依赖于频率的。在无源区，其中  $\mathbf{J}=0$ ，鉴于坡印亭定理(1.10)，坡印亭矢量的散度的时间平均值是

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [i\omega (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*)] \\ &= \frac{1}{4} \{ [i\omega (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*)] + [i\omega (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*)]^* \} \\ &= \frac{1}{4} i\omega \left[ \frac{1}{c} \mathbf{E}^* \cdot (\overline{\mathbf{P}} - \overline{\mathbf{P}}^+) \cdot \mathbf{E} + c \mathbf{B}^* \cdot (\overline{\mathbf{Q}}^+ - \overline{\mathbf{Q}}) \cdot \mathbf{B} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E}^* \cdot (\overline{\mathbf{L}} + \overline{\mathbf{M}}^+) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}^* \cdot (\overline{\mathbf{L}}^+ + \overline{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{E} \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

如果  $\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle < 0$ ，媒质可以划归为无源的；如果  $\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle > 0$ ，则划归为有源的；如果  $\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = 0$ ，则划归为无损耗的。对无损耗媒质，从(1.19)式我们获得**无损耗条件**

$$\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{P}}^+ \quad (1.20a)$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}^+ \quad (1.20b)$$

$$\overline{\mathbf{M}} = -\overline{\mathbf{L}}^+ \quad (1.20c)$$

式中上标+表示转置和复共轭。

在 **EH** 表示法下，(1.20)可以转换成

$$\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}^+ \quad (1.21a)$$

$$\overline{\mu} = \overline{\mu}^+ \quad (1.21b)$$

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}^+ \quad (1.21c)$$

在 **DB** 表示法下，无损耗条件变成

$$\overline{\kappa} = \overline{\kappa}^+ \quad (1.22a)$$

$$\overline{\nu} = \overline{\nu}^+ \quad (1.22b)$$

$$\overline{\chi} = \overline{\chi}^+ \quad (1.22c)$$

对非色散媒质，其中所有本构参数都是实数，

$$\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{P}}^t \quad (1.23a)$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}^t \quad (1.23b)$$

$$\overline{\mathbf{M}} = -\overline{\mathbf{L}}^t \quad (1.23c)$$

式中上标  $t$  表示矩阵的转置。从(1.20)和(1.23)可以看出  $\overline{\mathbf{M}}$  完全决定于  $\overline{\mathbf{L}}$ 。矩阵  $\overline{\mathbf{P}}$  和  $\overline{\mathbf{Q}}$  是厄米特(hermitian)矩阵；当它们是实数时，它们是对称的。矩阵  $\overline{\mathbf{P}}$  具有 6 个独立元素， $\overline{\mathbf{Q}}$  也是如此。 $\overline{\mathbf{L}}$  一般具有 9 个元素。因而本构矩阵  $\overline{\mathbf{C}}$  包含 21 个独立元素。

### 1.2c 各向同性、各向异性和双各向异性媒质

在本构关系的定义中,本构矩阵 $\bar{\mathbf{L}}$ 和 $\bar{\mathbf{M}}$ 把电场和磁场联系起来。当 $\bar{\mathbf{L}}$ 和 $\bar{\mathbf{M}}$ 不恒等于零时,媒质是双各向异性的。当电场和磁场之间没有耦合时, $\bar{\mathbf{L}}=\bar{\mathbf{M}}=0$ ,媒质是各向异性的。对各向异性的媒质,如果 $\bar{\mathbf{P}}=c\epsilon\bar{\mathbf{I}}$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}=(1/c\mu)\bar{\mathbf{I}}$ (用 $\bar{\mathbf{I}}$ 表示 $3\times 3$ 单位矩阵),则媒质是各向同性的。

**各向同性媒质** 各向同性媒质的本构关系可以简单地写成

$$\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E} \quad \text{式中}\epsilon=\text{电容率} \quad (1.24a)$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \quad \text{式中}\mu=\text{磁导率} \quad (1.24b)$$

这样,场矢量 $\mathbf{E}$ 平行于 $\mathbf{D}$ ,而场矢量 $\mathbf{H}$ 平行于 $\mathbf{B}$ 。在没有任何物质的自由空间里, $\mu=\mu_0$ ,  
 $\epsilon=\epsilon_0$ ,

$$\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\text{亨利/米} \quad (1.25a)$$

$$\epsilon_0\approx 8.85\times 10^{-12}\text{法拉/米} \quad (1.25b)$$

在材料媒质内部,电容率 $\epsilon$ 由媒质的电性质决定,磁导率 $\mu$ 由媒质的磁性质决定。

电介质材料可用一个自由空间部分和一个只是单独由材料媒质所引起的部分来描述。材料部分可用极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 表征,使 $\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ 。极化强度 $\mathbf{P}$ 表示电介质材料每单位体积的电偶极矩。在有外电场作用下,极化强度矢量可以是由感生偶极矩、媒质的永久偶极矩的排列成行、或离子电荷的徙动所引起。

磁性材料也可用一个自由空间部分和一个用磁化强度矢量 $\mathbf{M}$ 表征的部分来描述,使 $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{M}$ 。如果 $\mu\leq\mu_0$ ,媒质是抗磁性的;如果 $\mu\geq\mu_0$ ,媒质是顺磁性的。抗磁性是由感生磁矩所引起,这些磁矩倾向于反对外加磁场。顺磁性是由于磁矩的排列成行所引起。当在一不均匀的磁场内放置一抗磁性的材料时,则它倾向于向较弱磁场的区域运动,而放置一顺磁性的材料时,则它倾向于向较强磁场的区域运动。铁磁性和反铁磁性都是高度的非线性效应。铁磁性物质由在居里温度以下自发磁化所表征。媒质也依赖于施加场的历史,并在很多情况下磁化曲线形成一磁滞回线。在反铁磁材料内,自旋构成亚点阵,在尼尔(Néel)温度以下,这些亚点阵以反平行排列自发磁化。

在存在时变场的情况下,对绝大多数媒质而言,时间色散是共同的现象。举例来说,当频率从零增加到光频的范围时,水的电容率从 $80\epsilon_0$ 下降到大约 $1.8\epsilon_0$ 。这个电容率下降的原因是,在光的频率范围内,具有永久偶极矩的水分子排列成行的作用较之慢变场内排列成行的作用差得多。举另外一例,试研究电子等离子体的电容率:

$$\epsilon(\omega)=\epsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad (1.26)$$

式中等离子体频率 $\omega_p$ 被定义为

$$\omega_p=\sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}\approx 56.4\sqrt{N}$$

并且

$e =$  电子电荷  $= -1.6 \times 10^{-19}$  库仑

$m =$  电子质量  $= 9.1 \times 10^{-31}$  千克

$N =$  电子密度

方程(1.26)明显地表示出电容率  $\epsilon$  对频率的依从关系。应该注意,  $\epsilon$  总是小于  $\epsilon_0$ 。方程(1.26)是在习题 1.4 中假定无碰撞过程的条件下导出的。

在电子等离子体内的碰撞过程消耗能量并且引起吸收。令碰撞频率  $\omega_{eff}$  代表每单位时间内一个电子遇到的有效碰撞数目。电容率变成(参看习题 1.5)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[ \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} \right) - i \frac{\omega_{eff} \omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \omega_{eff}^2)} \right] \quad (1.27)$$

虚数部分也可以看作是电导项, 因为电导也说明损耗。因为我们的兴趣在于电容率的各种形式, 所以我们把电导作为  $\epsilon$  的一个虚数部分来处理。从安培定律我们容易信服, 具有电导  $\sigma$  的媒质等效于在它的电容率中附加上虚数部分  $\frac{\sigma}{\omega}$  的一种电介质媒质。比值  $\sigma/\omega\epsilon$  通常称为媒质的**损耗正切**。看得出来, 有损耗媒质的电容率是违背无损耗条件(1.21a)的。时间色散媒质的复电容率的实部和虚部是由克莱姆-科隆(Kramers-Kronig)关系式联系在一起, 它是一个因果性的陈述, 并在习题 1.3 中推导出。

**各向异性媒质** 各向异性媒质的本构关系通常用 **EH** 表示法写成

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad \text{式中 } \bar{\epsilon} = \text{电容率张量} \quad (1.28a)$$

$$\mathbf{B} = \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad \text{式中 } \bar{\mu} = \text{磁导率张量} \quad (1.28b)$$

场矢量  $\mathbf{E}$  不再平行于  $\mathbf{D}$ , 而场矢量  $\mathbf{H}$  也不再平行于  $\mathbf{B}$ 。一媒质如果被电容率张量  $\bar{\epsilon}$  描述, 则它是**电各向异性**的; 一媒质如果被磁导率张量  $\bar{\mu}$  描述, 则它是**磁各向异性**的。注意, 一种媒质可以同时是电和磁各向异性的。

晶体通常用对称电容率张量来描述。在那里总是存在一种坐标转换, 它将一对称矩阵变换为一对角线矩阵。在这个称为**主系**的坐标系中

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

这三个坐标轴称为晶体的**主轴**。对立方晶体,  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$ , 因而它们是各向同性的。在四角形、六角形和菱形晶体中, 这三个参数中有两个是相等的。这样的晶体是**单轴**的。这里有一种二维简并性; 呈现这个各向异性的主轴称为**光轴**。对一具有

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

的单轴晶体, 其  $z$  轴是光轴。如果  $\epsilon_z > \epsilon$ , 晶体是**正单轴**的; 如果  $\epsilon_z < \epsilon$ , 晶体是**负单轴**的。在正交晶系, 单斜晶系和三斜晶系的晶体中, 所有三个晶轴均不相等。此时  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ , 而媒质是**双轴**的。



当施加一个外部直流磁场  $\mathbf{B}_0$  时, (1.26) 所描述的电子等离子体变成各向异性的。电容率张量在  $\mathbf{B}_0$  是沿  $\hat{z}$  方向的假定条件下变为

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & -i\epsilon_g & 0 \\ i\epsilon_g & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

磁场经由回旋频率  $\omega_c$  影响本构参数:

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m}$$

(1.31) 的参数由下式定义:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \right) \\ \epsilon_g &= \epsilon_0 \left( \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \right) \\ \epsilon_z &= \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

在无限强磁场的情况下, 我们有

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 \\ \epsilon_g &= 0 \\ \epsilon_z &= \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

且等离子体变成一单轴媒质。

一种由厄米特电容率张量例如(1.31)所表征的各向异性媒质, 称为**回电媒质**或**电回媒质**。一种由厄米特磁导率张量  $\bar{\mu}$ , 例如

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & -i\mu_g & 0 \\ i\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

所表征的各向异性媒质称为**回磁媒质**或**磁回媒质**。一个例子是在  $\hat{z}$  方向受直流磁场作用的铁氧体。应该注意, 在回旋媒质内的回旋元素虽然是虚数, 但并不说明任何损耗。正如我们已经证明的, 无损耗条件要求电容率和磁导率张量应为厄米特张量。但是, 当引入吸收效应之后, 电容率和磁导率张量就不再是厄米特张量了。

**双各向异性媒质** 对各向同性或各向异性媒质, 本构关系用一标量或者用一张量将两个电场矢量和两个磁场矢量联系在一起。这样的媒质当放在电场中时将被极化, 放在磁场中时将被磁化。一个双各向异性媒质提供电场和磁场间的交叉耦合。当把一个双各向异性媒质放进一个电场或者一个磁场中时, 它将同时变成被极化和被磁化。

由柴洛申斯基<sup>32</sup>(Dzyaloshinskii)和由朗道(Landau)和栗弗席兹<sup>65</sup>(Lifshitz)从理论上预言的磁电材料, 在1960年由阿斯特洛夫<sup>4</sup>(Astrov), 在反铁磁性铬氧化物中通过实验观察到。柴洛申斯基为铬氧化物提出的本构关系有如下形式: