# 高等数学

## 上册

（第二版）

主编 朱弘毅 副主编 邵振和

上海科学技术出版社

高等专科学校学习指导丛书



# 高 等 数 学

上 册

（第二版）

主 编 朱弘毅

副主编 邵振和



上海科学技术出版社

高等专科学校学习指导丛书

**高 等 数 学**

上 册

（第二版）

主 编 朱弘毅

副主编 邵振和

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 9 字数 197 000

1998 年 4 月第 1 版

1998 年 6 月第 2 版 1998 年 6 月第 3 次印刷

印数：12001—16000

ISBN 7－5323－4562－9/O·214

定价：8.60 元

# 前　言

本书分上、中、下三册，是与上海高等专科学校试用教材《高等数学》(上海科学技术出版社 1998 年第三版)配套的学习指导书。

编写本书的目的，是为高等数学的初学者在学习过程中提供一个指导老师，帮助他们解决学习中的困难。在编这本书时，我们注意到初学者往往对这门课程中的基本概念和重要理论的理解不透彻或产生错误，对掌握解题的方法和技巧感到困难，由于教材本身受篇幅的限制，不能针对学生在学习中可能遇到的诸多问题一一详述。因此，我们编写了这套与教材配套的学习指导书，希望能有助于初学者正确理解有关的概念和理论，更好地掌握解决问题的方法和技巧。

本书每章由内容提要、例题、习题选解、单元检测题四部分组成。例题及习题选解中题目一般都是较典型或较难的习题，单元检测题中，我们既考虑到知识的覆盖面，又注意突出重点内容来命题，分 A、B 两卷，其内容相近，要求基本相同。

上、中册附有高等数学试卷，下册附有线性代数、线性规划、概率论、数理统计试卷。

全书由朱弘毅主编，邵振和、沐国宝、张宛平分别为上、中、下册副主编，参加编写的还有周家华、邵建润、陆信芳、陈骇末、王建军、金毛弟、孙劼、张瑞瑾等。陆晋奎、秦跃堂、曹颖中、张琦瑾等提供部分习题解答。

限于编者水平，加之时间仓促，书中的问题一定不少。恳请使用本书的师生提出宝贵意见。

编　者

1998年2月

# 目　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1
一、内容提要 …… 1
二、例题 …… 6
三、习题选解 …… 20
四、单元检测题 …… 33

第二章　导数和微分 …… 39
一、内容提要 …… 39
二、例题 …… 42
三、习题选解 …… 50
四、单元检测题 …… 72

第三章　中值定理与导数的应用 …… 76
一、内容提要 …… 76
二、例题 …… 79
三、习题选解 …… 83
四、单元检测题 …… 97

第四章　不定积分 …… 99
一、内容提要 …… 99
二、例题 …… 102

三、习题选解 …………………………………………………… 109
四、单元检测题 …………………………………………………… 118

**第五章　定积分** …………………………………………………… 122
一、内容提要 …………………………………………………… 122
二、例题 …………………………………………………… 124
三、习题选解 …………………………………………………… 141
四、单元检测题 …………………………………………………… 149

**第六章　定积分的应用** …………………………………………………… 152
一、内容提要 …………………………………………………… 152
二、例题 …………………………………………………… 154
三、习题选解 …………………………………………………… 161
四、单元检测题 …………………………………………………… 174

**第七章　常微分方程** …………………………………………………… 176
一、内容提要 …………………………………………………… 176
二、例题 …………………………………………………… 179
三、习题选解 …………………………………………………… 188
四、单元检测题 …………………………………………………… 226

**附录** …………………………………………………… 230
一、单元检测题解答 …………………………………………………… 230
二、高等数学试卷及答案 …………………………………………………… 276

# 第一章　函数、极限与连续

## 一、内 容 提 要

1. 基本初等函数的图形及性质、复合函数、反函数，初等函数及分段函数等概念．

2. 极限的概念

（1）数列 $u_n=f(n)$（$n$ 为自然数）的极限　当 $n$ 无限增大时（记为 $n\to\infty$），若 $f(n)$ 无限接近于某确定常数 $A$，则称 $A$ 为当 $n$ 无限增大时，$f(n)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

（2）函数 $y=f(x)$ 的极限

自变量 $x$ 的变化过程　$x$ 无限接近 $x_0$，记为 $x\to x_0$；$x$ 大于 $x_0$ 而无限接近 $x_0$，记为 $x\to x_0^+$；$x$ 小于 $x_0$ 而无限接近 $x_0$，记为 $x\to x_0^-$；$x$ 的绝对值无限增大，记为 $x\to\infty$；$x$ 为正且无限增大，记为 $x\to+\infty$；$x$ 为负且绝对值无限增大，记为 $x\to-\infty$.

函数 $f(x)$ 的变化趋势　函数 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 $A$，记为 $f(x)\to A$；函数 $f(x)$ 不能无限接近于某个确定的常数．

**定义**　若 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to A$，则称 $A$ 为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限．记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

类似地有 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$（此时称 $A$ 为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限），又记为 $f(x_0^+)=A$；$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$（此时称 $A$ 为 $x\to x_0^-$ 时 $f(x)$ 的左极限），又记为 $f(x_0^-)=A$；$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$（此时称 $A$ 为 $x\to\infty$ 时的极限）；$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（此时称 $A$ 为 $x\to+\infty$ 时的极限）；$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$（此时称 $A$ 为 $x\to-\infty$ 时的极限）.

**注 1** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 同时成立；

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 同时成立.

**注 2** 数列极限可看作函数当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限的特例.

**注 3** 记 $\lim f(x)=A$ 表示当 $x$ 按上述六种变化过程中任一种方式变化时，$f(x)$ 的极限为 $A$.

3. 无穷小与无穷大

如果 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x$ 的某变化方式下的无穷小量（简称无穷小）；

如果 $\lim \dfrac{1}{f(x)}=0$，则称 $f(x)$ 为 $x$ 的某变化方式下的无穷大量（简称无穷大）（$f(x)\neq 0$），且记为 $\lim f(x)=\infty$（此时称极限不存在）.

4. 极限的运算法则

(1) 若 $\lim f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$，反之亦然；

(2) 有限个无穷小量之和仍为无穷小量，有限个无穷小量之积仍为无穷小量；

(3) 有界函数乘无穷小量仍为无穷小量；

(4) 若$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B;$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot \lim g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(\text{当 } B\neq 0 \text{ 时}).$$

5. 两个重要极限　如果$\lim\alpha(x)=0$,则

$$\lim\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \text{特例}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e,\quad \text{特例}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

6. 无穷小的比较

(1) 定义　设$\lim\alpha=0$,$\lim\beta=0$,且$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C$($C$为常量)

当$C=0$时,称$\beta$比$\alpha$为高阶无穷小,记为$\beta=0(\alpha)$;
当$C\neq 0$且$C\neq 1$时,称$\beta$与$\alpha$为同阶无穷小;
当$C=1$时,称$\beta$与$\alpha$为等价无穷小,记为$\beta\sim\alpha$.

(2) 等价无穷小代换　若$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

(3) 常用的等价无穷小　当$x\to 0$时,有$\sin x\sim x$,$\mathrm{tg}x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$e^x-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$\sqrt[n]{1+x}\sim 1+\frac{x}{n}$.

7. 连续的定义

(1) 设函数$f(x)$在$x_0$的某邻域内有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$(或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$),则称$f(x)$在点

$x_0$ 处连续，称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的连续点．

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处右连续；若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处左连续．

(3) 若函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内每一点都连续．则称 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续；若函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续，且在 $x = a$ 处右连续，在 $x = b$ 处左连续．则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续．

8. 函数的间断点

若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处不连续，则称 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点．

在间断点 $x_0$ 处，以下三个条件中至少有一满足：

(1) $f(x)$ 在 $x_0$ 处无定义；

(2) $f(x)$ 在 $x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) $f(x)$ 在 $x_0$ 处有定义，又 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

间断点分类：

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 均存在，则 $x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点：

当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 时，$x_0$ 为可去间断点；

当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 时，$x_0$ 为跳跃间断点；

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在时，则 $x_0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点．

9. 初等函数的连续性

(1) 连续函数的四则运算法则　设函数$f(x),g(x)$在某区间上连续，则 $f(x) \pm g(x)$，$kf(x)$($k$ 为常数)，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$，在该区间上也连续．

(2) 复合函数的连续性　设函数$u = \varphi(x)$在$x_0$处连续，函数 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处连续．则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 $x_0$ 处连续．

(3) 初等函数在其定义区间上是连续的．

10. 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则

(1) 在$[a,b]$上至少取得最大、最小值各一次，记为$M$与$m$.

(2) 对于$\mu \in [m,M]$，$[a,b]$上至少有一点$\xi$，使$f(\xi) = \mu$.

(3) 当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时，$[a,b]$ 上至少有一点 $\xi$，使$f(\xi) = 0$.

'11. 极限的精确化定义

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 若任给$\varepsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使当$0 < |x - x_0| < \delta$时，不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立．

(2) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow$ 若任给$\varepsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使当$0 < x - x_0 < \delta$时，不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立．

(3) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow$ 若任给$\varepsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使当$0 < x_0 - x < \delta$时，不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立．

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 若任给$\varepsilon > 0$，总存在$X > 0$，使当$|x| > X$时，不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立．

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 若任给$\varepsilon > 0$，总存在$X > 0$，使当

$x>X$时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立．

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$ 若任给 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使当 $x<-X$时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立．

## 二、例　　题

**例 1**　试说明复合函数 $y=e^{\sin x}$是由什么样的基本初等函数复合而成．

**解**　由 $y=e^u$，及 $u=\sin x$ 复合而成．

**例 2**　证明任意一个函数 $y=f(x)$都可以表示成一个奇函数与一个偶函数的和，并将函数 $y=e^x$ 表示成一个奇函数与一个偶函数的和．

**证**　设 $f(x)=g(x)+h(x)$，

令 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，

$h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$．

很显然，　　$g(x)+h(x)=f(x)$．

$\because$　$g(-x)=g(x)$，　$\therefore$　$g(x)$是偶函数．

$\because$　$h(-x)=-h(x)$，$\therefore$　$h(x)$是奇函数，∴故原命题得证．

$$e^x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x.$$

**例 3**　根据煤气公司的规定，居民使用民用煤气收费标准是：每户居民年消费量在 800 立方米以内的（含 800 立方米），每立方米应缴纳人民币 0.90 元．若年消费量超出 800 立方米的话，则超出部分每立方米应缴纳人民币 1.50 元，试写出一户居民年消费量在1200 立方米以内的缴费情况．

**解** 设一户居民使用煤气的年消费量为 $x$ 立方米,缴费为 $y$ 元,根据题意,得

$$y=\begin{cases}0.9x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 800 \text{ 时;}\\ 720+1.5(x-800), & \text{当 } 800<x\leqslant 1200 \text{ 时.}\end{cases}$$

**例 4** 甲、乙两个村庄合用一个变压器,根据工程要求,变压器必须建造在公路旁,现已测量出的距离如图 1.1 所示,假定变压器建造在点 $P$ 处,离 $A$ 点的距离为 $x$. 试建立输电线 $PC+PD$ 与 $x$ 之间的函数关系.

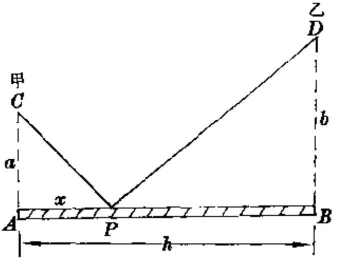


图 1.1

**解** 设输电线 $y=PC+PD$,根据图 1.1 可知,$PC=\sqrt{x^2+a^2}$,$PD=\sqrt{(h-x)^2+b^2}$,

$$\therefore\quad y=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(h-x)^2+b^2}.$$

**例 5** 质量 $m_0=3000$ 千克的物体,燃烧着从高为 $H$ 米的高处自由落下,质量的消耗与时间成正比. 比例系数 $k=100$ 千克/秒,假定初速度 $v_0=0$,加速度 $g=9.8$ 米/秒$^2$. 并且忽略空气的阻力. 试建立物体的动能与时刻 $t$ 的函数关系.

**解** 假定在时刻 $t$ 时,物体的动能是 $E_k(t)$. 在 $t$ 时刻,物

体的质量 $m=3000-kt=3000-100t$. 在 $t$ 时刻，物体的速度 $v(t)=gt=9.8t$，

$$\therefore\quad E_k(t)=\frac{1}{2}mv_{(t)}^2=\frac{1}{2}(3000-100t)(9.8t)^2$$

$$(0<t\leqslant 30\text{ 秒}).$$

**例 6** 设以下五个数列分别是：

(1) $x_n=\dfrac{n^2+1}{n^2}$；　(2) $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；　(3) $x_n=n$；

(4) $x_n=(-1)^n$；　(5) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$.

我们考察当 $n$ 无限增大时，数列的变化趋势.

**解** (1) 当 $n$ 无限增大时，数列 $x_n=\dfrac{n^2+1}{n^2}=1+\dfrac{1}{n^2}$ 与常数 1 无限接近.

(2) 当 $n$ 无限增大时，数列 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 与常数 0 无限接近.

(3) 当 $n$ 无限增大时，数列 $x_n=n$ 不能与某个常数无限接近.

(4) 当 $n$ 无限增大时，数列 $x_n=(-1)^n$ 不能与某个常数无限接近.

(5) 当 $n$ 无限增大时，数列 $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$ 与常数 1 无限接近.

**例 7** 分析数列 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 的变化趋势，并说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

**解** 当 $n$ 无限增大时，数列 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 的变化趋势是 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$，即数列 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 与 0 无限接近，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

**注** 通过本题讨论我们可以进一步认识到 当 $q>1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{q^n}=0$.

**例 8** 有一位阿拉伯老人，生前养有 11 匹马，他去世前立下遗嘱：大儿子，二儿子，小儿子分别继承遗产的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，儿子们想来想去没法分，正在他们犯愁的时候，聪明的邻居牵来了自己的一匹马，对他们说："你们看，现在有 12 匹马了．老大得 6 匹，老二得 3 匹，老三得 2 匹，还剩下一匹马我照旧牵回家去，这样邻居帮他们把难分的问题解决了，试分析这个问题的实质．

**解** 分析：对这个问题可能产生的误解是老大按遗嘱分$\frac{11}{2}$匹马，而实际上分了 6 匹马，老大是否多分了遗产？当然，老二按遗嘱分$\frac{11}{4}$匹马，而实际上分了 3 匹马．同样地，老三按遗嘱分$\frac{11}{6}$匹马，而实际上分了 2 匹马．

下面我们仔细分析阿拉伯老人的遗嘱：

阿拉伯老人的遗嘱是：按$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$给三个儿子分配遗产．事实上一次分配之后老大分得$\frac{6}{12}\times 11$ 匹马，老二分得$\frac{3}{12}\times 11$ 匹马，老三分得$\frac{2}{12}\times 11$ 匹马．你可以想一想阿拉伯老人的遗产分完了吗？没有．只分掉了$\frac{11}{12}\times 11$ 匹马，那末还剩下$\frac{1}{12}\times 11$ 匹马没有分．按照老人的遗嘱，剩下的$\frac{1}{12}\times 11$ 匹马还要继续按照$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$的办法分给他的儿子，也就是老大第一次分得$\frac{6}{12}\times 11$ 匹马，第二次分得$\frac{6}{12}\times\frac{1}{12}\times 11$ 匹马．其实阿拉伯老人剩下的遗产第二次也没有分完．还剩下$\left(\frac{1}{12}\right)^2$

$\times 11$. 所以还要分第三次，第四次，第五次，……

这样：老大每次分到的马分别是：

$\frac{6}{12}\times 11$，　$\frac{6}{12}\times 11\times\frac{1}{12}$，　$\frac{6}{12}\times 11\times(\frac{1}{12})^2$，…，

$\frac{6}{12}\times 11\times\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$，…

也就是说：老大每次分到的马构成一个数列：

$$x_n=\frac{6}{12}\times 11\times\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

这样，老大实际上应当分到的马是：$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots$，现在假定分了 $n$ 次，老大分到 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

则 $S_n=\dfrac{\frac{6}{12}\times 11\left(1-\left(\frac{1}{12}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{12}}$　根据阿拉伯老人的要求，他的马要按 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，无限次地分给他的儿子，

所以，老大实际应当分到的马是 $S$：

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{12}\times 11\left(1-\left(\frac{1}{12}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{12}}=6.$$

按照与老大同样的方法，我们可以类似地说明老二应当分 3 匹马和老三应当分 2 匹马.

**例 9**　进一步谈谈无穷小与无穷大.

(1) 无限个无穷小的代数和不一定是无穷小；

(2) 正无穷大，负无穷大，无穷大；

(3) 有界量与无穷大的和，有界量与无穷大的积.

**解**　(1) 例如：在 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n^2}$，$\frac{2}{n^2}$，…，$\frac{n}{n^2}$ 都是无穷小.