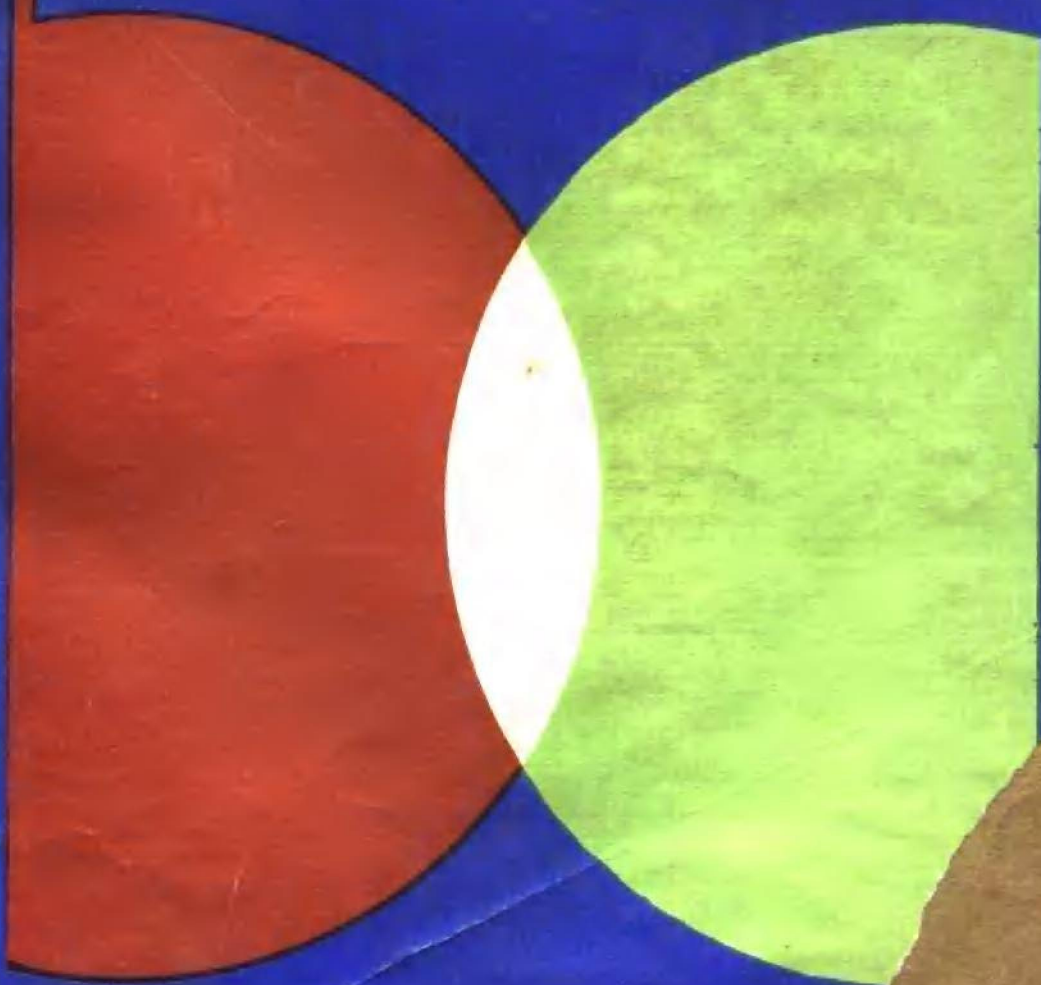


物理光学

● 范少卿 郭富昌 编



● 北京理工大学出版社

物 理 光 学

范少卿 郭富昌 编

北 京 理 工 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书从光的波粒二象性基本观点出发,全面介绍了光的物理现象及规律,是工科高等学校光学类专业的专业基础课教材。

全书共分七章:第一~四章为波动光学部分,第五~七章为量子光学部分。在内容上注意介绍光的重要物理规律的应用,重视理论与实际的结合。

本书可供光学行业工程技术人员及高等学校有关专业师生参考。

物 理 光 学

范少卿 郭富昌 编

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印刷

787×1092毫米 16开 17.125印张 424千字

1990年8月第一版 1990年8月第一次印刷

ISBN 7-81013-348-9/O·67

印数:1—2200册 定价:3.10元

前 言

本教材是根据北京理工大学光学仪器专业《物理光学》课的教学大纲编写的。内容分为波动光学和量子光学两部分。前者包括光的电磁理论、光的干涉、光的衍射和傅里叶光学基础、光在各向异性介质中传播的偏振现象等；后者包括分子光学、光量子现象、发光和激光等。和过去相比，在内容上作了一些变化。一是将全息照相、光学信息处理和光学传递函数等傅里叶光学的内容和衍射放在一起讨论；二是大大增加了量子光学部分的内容。根据多年的教学实践，编者认为，对于工科大学光学仪器专业的学生来说，这些是必需的光学基础知识，也是学习后续有关专业课程的预备知识。

讲授本书内容需课内90学时左右，如果不讲傅里叶光学或最后两章，只需70学时左右。这几部分内容具有相对的独立性，不讲它们对讲授其他部分没有影响。

这本教材在文字和系统上也考虑到了自学的可能性，可以作为中级光学技术人员加强理论基础而自学的参考书。

限于编者水平，有欠妥或错误之处，望使用这本教材的师生及同志们批评指正。

编 者

1989.7

目 录

第一章 光的电磁理论基础

§ 1.1 引 言	(1)
§ 1.2 波 动	(2)
一、振 动	(2)
二、波动和波函数	(3)
三、波动微分方程	(6)
四、平面波和球面波	(6)
五、波 前	(9)
§ 1.3 麦克斯韦方程和电磁波	(11)
一、麦克斯韦电磁方程	(11)
二、均匀各向同性透明介质中的电磁波	(12)
§ 1.4 偶极辐射和光源发光	(15)
§ 1.5 反射和折射——菲涅耳公式	(19)
一、菲涅耳公式	(19)
二、菲涅耳公式的推导	(20)
三、菲涅耳公式讨论	(23)
习 题	(30)

第二章 光的干涉

§ 2.1 波的叠加和光的干涉现象	(32)
一、两束光干涉的条纹	(32)
二、波的叠加和相干光波	(34)
§ 2.2 分波前干涉——菲涅耳型干涉	(37)
一、菲涅耳型干涉条纹的特性	(37)
二、菲涅耳型干涉装置	(40)
三、普通光源的大小对条纹对比的影响 光源的空间相干性	(42)
§ 2.3 干涉场的光信息记录(全息记录)特性	(46)
一、物体的光信息	(46)
二、干涉场中的波前信息	(46)
三、光信息的照相记录	(48)
§ 2.4 分振幅干涉——薄板两束光干涉	(49)
一、薄板干涉概述	(49)
二、等倾干涉和迈克尔逊干涉仪	(52)
三、光源的时间相干性	(54)
四、等厚干涉	(58)
§ 2.5 多束光干涉	(62)
一、光栅干涉	(63)

二、薄板上的反射和透射	(66)
三、薄板多束光干涉	(68)
四、法布里-珀罗干涉装置	(71)
§ 2.6 干涉镀膜原理	(74)
一、增透膜原理	(74)
二、增反膜原理	(77)
三、干涉滤光片原理	(79)
习 题	(81)

第三章 光的衍射和现代光学的基础知识

§ 3.1 绪 论	(84)
一、衍射现象和现代光学	(84)
二、惠更斯-菲涅耳原理和菲涅耳-基尔霍夫公式	(85)
三、衍射分类 菲涅耳衍射和夫琅和费衍射	(86)
四、巴俾涅原理	(88)
§ 3.2 菲涅耳衍射	(88)
一、菲涅耳波带法	(89)
二、圆孔和圆屏的菲涅耳衍射花样	(91)
三、菲涅耳波带板	(92)
四、直边和单缝的菲涅耳衍射	(93)
§ 3.3 单孔夫朗和费衍射和傅里叶变换	(96)
一、单缝衍射	(96)
二、矩孔衍射	(99)
三、圆孔衍射	(100)
四、单孔夫朗和费衍射的傅里叶积分运算	(102)
五、夫朗和费衍射和傅里叶变换	(104)
§ 3.4 光栅——多缝的干涉和夫朗和费衍射	(112)
一、多缝的干涉和衍射	(113)
二、光栅作为光谱仪器的性能	(116)
三、用傅里叶变换讨论光栅衍射	(119)
四、光栅类型	(123)
§ 3.5 全息照相	(127)
一、引 言	(127)
二、全息照相原理	(128)
三、全息图类型	(130)
四、全息照相应用简介	(133)
§ 3.6 空间滤波和光学信息处理	(135)
一、阿贝成像理论	(135)
二、阿贝-波特实验	(138)
三、频域处理系统和光学信息处理举例	(139)
§ 3.7 成像光学系统的像质评价和光学传递函数	(143)
一、成像系统的分辨率	(143)
二、像的形成和点扩散函数	(146)

三、物的频谱和余弦物的像	(149)
四、光学传递函数	(151)
习 题	(152)

第四章 光的偏振和光在各向异性介质中的传播

§ 4.1 偏振光和自然光	(156)
一、偏振光波的三种形态	(156)
二、偏振光和自然光	(158)
三、反射和折射偏振	(159)
§ 4.2 双折射现象和晶体的光学各向异性	(160)
一、双折射	(160)
二、晶体在光学上的各向异性	(162)
三、晶体的波阵面和惠更斯作图法	(164)
§ 4.3 晶体偏振器件	(165)
一、偏振器和马吕斯定律	(166)
二、晶体线偏振器件	(166)
三、晶片和补偿片	(168)
§ 4.4 偏振光的产生和检验	(170)
一、三种偏振光的产生	(170)
二、三种偏振光的检验	(172)
§ 4.5 偏振光干涉	(173)
一、平行光的色偏振(偏振光的等厚干涉)	(173)
二、会聚光的色偏振(偏振光的等倾干涉)	(175)
§ 4.6 旋光现象和法拉第效应	(176)
一、旋光现象	(176)
二、菲涅耳旋光理论	(178)
三、法拉第效应——偏振面的磁致旋转	(179)
§ 4.7 人为双折射现象	(180)
一、光弹效应	(181)
二、克尔效应	(181)
三、克尔磁光效应	(182)
四、普克尔斯(Pockels)效应	(182)
习 题	(183)

第五章 分子光学——散射、吸收和折射色散

§ 5.1 分子光学现象	(185)
一、光的散射	(185)
二、光的吸收	(187)
三、光的折射色散	(189)
§ 5.2 振荡电偶极子——经典的原子分子模型	(191)
一、带电粒子的电磁作用	(191)
二、电偶极子的电磁辐射	(192)

三、介质的电磁光学性质	(192)
四、自由电子和金属的电磁光学性质	(195)
§ 5.3 分子理论	(196)
一、光波在均匀透明介质中的折射和反射	(196)
二、散射的分子理论	(196)
三、折射色散和吸收的分子理论	(197)
习 题	(202)

第六章 光的量子效应和波粒二象性

§ 6.1 光的量子效应	(203)
一、光电效应	(203)
二、康普顿效应	(207)
三、光化学效应	(209)
§ 6.2 热辐射	(212)
一、基尔霍夫定律和黑体	(213)
二、黑体辐射和普朗克公式	(214)
三、能量子假设	(216)
§ 6.3 氢原子光谱和玻尔假设	(217)
一、氢原子光谱的规律	(217)
二、玻尔假设	(219)
三、玻尔第一假设和氢原子能级	(220)
四、玻尔第二假设和氢原子光谱	(221)
§ 6.4 波粒二象性	(223)
一、光的波粒二象性	(223)
二、物质波——微观粒子的波粒二象性	(224)
习 题	(230)

第七章 原子发光和激光

§ 7.1 原子的激发和发光	(231)
一、原子在能级上的分布	(231)
二、原子的激发	(233)
三、激活原子的辐射特性	(236)
四、原子光谱线的强度分布和谱线展宽	(239)
§ 7.2 受激发射和爱因斯坦辐射公式	(241)
一、受激发射	(241)
二、三种辐射跃迁几率和爱因斯坦辐射公式	(243)
§ 7.3 激光器原理(激光的产生)	(244)
一、概 述	(244)
二、光在激活介质中的放大	(245)
三、谐振腔中光的增益放大	(250)
四、几种激光器简介	(253)
§ 7.4 激光器原理(谐振腔的调制作用)	(255)

一、谐振腔的振荡频率 激光纵模	(255)
二、谐振腔的横模光斑和频率	(257)
三、基模高斯光束	(261)
习 题	(264)

第一章 光的电磁理论基础

§1.1 引言

光的电磁理论认为光波是电磁波，这是麦克斯韦首先从理论上提出的（1865年）。麦克斯韦整理了当时得到的电磁学基本定律（安培定律和法拉第定律），提出位移电流概念，得到表征电磁场的微分方程，预言电磁场以波动形式在空间传播，即存在电磁波，并指出光波是电磁波。

人们对光本性的认识只是17世纪以后的事。当时，由于几何光学的发展，制造出质量较好和较复杂的光学仪器（棱镜、望远镜和显微镜等），人们又发现了很多不能用几何光学解释的光学现象，如色散、薄膜颜色、小孔衍射和双折射等。因此，引起人们对光本性的探索，产生了牛顿的微粒说（1702年）和惠更斯的波动说（1690年）。

牛顿认为，光是从光源发出的微粒流，光粒子的运动遵守力学定律。光在界面上的反射就象小球射到平面上反弹回来一样，遵守反射角等于入射角的规律。光的折射是由于光粒子从第一种介质进入第二种介质时介质对光粒子的吸引力有所改变，因而光粒子的速度改变而引起的。

惠更斯根据光现象与声现象的相似性，认为光是一种弹性振动在一种特殊介质“以太”中的传播，光波就象水面受扰动时产生的水波一样。这种“以太”充满整个宇宙，渗入一切物体。惠更斯留给我们的有价值的东西还有确定光的传播方向的惠更斯原理：光振动某一时刻所到达的波前上的每一点都可以看做是次波的波源，从这些波源发出的次波的包面即形成另一时刻新的波前，新波前的法线方向就是光的传播方向（图1.1）。可以用惠更斯原理解释光的反射和折射现象，并从对折射率的定义上得到与牛顿说不同的结论：在较密介质中光的传播速度较小。

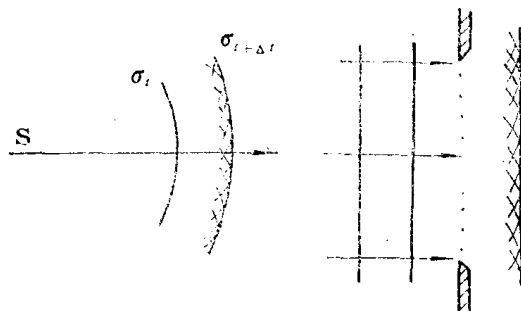


图1.1 惠更斯原理

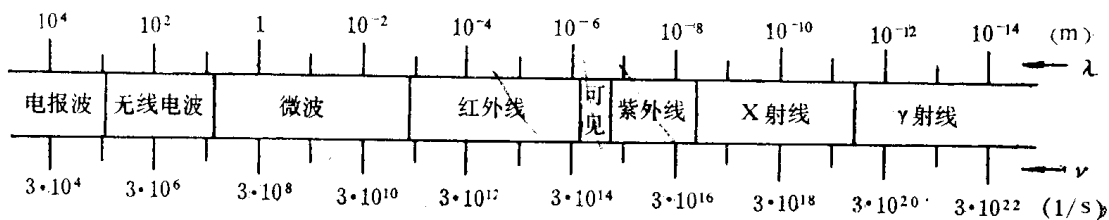
在以后的百余年中，由于牛顿的威望以及他在光学上的许多著名的工作（棱镜色散、牛顿环实验等），微粒说一直占优势。但是，波动说也在发展。1801年，杨氏完成双缝干涉实验，并解释了薄膜颜色。1815年，菲涅耳用杨氏干涉原理充实惠更斯原理而说明了衍射现象，并用弹性横波解释偏振现象。到1850年，傅科测出光在水中的速度比空气中小四分之一。至此，人们才抛弃牛顿的微粒说。但是，光波是“以太”介质中的弹性横波这个

概念给“以太”假说带来严重困难。因为弹性横波只能在固体中传播，其速度 v 由固体切变模量 G 和密度 ρ 决定： $v = \sqrt{G/\rho}$ 。由于光波有很大速度和以太“渗入”整个物质空间，必须假定“以太”是弹性极大而密度比气体还小的固体。并且，“以太”假说也完全割断了光现象和物质性质的联系。有些科学家为了解释日益增多的光学现象，给“以太”设置了种种奇特的性质以维持光现象的力学图象。

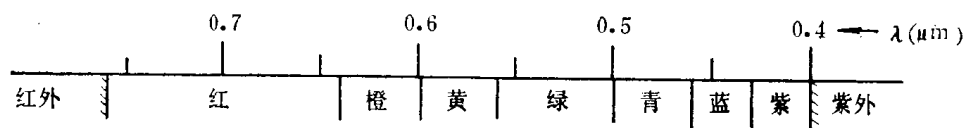
另一方面，人们发现了光和电磁的密切联系，如光波的振动面在磁场中旋转（法拉第效应，1864年），光在真空中的速度等于电磁单位和静电单位的比值（ 10^8m/s ）等等。在麦克斯韦从理论上判断“光是以场的形式按电磁规律传播的电磁扰动”以后，1888年赫兹用实验方法产生了电磁波，并进行了电磁波的反射、折射、偏振和干涉实验，证实了麦克斯韦的预言。至此，人们放弃了奇异的“以太”概念。

现在我们知道，可见光仅仅是电磁波中很小一部分，如表1.1所示。红外线、可见光和紫外线部分统称为光波，因为这部分电磁波是微观发射机理同类的光源发出的。

表1.1



(a) 电磁波谱



(b) 可见光波谱

在这一章中，我们先讨论一般的波动概念、波动公式和波动微分方程，以及平面波、球面波和波前概念。然后介绍麦克斯韦方程、电磁波的波动方程、平面电磁波和电偶极子的电磁辐射。最后，讨论颇为重要的光在介质分界面上的反射和折射。

§1.2 波 动

一、振 动

我们知道，一个物体在某一位置附近作往复运动，称为机械振动。广义地说，任何一个物理量在某一定值附近反复变化，即称为振动。例如，一个 $L-C$ 回路中的电流强度，以及其附近的电场强度和磁场强度都在随时间周期地变化着，称为电磁振动。

最简单最基本的振动是简谐振动，一个复杂的振动总可以用一些简谐振动的叠加表示。一个物理量 S 作简谐振动时表示成（图1.2）

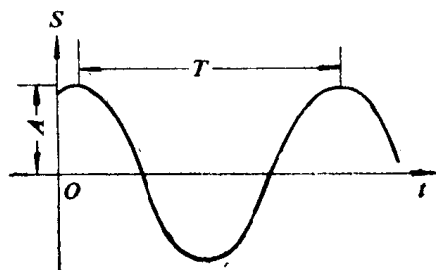


图1.2 振动曲线

$$S = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.1)$$

式中 A 是 S 变化的最大值，称为振动的振幅； $\omega t +$

φ_0 称为振动的周相（或位相）， φ_0 为初周相。显然，振动状态完全由周相决定，周相是振动中的最重要参量。 ω 是振动圆频率，注意到 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ ，用频率 ν 或周期 T 代替 ω 时，振动公式（1.1）还可写成

$$S = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

$$\text{或} \quad S = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right) \quad (1.2)$$

上述简谐振动的公式也可写成复指数形式

$$S = A \exp[j(\omega t + \varphi_0)] \quad (1.3)$$

当然，我们只取其实数部分或虚数部分（这样就和（1.1）式一样）。用复指数形式表示振动可以简化运算。

如果借用力学中的概念，称物理量 S 对时间 t 的一阶导数和二阶导数分别为 S 变化的速度 v 和加速度 a ，由（1.3）式可得

$$v = j\omega S = j\omega A \exp[j(\omega t + \varphi_0)] \quad (1.4)$$

$$a = -\omega^2 S$$

$$\text{或} \quad \frac{d^2 S}{dt^2} + \omega^2 S = 0 \quad (1.5)$$

上式说明， S 作简谐振动时的“加速度”与 S 自身成正比，但符号相反。这可以说是简谐振动的运动特性。实际上，考查一个物理量是否作简谐振动，就看上述规律。例如，在机械运动中，如果物体受到一个与位移 S 成正比、但方向相反的作用 $F = -kS$ 时，按牛顿第二定律： $F = ma = m \cdot d^2 S/dt^2$ ，即得

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -\frac{k}{m} S \quad \text{或} \quad \frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{k}{m} S = 0 \quad (1.5)'$$

因此，该物体作简谐振动。由此可知，（1.5）式是简谐振动的动力学方程，而（1.1）或（1.3）式作为运动函数是这个方程的一个特解。

二、波动和波函数

自然界中存在着各种各样的波动现象，例如水面上的水波、空气中的声波、地下的地震波（以上是机械波）和无线电波、光波（以上是电磁波）等。撇去各自不同的实质，这些现象的共同点是都有一个振动的波源，使周围空间或介质产生振动并向四方扩展。这样就可得到一般的波动概念：波动是振动状态在空间的传播。

设有一列波在空间沿 z 轴正向传播，对传播途中任一给定点来讲，振动状态 S 仅仅是时间的函数

$$S = S(t) \quad (1.6)$$

但不同点的振动状态因各点空间位置不同而各异，所以表示所有点振动情况的波动状态应是时间和空间位置二者的函数

$$S = S(t, z) \quad (1.7)$$

振动状态的传播是有一定速度的，这个速度就是波的传播速度 v 。如图1.3，波沿 Oz 方向传播，自坐标原点到 A 点所需时间为 z/v 。因此， A 点的振动比原点要落后一段时间 $\Delta t = z/v$ ，也就是说， A 点在某一时刻 t 的振动状态应和原点在 $t - \Delta t = t - z/v$ 时刻的振动

状态一样。反之，如果波沿 Oz 的反方向传播，则 A 点振动较 O 点超前 $\Delta t = z/v$ ，即 A 点在 t 时刻的振动状态和原点在 $t + \Delta t = t + z/v$ 时刻的振动状态一样。由于 O 点是任意选定的，所以波动公式应有如下的形式

$$S = S(t \mp z/v) \quad (1.8)$$

比较公式(1.8)和(1.6)可知，如果知道波在传播路程上某一点(包括波源)的振动公式，只要把式中变量 t 换成宗量 $t \mp z/v$ 就可以得到此波沿 z 轴两个方向传播的波动公式。以后，我们也称波动公式为波函数。

注意到振动量可能是一个矢量 $\mathbf{S}$ ，并且可以在空间任一方向 $\mathbf{s}$ 传播，所以，对空间任一点 $(\mathbf{r})$ ，波函数的普遍形式应是

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}(t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}/v) \quad (1.9)$$

式中 $\mathbf{s}$ 是表示波传播方向的单位矢量(图1.4)。(1.9)式说明，在一般的波传播过程中，振动的大小和方向均可随时间和位置变化。这种波又称为矢量波。如果振动量是标量，或只考虑振动量的大小，此时波函数的形式是

$$S = S(t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}/v) \quad (1.9)'$$

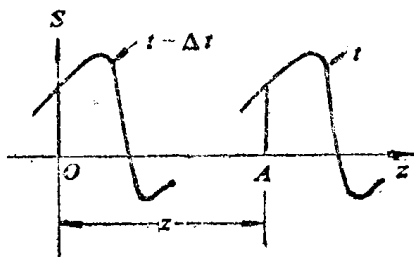


图1.3 振动的传播

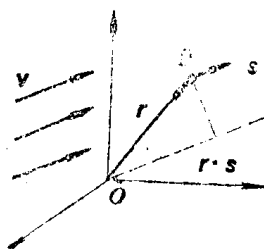


图1.4

这种波就称为标量波。例如，大家知道在机械波中有两种形式的波：振动位移和传播方向平行的称为纵波(例如声波)；振动位移和传播方向互相垂直的称为横波(例如水面波)。对于纵波，只要传播方向一定，振动方位也随之确定，不必用矢量表示其方向，可以用标量波讨论，即只要考虑振动的大小变化。对于横波，振动在垂直于传播方向的平面内取向，是一个矢量波。当然，在讨论横波传播时，如果知道振动方向在传播中不变，或者振动方向差异的影响很小，仍可以当作标量波处理。光波是横波，除了涉及光的偏振性(第四章)，我们仍用标量波表示。

最简单最基本的波动是简谐振动传播形成的简谐波。按照上面的分析，如果沿 z 方向传播，波函数应是

$$S(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \quad (1.10)$$

或
$$S(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \varphi'_0) \quad (1.11)$$

式中 $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ 是波矢的大小， $kz - \omega t + \varphi'_0 = \varphi$ 是波动的周相，也称位相(在光学中，通常总是考察某一时刻的波动情况，这时 φ 仅仅是空间位置的函数)。位相是波动中最重要的状态变量，它直接反映振动随时间和空间位置变化的情况。由上式可知，对简谐波， S 随 t 和 z 均作余弦式周期变化(图1.5)。

从图1.5(a)可以看出，在某一时刻，传播路程上任意两点 z_1, z_2 的振动状态的差别可以用两点的位相差表示

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(z_2 - z_1) = k\Delta \quad (1.12)$$

式中 Δ 是两点的路程差。例如, $\Delta = \lambda$, $\Delta\varphi = 2\pi$, 两点振动状态相同, 称为同相(图中 a 、 c 点); $\Delta = \lambda/2$, $\Delta\varphi = \pi$, 两点状态相反, 称为反相(图中 a 、 b 点)。

和振动公式的数学形式类似, 波函数也可采用复指数形式

$$S(z, t) = A \exp[\pm j(kz - \omega t + \varphi_0)] \quad (1.13)$$

如果取其实数部分, 即公式(1.11)或(1.10), 因此, 复指数的模即波的振幅, 幅角即波的位相。

波函数的这种形式给我们带来很大的方便, 因为在研究波的干涉、衍射以及傅里叶光学中将做大量的波函数叠加计算, 运算时采用复指数形式要比用三角函数简便得多。应该注意, 这种代替完全是形式的, 只是计算方式不同, 并没有因此而增加任何新的物理内容。

使用公式(1.13)时, 复指数前取正号或负号是两种选择, 采用哪一种都可以, 取负号和(1.10)式一致, 取正号和(1.11)式一致。本书在以后的运算中选择后一种形式。

用复指数形式求波动能量也特别方便, 因为能量与振幅平方成正比, 而求一个复数模的平方只需该复数与其共轭复数相乘即得。例如, 波函数是

$$S = A \exp[j(kz - \omega t + \varphi_0)]$$

$$\text{则 } SS^* = A \exp[j(kz - \omega t + \varphi_0)] \cdot A \exp[-j(kz - \omega t + \varphi_0)] = A^2 \quad (1.14)$$

能量也就求出来了。在光学中, 计算光的能量, 即计算光的强度是很重要的。

(1.13)式还可以写成

$$S(z, t) = \tilde{S}(z) \exp(-j\omega t) \quad (1.15)$$

式中

$$\tilde{S}(z) = A \exp[j(kz + \varphi_0)] \quad (1.16)$$

称为波动的复振幅, 它表示出 $t=0$ 时传播空间各点的振幅和位相分布, 也是任一瞬时空间各点的振幅和位相的相对分布。如上所述, 光学中处理的大都是“同时”量或一定时间内的平均值, 因此, 可以用复振幅函数(1.16)代替波函数(1.13)来分析问题。

如果在三维空间传播, 注意(1.9)式, 简谐波的波函数和复振幅应写成

$$S(\mathbf{r}, t) = A \exp[j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)] \quad (1.17)$$

和

$$\tilde{S}(\mathbf{r}) = A \exp[j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)] \quad (1.18)$$

式中 $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ 称为波矢。它的模即 $k = 2\pi/\lambda$, 它的方向表示波的传播方向 $\mathbf{s}$ 。

最后, 关于状态参量, 注意到波动过程和振动过程不同, 量 S 是时间和空间二者的周期函数, 因此参量有两套。

与时间有关的参量有:

- (1) 时间周期(简称周期) T , 单位: 秒(s)。
- (2) 时间频率(简称频率) ν , 周期的倒数 $\nu = 1/T$, 单位: 1/秒(1/s)。
- (3) 时间圆频率(简称圆频率) ω , $\omega = 2\pi\nu$, 单位: 弧度/秒(rad/s)。

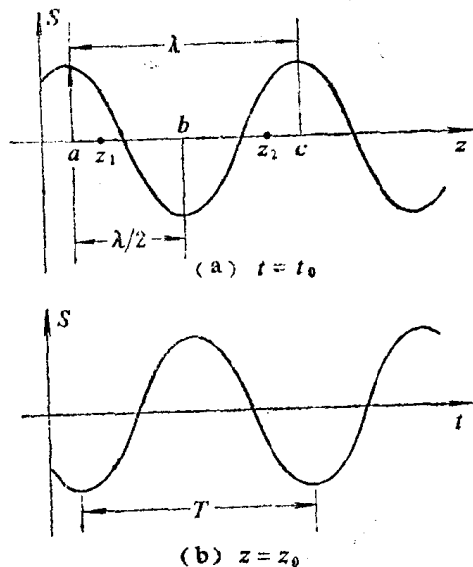


图1.5 简谐波曲线

与空间有关的参量有:

(1) 波长 (即空间周期) λ , 与时间周期的关系是 $\lambda = vT$, 单位: 米(m)、纳米(nm)。

(2) 波数 (即空间频率) σ , 它是波长的倒数, $\sigma = 1/\lambda$, 表示单位路程上的波长数。单位: 每米(m^{-1}) 每纳米(nm^{-1})。

(3) 圆波数 (即空间圆频率, 亦称波数矢量) k , $k = 2\pi\sigma = \omega/v$, 单位: 弧度 每米 (rad/m)。

可以看出, 空间参量和时间参量的关系由波的传播速度 v 联系起来, 这是自然的。

三、波动微分方程

既然波是振动在介质中的传播, 我们可以从具体介质的传播特性中找到一个具体振动传播的原因, 找到形成波动的动力学过程, 从而获得反映这个动力学过程的波动微分方程。这当然是一个具体波动的微分方程。

这里, 我们从波动的一般传播公式得到波动的一般的微分方程。在数学上, 就是由方程的普遍解来推求方程的形式。按波函数 (1.9) 式, 分别求 S 对 $r(x, y, z)$ 和 t 的二级偏微商。注意 $r \cdot s = xs_x + ys_y + zs_z$, $\varphi = t - r \cdot s/v$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= \frac{s_x^2}{v^2} \frac{d^2 S}{d\varphi^2}; & \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= \frac{s_y^2}{v^2} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= \frac{s_z^2}{v^2} \frac{d^2 S}{d\varphi^2}; & \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= \frac{d^2 S}{d\varphi^2}\end{aligned}$$

因为 s 是单位矢量, $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, 所以得到

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad (1.19)$$

或写成

$$\Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

是拉普拉斯算符。如果是标量波, 则应有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \text{ 或 } \Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

上式即波动的微分方程。任何一种类型的波动, 都具有这种形式的微分方程。或者说, 如果某一体系的动力学方程具有以上的形式, 那末它的运动状态必然是一种波动。

四、平面波和球面波

一个波自波源出发, 在介质中向各个方向传播, 某一时刻波动到达的各点所组成的面叫做该时刻的波前。波前随着波的传播不断向前推移。通常称波动中位相相同的各点组成的面为波阵面或等相面, 波前显然是波阵面的一个特例。

按波阵面的形状对波动分类, 重要的有平面波和球面波。

从很小的波源发出的、在均匀介质中传播的波, 由于在各个方向上传播速度相同, 各

个时刻的波前都是球面。波阵面是球面的波动称为球面波^[注] (图1.6)。球面波传播时,其振幅随着与波源距离 r 的增加而反比地减小。振幅的变化可用能量分布来解释:因为波动的能量和振幅平方成正比,从波源发出的总能量分布在整个波前上,而波前球面面积与 r 的平方成正比,因而分布在单位面积上的能量与 r 的平方成反比,所以振幅随 r 的增加成反比地减小。

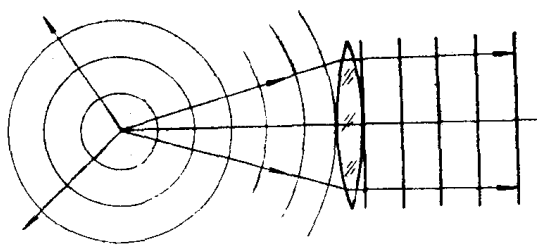


图1.6 球面波和平面波

当球面波离开波源相当远时,波前的曲率很小,波阵面可以近似地看成是平面。波阵面是平面的波动称为平面波。通常,用透镜将球面波变成平面波 (图1.6)。平面波的振幅是一个常数。

平面波和球面波的波函数,可以从波动方程 (1.20) 中求得。如果是一维情形,方程应是

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \quad (1.21)$$

这是一个二阶偏微分方程,如果取变量变换: $p = z - vt$ 和 $q = z + vt$, 容易得到其普遍解为

$$S = S_1(p) + S_2(q) = S_1(z - vt) + S_2(z + vt) \quad (1.22)$$

$S_1(z - vt)$ 表示沿 z 方向传播的波, $S_2(z + vt)$ 表示沿 $-z$ 方向传播的波。而简谐波,只是波源作简谐振动时的一个特解

$$S = S_1 = A \exp[j(kz - \omega t)] \quad (1.13)$$

在三维情形,从微分方程 (1.20) 相应地可得

$$S = S_1(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - vt) + S_2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + vt) \quad (1.23)$$

和

$$S = S_1 = A \exp[j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (1.17)$$

(1.13) 式表明,在任一时刻,等相面都是以 z 为常数的平面,即波阵面是和传播方

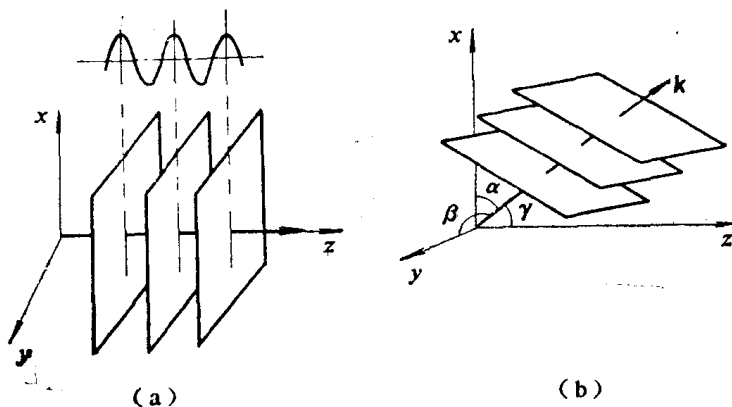


图1.7 传播方向和等相面垂直

[注] 严格地说,只有点状波源在均匀介质中才能发出球面波,这在实际上是做不到的,因为任何波源都有一定大小。当所考察的波阵面与波源的距离远大于波源本身线度时,这部分波就可以近似地看成是球面波。

向垂直的平面（参看图 1.7(a)）。所以 (1.13) 式是一维简谐平面波的波函数。由于传播方向和坐标轴一致，空间频率 $\sigma = k/2\pi = 1/\lambda$ 。

(1.17) 式说明，任一时刻，等相面是 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 为常数的面，参看图 1.7(b)，这仍然是一个和传播方向 $\mathbf{k}$ 垂直的平面，平面方程式为

$$\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = kx \cos \alpha + ky \cos \beta + kz \cos \gamma$$

所以，(1.17) 式是三维简谐平面波的波函数。这时候，空间频率与 k 对应，也有三个分量

$$\sigma_x = \frac{k_x}{2\pi} = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \quad \sigma_y = \frac{k_y}{2\pi} = \frac{\cos \beta}{\lambda}, \quad \sigma_z = \frac{k_z}{2\pi} = \frac{\cos \gamma}{\lambda} \quad (1.24)$$

与它们对应的是空间周期的三个分量 $\lambda_x = \lambda / \cos \alpha$, $\lambda_y = \lambda / \cos \beta$, $\lambda_z = \lambda / \cos \gamma$ (见图 1.8)°

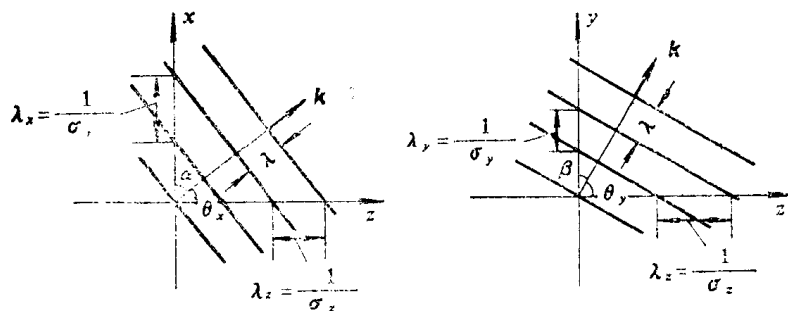


图1.8 空间周期和波长

我们再考虑球面波波函数的形式。如果用球坐标 (r, θ, φ) 形式的波动微分方程，并且知道波动仅与径向坐标 r 有关， $S(\mathbf{r}, t) = S(r, t)$ (在均匀介质中，点波源在坐标原点的发射即有此对称性)，则有

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rS)}{\partial r^2} \end{aligned}$$

因此方程 (1.20) 可写成

$$\frac{\partial^2 (rS)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (rS)}{\partial t^2} \quad (1.25)$$

与 (1.21) 和 (1.22) 式比较，可知上述方程的普遍解应为

$$S = (1/r) S_1(r - vt) + (1/r) S_2(r + vt) \quad (1.26)$$

在简谐条件下的特解应为

$$S = (A_0/r) \exp[j(kr - \omega t)] \quad (1.27)$$

可以看出，这个波函数所表示的简谐波有如下特点：(1) 振幅随距离 r 成反比地减小。(2) $\varphi = kr = \text{常数}$ 的等相面是曲率半径为 r 的球面，即波阵面是球面。所以，(1.27) 式是简谐球面波的波函数，(1.26) 式是一般球面波的波函数。并且，宗量 $(kr - \omega t)$ 和 $(kr + \omega t)$ 分别表示发散波 (由原点出发沿矢径向外传播) 和会聚波 (沿 $-r$ 向原点收缩)。

注意，对平面波，不但波阵面是平面，并且波面上振幅也是常数。所以，波函数