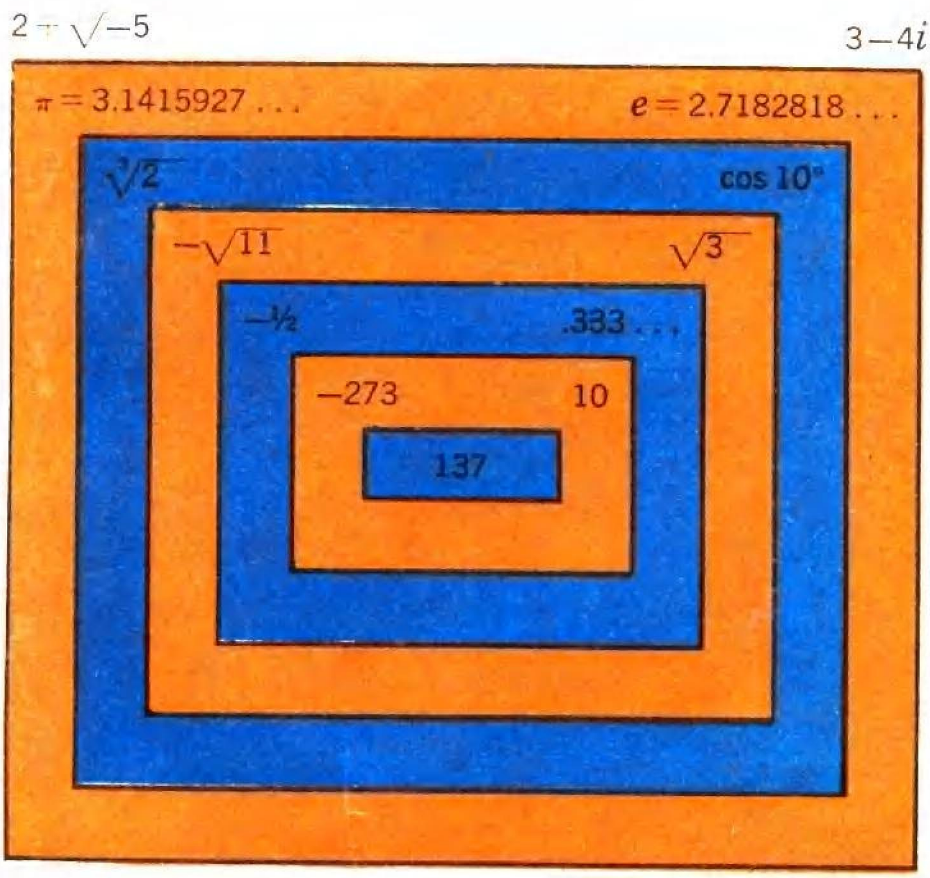
有理數

及無理數

譯者　王昌銳



徐氏基金會出版

有理數及無理數

譯者　王昌鋭

徐氏基金會出版

內政部登記証內版台業字第1374號

有理數及無理數

中華民國五十九年 二 月 25 日初版

出版者 徐氏基金會出版部
台北郵政信箱3261號
香港郵政信箱1284號

發行人 鄧普賢
台北郵政信箱3261號

譯 者 王昌銳
台灣省立高雄工業專科學校教授

印刷者 大興圖書印製有限公司
地址：三重市三和路四段一五一號
電話：九七一五四〇五

定 價 新台幣 二十五元
港 幣 四元

改訂為基價1.30

JU1114413

徐氏基金會

爲翻譯出版最新科學技術書籍啓事

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

各地區總經銷

台灣：金馬

(1)新亞出版社

台北市懷寧街82號

電話：330215

(2)台灣英文雜誌社

台北市西寧南路121號

電話：331376　334565　365076

星加坡：馬來西亞

友聯書局

星加坡小坡大馬路33號

香港

(1)友聯書報發行公司

九龍花園街73號

電話：K-882373　853425　858458

(2)亞洲出版社書店

九龍亞皆老街64號

香港波斯富街120號

電話：K-841771　H-768050

美洲

Far East Enterprise Co., Inc.
232 Canal Street
New York, N. Y. 10013
U. S. A.

海內外各大書店均出售

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要愼密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數（Numbers: Rational and Irrational）
2. 微積分研究（What is Calculus About ?）
3. 不等式論(An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式(Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗（第一册）（The MAA Contest Problem Book 1）
6. 大數論（The Lore of Large Numbers）
7. 無窮數之妙用（Uses of Infinity）
8. 幾何移轉（Geometric Transformations）
9. 連分數（Continued Fractions）
10. 圖形及用途（Graphs and their Uses）
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册）（Hungarian Problem Book 1）
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册）（Hungarian Problem Book 11）
13. 數學史話(Episodes,from the early history of mathematics)
14. 群與圖(Groups and their Graphs)
15. 特別數學(Mathematics of Choice,or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦（From Pythagoras to Einstein）
17. 高中數學測驗（第二册）（The MAA Contest Problem Book 11）
18. 拓樸學基本概念（First Concepts of Topology）
19. 幾何研究（Geometry Revisited）
20. 數目理論入門（Invitation to Number Theory）

致讀者

本書係數學專家，所撰新數學文庫之一，其目的在確立中等學校學生及社會人士之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本書內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。所以，讀者如欲憑一己造詣，以瞭解全書內容，勢須加倍努力。

讀者已往，如僅於教室中接觸數學，則應記住，數學課程，不能迅速從事，亦不可一覽之餘，即望有所心得於全豹，而應越過複雜繁難部份，俟後再回頭研究，後續之精讀，常能澄清理論，求得澈底瞭解。反之，內容熟悉之部份，則可快速閱讀。

學習數學的最好方法，爲多做習題，各書所附習題，有些頗爲艱深，需要縝密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

對著者與編者而言，此爲新的嚐試，謹對協助此種專書編撰之中等學校師生，表示由衷謝意。

編者

譯序

數學是研究數目和與數目有關的一切事物之學門．所以，數目爲數學主要內容，如無數目，便無數學可言．

人類日常生活，現代昌明科學．幾無一可離數學而獨存！所以，今日世界，爲數學世界．今日科學，爲數的科學；如謂數學爲科學之母，現代文明之源，一點也不誇張．

談到數目，應由歷史最悠久之計數的 1，2，3，4，5，6，7，8，9，… 等自然數開始．一切數目，均可由之配合以後發明的 0，構成無窮多的數字排列與組合，形成無法以數計之數目．或謂“自然數爲上帝所創”，足以概其妙用無窮．

數有奇偶之分，又有正負之別．奇如 1，3，5，7，…，$2n+1$；偶如 2，4，6，8，…，$2n$；正如 1，2，3，4，…，n；負如 -1，-2，-3，-4，…，$-n$．此奇，偶，正，負之數，與 0 結合，遂成 $-n$，$-n-1$，…，-3，-2，-1，0，1，2，3，…，$n-1$，n，稱爲整數．整數比率如 3/1，3/4，3/5，…者，稱爲有理數．而此有理數與整數（負，零，正數）構成實數．非有理之實數如 $1+\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{2}$ 及 π …，稱爲無理數．-1 之平方根爲 i，而 $i^2=-1$，此 i 稱爲虛數．數目之具虛實兩部份，形如 $a+bi$ 者，謂之複數，其中 a 爲實數部份，而 bi 爲虛數部份．

此外，復有如 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$，$\cot\theta$，$\sec\theta$，及 $\csc\theta$ 之三角函數值，與 $\sin^{-1}x$，$\cos^{-1}x$，$\tan^{-1}x$，$\cot^{-1}x$，$\sec^{-1}x$ 及 $\csc^{-1}x$ 之反三角函數值，謂之三角數目，又有如 $\log_{10}x$ 之對數數目，如 e^x，a^x 之類的指數數目．且亦有 $\sinh x$，$\cosh x$，$\tanh x$，$\coth x$，$\operatorname{sech} x$ 及 $\operatorname{csch} x$ 之類的雙曲線函數數目，總稱之曰超

越數，而此等超越數目，除極少數之特殊情況而外，幾全爲無理數．所以今日數學中所遭遇之數目，有理數固多，而無理數亦夥．可以說，所有數目，不論其爲何種數目——代數的或超越的，均可以有理數及無理數二者，而概括之．所以研究算學，代數，幾何，三角，解析幾何，微積分等數學者，應先研討有理數及無理數，以解決數學之靈魂——數目之謎，方能得心應手，左右逢源．

本書爲美國數學協會所編“新數學文庫”之一種．專門討論有理數及無理數二端．對有理數及無理數所含各種數目之分類，來源，性質，表示方法，定義賦予，以及作業運用上之定理原理…，均一一於本書探討，說明，示範，證定．對於我國中等以上學校師生之數學進修，頗多助益，故予迻譯，以應當前革新教育，發展科學之需要．本書譯名，力求通俗，重要名詞術語，且留綴原名，以利讀者瀏覽參證．

本書譯稿，多勞吾妻蔣君英女士協助繕校，遂得早觀厥成，深致謝意．本書出版，復蒙徐氏基金會之多方鼓勵與指導，銘感無旣．

中華民國五十八年七月七日
湘潭王昌銳序於高雄工專

引言

最簡單之數目，爲用於計數之全部正數1，2，3，…之類，均稱爲自然數（Natural numbers），而已與吾人相處達幾千年之久。名數學家克洛耐卡（ Kronecker ）曾有名言：“上帝創造自然數，所有其餘，爲人類所爲。”

逐日生活之基本需求，引致如1/2，2/3，5/4 之類普通分數之介紹。此種數目，稱爲有理數（ rational numbers ），非因“合理”，但以其爲所有數目之比率也。

沿一直線，可定諸點，來表示自然數（圖1），每點與前一點相隔一個長度單位，有如量帶上之吋數，亦可於同一直線（圖2），以

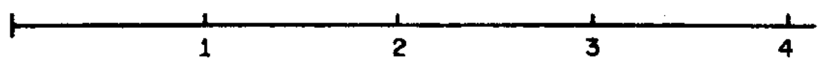


圖 1

長度表示分數。

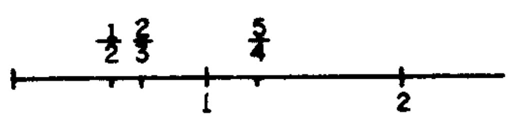


圖 2

後來，衡度司（ Hindus ）發明極重要之數目0，而於現時代之始，意大利代數學家，發明負數，亦均可於直線上表示，如圖3。

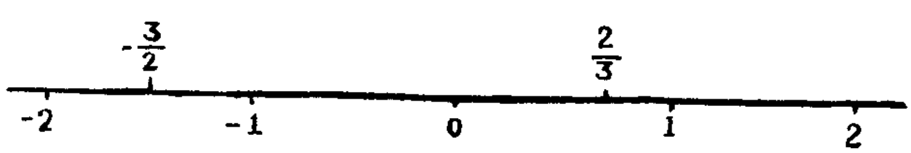


圖 3

每當數學家談及有理數時，即指全部正數與負數（能表示如比率者，如$2 = 2/1 = 6/3$，等），零，及普通分數。所有之正，負數及零，亦稱整數（integers），因此，有理數級中，包含整數級。

2500多年以前，希臘人即發現普通分數，尚不足以達成幾何目的，驚詫之餘，而謂邊長爲一單位之方形對角線長度（圖4），不能以任何有理數表示（將於第三章證明）。今日，乃曰2之平方根（根據畢達哥拉司定理，此爲斯方形對角線長度）爲一無理數，以釋此事實，其於幾何方面之意義，乃迄無共通長度單位，又無共通良好網眼，能適應於方形之邊及對角線兩者。換言之，無長度單位，且不論其爲如何小，可使方形之邊與對角線，爲該單位之倍數，對希臘人而言，此爲驚人發現，因於許多幾何證明中，均曾假定，給予任兩線段，

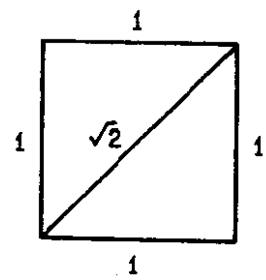


圖 4

均將成爲共同長度單位，由是，歐幾里得（Euclidean）幾何之邏輯構想，有一漏洞——比率及長度比例討論欠完密，於3；7節中，將顯示如何彌此缺漏，並使比例理論完美。

同樣的，圓周爲直徑之無理數如π的倍數。當計算數學中之某些基本函數時，即可出現其他無理數，例如，欲求三角函數如$\sin x$之數值時，如x有$60°$，乃引致無理數$\sqrt{3}/2$；同此，如求算對數函數$\log x$，即令對x有理值，通常仍引致無理之數，雖對數及三角函數表中，所列數字，似均有理，實則均僅爲除少數例外而外，均爲無理之眞值有理近似值。然後知無理數，於基本數學中，以各種自然方式出現。

實數（Real numbers）包括所有的有理數及無理數，以形成數學之中心數系，於幾何中，任何長度，面積或體積之討論，立刻引致實數，其實，幾何提供一描述實數之簡單直覺的方法，該類實數又爲

用已知單位長度，量度一切可能長度之所需，如復考慮以直線諸點代表數目，乃知無論任何線段爲如何小，包含無窮多數之有理點，而有許多其他之點（如$\sqrt{2}$，π之類），所量長度，不能以有理數表示，但一當所有實數已列入計算，線上各點，恰對應一個實數，而各實數，恰對應線上一點，一切長度，能表示爲一實數之事實，名爲此等數字之完整性（ Completeness Property ），而此性質，却基於數學分析之全盤發展。

由是，實數有兩種，卽有理與無理是，最近另有將實數分成代數數（Algebraic numbers）及超越數（Transcendental numbers）兩類者。實數之能滿足某整係數代數方程式者，曰代數數，例如$\sqrt{2}$滿足$x^2-2=0$，而爲代數數。如數非代數者，則爲超越者。由此定義，並不表示有任何非代數之超越數。於1851年，法國數學家來奧威爾（Liouville）確定有超越數存在。來氏展示其所證明之非代數數目以從事此務，於第七章，將引用來氏方法，以確立超越數之存在性。

十九世紀末，已證明π爲超越數。此結果遂決定名爲“方等於圓”之古代作圖問題。此於第五章論之。十九世紀之另一進展，係德國數學家康德（Cantor ）所爲，而用完全不同途徑，確立超越數之存在性。雖康德法反於來氏法；未以明顯方式，展示超越數，於某種意義中，依然有其示範之利，更多超越多於代數之數，如斯說明，因有無窮多之代數數及無窮多之超越數，而需無窮種類之比較。此類觀念，有於本書主要討論中略去者，故康德超越數存在性之證明，於附錄C中提出。

本書計於首三章，提示自然數，整數，有理數，及實數。而後於第四章，提供辨別無理數之標準方法。第五章論及所謂之三角與對數數目，而此類數目，其値均約略提供於三角及對數函數表中。第六章處理如何使用有理數求無理數近似値，達何種接近度之問題。本章較以前各章，遠爲艱難而特別，以予讀者一種新數學理論之探討機會。

第七章與附錄C，提供兩完全無關之超越數存在性證明，第七章用來氏法，附錄C用康德法。兩者方法迥異，讀者可細味之。第七章

之證明，充滿不可避免之詳細方法；即令多於以前各章，讀者仍應用筆與紙，追隨理論．其實，讀者可能發現一至五章，不甚困難．第六章較難，而第七章幾不可能．於斯情況，建議讀者，俟有較多數學經驗後，再研究第七章．反之，任何讀者，於閱讀一至五章中極少發生困難，則應於第六章以前，先讀第七章．其實，第七章除6·1節所示有名的不等式定理而外，與書中其餘部份並無關連．

附錄C，除必需之定理7·2因子定理而外，能與第七章分開閱讀．如讀者不熟稔於集合論，將見附錄C之觀念，極爲新奇．

關於質數無窮之附錄A，非本書發展理論之所必要，因其與主題之密切關係，且因此優美定理，爲期遠至歐幾里得時代，遂採納之．反之，關於算術基本定理之附錄B，則係理論之所必需，特別對第四與五章爲尤然．本定理之證明，因較首五章中證明，爲冗長與艱難，遂略．對數學無造詣之讀者，相信能接受算術基本定理．

各節之末，均有許多習題，讀者應試求解答其大多數，以測驗對本書之瞭解程度（專看別人作題，不能學好數學）．凡註有星標之習題，表示比較困難．讀者如不能全部解出，應勿沮喪，其成功常基於其數學修養，即其由其他數學研究，對數學程序，能作良好而廣泛之選擇．書末附有習題答案，且對較難習題，提出少數解法建議．

有理及無理實數體系，可於幾種直截方法獲致．（直截一詞，用於數學方法，以示一課題由縝密邏輯立場，發展之程度，此立場反於更直覺之地位，其中，因其表現合理而自然，乃認爲正確而可接受之定則．）吾人之目的，係陳示沿一正常直線，主體數之第一觀察．由是，對此研究，未提供作爲基礎之原理與假設．本書落入有先見之數學家手中，必可發現一種考查實數體系原理發展之途徑．何以致此？其理由爲吾人此處之觀點，係如此描敍，而留置某些未答覆之基本問題也．例如第三章中，謂實數能如何如何敍述，但對此同一體系之各種說法，如何方能決定？本書並未對一問題之具體範例作答．如何可知$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$或$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{35}$？欲答覆如此問題，應提供無理數作業之精確定義．因其不如其所表現之容易，將不於此作爲，而最好將此類處理，留待學生不僅具有更佳數學技能，但亦具有數

學證明本質與意義之較深體認時行之，正如美國數學家莫勒（E.H. Moore）所云：熟能生巧，水到渠成。

“數學證明之本質與意義”！現在不可能於此地提出甚麽建立證明之說明，而於此留下極爲困惑問題之一於初學數學之徒。如證明本質不能描述或詳細確立，如何能令人學習？如孩童學習辨別顏色一樣，可使用非常簡單之方法從事學習，如觀察旁人辨別綠色物品，藍色物品…之類，而後就其所見而模仿之。最初，可能由於對分類或形態之瞭解不夠，導致失敗，但最後，學者必得熟練，而對數學證明之謎，亦可如此而解。有些討論，冀圖於證明方法之型態上射出光芒，而以此用說明與證明方法啟示讀者．由是，當不能提出有效證明孰是孰非之恰當方法時，即說明此點．而望讀者，於讀畢此書之前，將不僅瞭解有效證明，但將以自行有所建白爲樂。

目　錄

第一章 自然數及整數

數學之數字體系，始於日常用於計數之數目，

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \cdots.$$

此爲稱作自然數之全正數。最小之自然數爲1，但無極大之自然數，以不論所選之數爲如何大，仍有更大之數在也。由是而謂具有無窮多之自然數。

如任兩自然數相加，結果將爲一自然數，例如$4+4=8$及$4+7=11$。同樣，如任兩數相乘，其積仍爲自然數；例如$4\times7=28$。此兩性質，可謂自然數於加法下結合，於乘法下結合而簡括之。換言之，如已有一目標（如所有自然數集合）之集合，及一作業（如加法），以致不問對集合之何數實行作業（如4與7），其和復爲原集中之一，則謂集合於該作業下結合。假設僅考慮數目1，2，3。此集合僅有三數，因$1+3=4$，而4非集合中數，乃不於加法下結合。當語及自然數集合時，將意謂一切自然數之集合。如望僅考慮其中之一部份，則將指明何者含於集合之中。由是而知自然數集合於加法下結合，但僅含三自然數1，2，3之特別集合，則否。

自然數於減法下不結合。欲明乎此，僅需顯示一自然數由另者減去之各減法，不一定引致自然數。例如，由4減7之結果-3，即非自然數。當然，如由7減4，結果得自然數3，然根據吾人所予定義，尙不能謂一數字集合，於減法下結合。除非各種可能減法之結果，含於集合之中。同樣的，因4爲7所除，結果爲分數$4/7$，並非一自然數，因而自然數不於除法下結合。

於許多情況中，常發現兩自然數能相除而得一自然數爲商之結果