现代数学基础丛书

有限群导引

（上 册）

徐明曜 著

科学出版社

现代数学基础丛书

有 限 群 导 引

(上 册)

徐 明 曜 著

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内容简介

本书是作者在为北京大学数学系高年级学生和研究生讲授有限群论的讲义基础上编纂而成的，它力图以较少的篇幅介绍有限群的基本知识及初等群论的基本方法，并尽可能反映有限群的最新成果．书中收集了许多有趣味的习题和待解决的问题，有利于读者走向有限群的研究．全书分上、下册出版．上册主要叙述了群论基本概念、群在集合上的作用及其应用、群的构造理论初步、幂零群和 P 群、可解群及有限群表示论初步，书末还有关于研究题的附录及上册习题提示．

本书可供大学数学系高年级学生、研究生及教师阅读，也可供研究群论的科技工作者参考．

现代数学基础丛书

有限群导引

（上册）

徐明曜 著

责任编辑 苏芳霞

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 12 月第一版 开本：850×1168 1/32

1987 年 12 月第一次印刷 印张：8

印数：0001—3,400 字数：208,000

ISBN 7-03-000073-0/O · 17

统一书号：13031 · 3939

定价： 2.30 元

前　　言

在抽象代数课程中我们知道，群是现代代数最基本和最重要的概念之一．它在数学本身以及现代科学技术的很多方面都有广泛的应用．比如在理论物理、量子力学、量子化学、结晶学等方面的应用就是明证．因此，在我们学习了抽象代数课程之后，更深入地研究群的理论是很有必要的．

在群论的众多分支中，有限群论无论从理论本身还是从实际应用来说都占据着更为突出的地位．同时，它也是近年来研究最多、最活跃的一个数学分支．最近二十多年来，经过很多数学家的努力，在有限群中取得了一连串的突破，并终于在 1981 年解决了著名的有限单群分类问题．这项重大的科学成果的得来是很不容易的．如果从 1832 年 Galois 证明交错群 A_5 是单群算起，整整经历了 150 年．参加这项工作的数学家前后共达几百人．为了证明单群分类定理，即有限单群共有十八个无限族和二十六个零散单群，人们使用了抽象群论的、表示论的(包括常表示和模表示)、几何的以及组合论和图论的方法，在杂志上发表了数千页以至上万页的论文．这些论文的总体就构成了单群分类定理的证明．当然人们希望能有一个完整的证明，但在今天看来，要写出这样的证明还需要一定的时间．关于这方面的详细情况，读者可参看 D. Gorenstein 的专著“Finite Simple Groups”一书．(Plenum Press, New York, 1982.)

由于这项重大的成果，在数学界中形成了“有限群热”，很多学数学甚至学物理的大学生和研究生都想学一点有限群的知识．从国内来看，不只综合性大学数学系纷纷开设有限群课程，很多师范院校也开了这门课．本书就是作者 1981—1983 年间在北京大学数学系为大学生和研究生开设有限群课时所编写的讲义．这个讲

义作者前后使用了四次，进行了三次较大的修改。外校也有一些同志使用这个教材，并提出了不少宝贵的意见和建议。

本书分为上、下两册。上册包括前六章和一个附录，可作为综合大学或师范学院数学专业本科高年级同学（已学过抽象代数）一个学期的选修课的教材。根据作者的实践，在 54 课时（每周 3 课时，共 18 周）的时间中，约可讲完六章中的五章。只对抽象群感兴趣的教师如感到时间不够只讲前五章，第 VI 章留给学生自己阅读。也可以在讲完前三章之后，后面的三章只选讲前面的几节，剩下的材料供学生阅读。附录中的所谓“研究题”是供大学生做毕业论文时参考用的。它们或者是较难的习题，或者是一个小的专题，里面包含一些未解决的问题或进一步研究的方向，学完了上册的大学生就可以在这些题目上试试自己的能力。对于这些研究题，通常我们只指出参考文献，有的也给出解决它的较详细的提示。

本书的下册主要是供研究生用的，其中第 VII—XI 章是有限群的基本知识，对于并非专攻有限群的研究生来说，学习这几章也是有必要的。但是从第 XII 章起，则是比较专门的材料，它们的选择大部分出自作者个人的兴趣。但是作者认为在单群分类问题解决之后，它们仍然是可以研究的有意义的课题。下册如作为研究生一个学期的群论课的教材，前五章是一定要讲的，后面则可由教师随意选讲一部分。当然全书也可供自学者使用。读者只要扎实地学完了前十一章，就能够接触有限群的现代文献，并开始对某些问题进行独立的研究。从作者的教学实践来看，这点是可以做到的。

还有几点是需要向读者说明的。

1. 本书是作为教材而编写的，目的是用尽量少的篇幅介绍有限群论的基本知识和基本方法，特别是要突出方法。因此从知识上并不追求完全，相当多的内容是为了介绍方法而写入的。

2. 阅读本书之前应该学过抽象代数课程。比如读过 N. Jacobson 的“Basic Algebra I”的前两章并做过其中大部分习题。我们劝告那些没有学过抽象代数或者抽象代数训练不够的人不要企

图阅读本书．如果一定要阅读，势必事倍功半．基于这种考虑，第 I 章中多数定理的证明被省略了． 但是这一章还必须仔细阅读，因为其中补充了很多在抽象代数课程中并不重要但对有限群论具有基本意义的东西．

3. 由于读者都受过较充分的抽象代数的训练，在本书中定理的证明写得比较简短，常给读者留有思考的余地．这样读起来可能会感到吃力，但对训练推理能力以及将来阅读文献都会有一定的帮助．

4. 本书中的习题是不可不做的，它们是本书重要的组成部分．这些习题难易程度不等，对于稍难一些的题目在书末都附有提示．

5. 我们叙述定义、定理等是依章节统一编号．在引述前面的结果时，如果是在本章中，则不指明所属的章；如果是在前面各章，则用罗马数字表明章号．例如，"定理 2.3"是指本章中的定理 2.3，而"II, 3.11"是指第 II 章的定理 3.11．

编写本书主要参考了以下三本书：

1. B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, 1967.

2. H. Kurzweil, Endliche Gruppen, Springer-Verlag, 1977.

3. D. Gorenstein, Finite Groups, Harper & Row Publishers, New York, 1980.

Huppert 的书是有限群论的一部巨著，也是搞有限群的人必备的参考书．目前这本书的第 II，III 两卷也已经出版，并加进了合作者 N. Blackburn．后两卷是用英文写的，三卷合在一起有近两千页的篇幅．后两卷是

4. B. Huppert and N. Blackburn, Finite Groups II, III, Springer-Verlag, 1982.

中文的参考书有以下几种：

5. 张远达，有限群构造，科学出版社，1982.

6. 陈重穆，有限群论基础，重庆出版社，1983.

7. M. Hall 著，裘光明译，群论，科学出版社，1981.

最后，我要感谢我的导师段学复教授，他给作者很多帮助和鼓

励．此外，我的同事刘力前同志，曾经参加编写1981年版本讲义的第七、八两章；河北大学邵惠伯同志、杭州大学姜豪同志，湖南益阳师专陈进之同志以及我校研究生张继平、张来武等同志都对本书提了很多宝贵的修改意见，特在此一并致谢．

作者

1986年于北京大学

目　　录

第 I 章　群论的基本概念

本章是对抽象代数课程中已经学过的群论的基本概念进行复习和补充. 因此,多数结果不再给出证明.

§1. 群和子群

一、群的定义

定义一个群有多种不同的方式.

1.1. 定义　称非空集合 G 为一个群，如果在 G 中定义了一个二元运算,叫做乘法,它满足

(1) 结合律: $(ab)c = a(bc)$, $a, b, c \in G$;

(2) 存在单位元素: 存在 $1 \in G$,使对任意的 $a \in G$,恒有

$$1a = a1 = a;$$

(3) 存在逆元素: 对任意的 $a \in G$,存在 $a^{-1} \in G$, 使得

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

上述条件(2),(3)可以分别减弱为

(2′)存在左(右)单位元素: 存在 $1 \in G$,使对任意的 $a \in G$, 有 $1a = a(a1 = a)$;

(3′)存在左(右)逆元素: 对任意的 $a \in G$,存在 $a^{-1} \in G$, 使得 $a^{-1}a = 1(aa^{-1} = 1)$.

即,条件(1),(2′)和(3′)亦可定义一个群.

1.2.定义　称非空集合 G 为一个群,如果在 G 中定义了一个二元运算,叫做乘法,它满足

(1) 结合律: $(ab)c = a(bc)$, $a, b, c \in G$;

(4) 对任意的 $a, b \in G$, 存在 $x, y \in G$, 满足 $ax = b$ 和 $ya = b$.

定义 1.1 和定义 1.2 是等价的.

在任一群 G 中,还成立下述运算规律:

(5) 消去律: 对任意的 $a, b, c \in G$,成立

$$ac = bc \Rightarrow a = b$$

和

$$ca = cb \Rightarrow a = b.$$

一般来说，条件(1)和(5)不足以定义一个群. 例如全体正整数集合对于加法就满足条件(1)和(5)，但它不是群. 可是我们有下面的结论:

1.3. 定理 有限非空集合 G 是群，如果 G 中定义了一个二元运算,满足条件(1)和(5).

1.4. 定义 如果群 G 满足

(6) 交换律: $ab = ba$, $a, b \in G$, 则称 G 为交换群或 Abel 群.

对于以上给出的群的定义，请读者自己检查是否熟悉下列事项的证明:

1) 由单位元素的存在性推出它的唯一性;

2) 由逆元素的存在性推出它的唯一性;

3) 证明条件 (1),(2),(3) 和 (1), (2′), (3′) 的等价性;

4) 证明定义 1.1 和定义 1.2 的等价性;

5) 证明定理 1.3;

6) 由结合律(1)推出下面的广义结合律:

(1′) 广义结合律: 对于任意有限多个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in G$,乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 的任何一种"有意义的加括号方式"[1]都得出相同的值,因而上述乘积是有意义的.

7) 在交换群 G 中,乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 的诸因子任意交换次序,其

1) 因为群的乘法是二元运算,根据定义,只有两个元素的乘积才有意义，多个元素的乘积必须通过逐步作两个元素的乘积来实现. 所谓"有意义的加括号方式"指的就是给定的一种确定的运算次序. 例如对乘积 $abcde$, 我们称$((ab)c)(de)$, $((a(bc))d)e$,$\cdots$ 等为"有意义的加括号方式",但 $((abc)d)e$,$(ab)(cd)e\cdots$ 等则不是.

值不变.

1.5. 注

1）定义一个群还有很多其他的方式，例如可见 M. Hall 的《群论》(中译本) § 1.3.

2）如果定义 1.1 中把 (2′), (3′) 两条改为有左单位元素和右逆元素，则 G 不一定是一个群，可参看研究题 1.

下面对我们使用的符号做些说明：我们用大写拉丁字母 G, H, K, A, B, $\cdots$ 表示群或集合，小写拉丁字母 a, b, c, $\cdots$ 表示它的元素；以 1 表示群的单位元素以及仅由单位元素组成的子群，对二者不加区别，读者可从上下文来判断 1 究竟代表单位元素还是单位子群，以 $|G|$ 表示集合 G 的势. 如果 G 是群，则 $|G|$ 叫群的阶. 又，称 G 为有限群，如果 $|G|$ 是有限数，否则叫做无限群.

由广义结合律(1′)，任意有限多个元素的乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 是有意义的. 特别地，我们可以规定群 G 中元素 a 的整数次方幂如下：设 n 为正整数，则

$$a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n\text{个}}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = (a^{-1})^n.$$

显然有

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad m, n \text{ 是整数.}$$

又，对于乘积的逆，有下列法则：

1.6. 命题 设 G 是群，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in G$，则

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

二、子群

设 G 是群，H, K 是 G 的子集，规定 H, K 的乘积为

$$HK = \{hk \mid h\in H,\ k\in K\}.$$

如果 $K = \{a\}$，仅由一个元素 a 组成，则简记为 $H\{a\} = Ha$；类似地有 aH 等. 我们还规定

$$H^{-1} = \{h^{-1} \mid h\in H\}.$$

很明显，子集的乘法也满足结合律，因而也可以定义子集 H 的正整

数次幂 H^n，并且对子集的乘法也成立命题 1.6.

1.7. 定义 称群 G 的非空子集 H 为 G 的子群，如果 $H^2 \subseteq H$，$H^{-1} \subseteq H$. 这时记作 $H \leqslant G$.

事实上，易验证如果 H 是 G 的子群，则必有 $H^2 = H$，$H^{-1} = H$，并且 $1 \in H$. 显然，任何群 G 都有二子群 G 和 1，叫做 G 的平凡子群.

1.8. 命题 设 G 是群，$H \subseteq G$；则下列命题等价：

1) $H \leqslant G$;

2) 对任意的 $a, b \in H$，恒有 $ab \in H$ 和 $a^{-1} \in H$;

3) 对任意的 $a, b \in H$，恒有 $ab^{-1} \in H$（或 $a^{-1}b \in H$）.

1.9. 命题 设 G 是群，$H \subseteq G$，$|H|$ 是有限数，则

$$H \leqslant G \Longleftrightarrow H^2 \subseteq H.$$

若干个子群的交仍为子群，即我们有

1.10. 定理 设 G 是群. 若 $H_i \leqslant G$，$i \in I$，I 是某个指标集，则 $\bigcap_{i \in I} H_i \leqslant G$.

一般来说若干子群的并不是子群，但我们有下述概念：

1.11. 定义 设 G 是群，$M \subseteq G$（允许 $M = \varnothing$），则称 G 的所有包含 M 的子群的交为由 M 生成的子群，记作 $\langle M \rangle$.

容易看出，$\langle M \rangle = \{1, a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in M \cup M^{-1}, n = 1, 2, \cdots\}$.

如果 $\langle M \rangle = G$，我们称 M 为 G 的一个生成系，或称 G 由 M 生成. 仅由一个元素 a 生成的群 $G = \langle a \rangle$ 叫做循环群. 可由有限多个元素生成的群叫做有限生成群. 有限群当然都是有限生成群.

对于群 G 中任意元素 a，我们称 $\langle a \rangle$ 的阶为元素 a 的阶，记作 $o(a)$，即 $o(a) = |\langle a \rangle|$. 由此定义，$o(a)$ 是满足 $a^n = 1$ 的最小的正整数 n，而如果这样的正整数 n 不存在，则 $o(a) = \infty$.

下面的结论是十分重要的.

1.12. 定理 设 G 是群，$H \leqslant G$，$K \leqslant G$，则

$$HK \leqslant G \Longleftrightarrow HK = KH.$$

证 $\Rightarrow$: 由 $HK \leqslant G$ 有 $(HK)^{-1} = HK$, 即 $K^{-1}H^{-1} = HK$ 又由 $H \leqslant G$, $K \leqslant G$,有 $H^{-1} = H, K^{-1} = K$,于是 $KH = HK$.

$\Leftarrow$: 由 $HK = KH$ 可得 $(HK)^2 = HKHK = HHKK = HK$, $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH = HK$,由定义 1.7 即得 $HK \leqslant G$. //

三、子群的陪集

1.13. 定义 设$H \leqslant G$, $a \in G$. 称形如 $aH(Ha)$ 的子集为H的一个左(右)陪集.

容易验证, $aH = bH \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$. 类似地有 $Ha = Hb \Longleftrightarrow ab^{-1} \in H$.

1.14. 命题 设 $H \leqslant G$, a, $b \in G$, 则

1) $|aH| = |bH|$;

2) $aH \cap bH \neq \varnothing \Rightarrow aH = bH$.

于是,G 可表成H的互不相交的左陪集的并:

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_nH,$$

元素 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 叫做H在G中的一个(左)陪集代表系. H的不同左陪集的个数 n (不一定有限) 叫做H在G中的指数, 记作 $|G:H|$.

同样的结论对于右陪集也成立,并且H在G中的左、右陪集个数相等,都是 $|G:H|$.

下面的定理对于有限群具有基本的重要性.

1.15. 定理 (Lagrange) 设G是有限群, $H \leqslant G$, 则 $|G| = |H||G:H|$.

由此定理,在有限群G中,子群的阶是群阶的因子. 而且还可推出,G中任一元素 a 的阶 $o(a)$ 也是$|G|$的因子. 这因为 $o(a) = |\langle a\rangle|$, 而 $\langle a\rangle \leqslant G$.

1.16. 定义 称群G为周期群, 如果G的每个元素都是有限阶的. 又如果G中所有元素的阶存在最小公倍数 m, 则称m为G的方次数,记作 $\exp G = m$.

显然,有限群是周期群,存在方次数,并且 $\exp G \mid |G|$.

1.17. 定理 设G是群. 如果 $\exp G=2$，则G是交换群.

证 对任意的$a,b\in G$，由$1=(ab)^2=a^2b^2$得 $abab=aabb$，左乘a^{-1}，右乘b^{-1}即得 $ab=ba$. //

1.18. 定理 设G是群，H和K是G的有限子群，则

$$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}.$$

证 因为群G的子集HK是由形如$Hk(k\in K)$的H的右陪集的并组成，每个右陪集含有$|H|$个元素，故为证明上式只须证HK中含有 $|K:H\cap K|$ 个H的右陪集. 由

$$Hk_1=Hk_2\Longleftrightarrow k_1k_2^{-1}\in H,$$

又因 $k_1k_2^{-1}\in K$，故

$$Hk_1=Hk_2\Longleftrightarrow k_1k_2^{-1}\in H\cap K\Longleftrightarrow(H\cap K)k_1=(H\cap K)k_2.$$

因此HK中包含H的右陪集个数等于 $H\cap K$ 在K中的指数 $|K:H\cap K|$，得证. //

1.19. 命题 设G是有限群，$H\leqslant G$，$K\leqslant G$，则

1) $|\langle H,K\rangle:H|\geqslant|K:H\cap K|$;

2) $|G:H\cap K|\leqslant|G:H||G:K|$;

3) 若$|G:H|$和$|G:K|$互素，则

$$|G:H\cap K|=|G:H||G:K|,$$

并且此时有 $G=HK$.

证 1) 由上定理的证明中我们已经看到，HK中包含H的右陪集个数(姑且记作 $|HK:H|$) 等于$|K:H\cap K|$. 因为$\langle H,K\rangle\supseteq HK$，自然有

$$|\langle H,K\rangle:H|\geqslant|HK:H|=|K:H\cap K|.$$

2) 因为

$$|G:H\cap K|=|G:K||K:H\cap K|,$$

由$|G:H|\geqslant|\langle H,K\rangle:H|$及1)，有 $|G:H|\geqslant|K:H\cap K|$，于是有

$$|G:H\cap K|\leqslant|G:H||G:K|.$$

3) 由 Lagrange 定理，$|G:H|$ 和 $|G:K|$ 都是 $|G:H\cap K|$ 的因子. 又因 $|G:H|$ 和 $|G:K|$ 互素，有

$$|G:H|\,|G:K|\mid |G:H\cap K|.$$

再由 2) 即得

$$|G:H\cap K| = |G:H|\,|G:K|.$$

但另一方面，

$$|G:H\cap K| = |G:K|\,|K:H\cap K| = |G:K|\,|HK:H|,$$

由这推出 $|G:H| = |HK:H|$，于是 $G = HK$. //

四、共轭

设 G 是群，a, $g\in G$, 我们规定

$$a^g = g^{-1}ag,$$

并称 a^g 为 a 在 g 之下的**变形**. 对于 G 的子群或子集 H，我们同样规定

$$H^g = g^{-1}Hg,$$

也叫做 H 在 g 下的变形. 容易验证下面的结论:

1.20. 命题 变形运算满足

1) $a^{gh} = (a^g)^h$;

2) $(ab)^g = a^g b^g$;

3) $(a^g)^{-1} = (a^{-1})^g$.

1.21.定义 称群 G 的元素 a, b (或子群或子集 H, K) 在 G 中**共轭**，如果存在元素 $g\in G$，使 $a^g = b$ (或 $H^g = K$).

1.22. 命题 (在元素间、子群间或子集间的) 共轭关系是等价关系.

于是，群 G 的所有元素依共轭关系可分为若干互不相交的等价类(叫做**共轭类**) $c_1 = \{1\}$, c_2, $\cdots$, c_k, 并且

$$G = c_1\cup c_2\cup\cdots\cup c_k.$$

由此又有

$$|G| = |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_k|,$$

叫做 G 的**类方程**，而 k 叫做 G 的**类数**. 共轭类 c_i 包含元素的个数

$|c_i|$ 叫做 c_i 的**长度**.

为了研究共轭类的长度,我们规定

1.23. 定义 设 G 是群, H 是 G 的子集, $g\in G$. 若 $H^g=H$, 则称元素 g **正规化** H,而称 G 中所有正规化 H 的元素的集合

$$N_G(H)=\{g\in G\,|\,H^g=H\}$$

为 H 在 G 中的**正规化子**. 又若元素 g 满足对所有 $h\in H$ 恒有 $h^g=h$,则称元素 g **中心化** H,而称 G 中所有中心化 H 的元素的集合

$$C_G(H)=\{g\in G\,|\,h^g=h,\forall h\in H\}$$

为 H 在 G 中的**中心化子**.

规定 $Z(G)=C_G(G)$, 并称之为群 G 的**中心**.

易验证, 对于任意子集 H, $N_G(H)$ 和 $C_G(H)$ 都是 G 的子群. 并且若 $H\leqslant G$, 则 $H\leqslant N_G(H)$. 如果 H 是单元素集 $\{a\}$, 则 $N_G(H)$ 和 $C_G(H)$ 分别记作 $N_G(a)$ 和 $C_G(a)$,这时有 $C_G(a)=N_G(a)$.

1.24. 定理 G 中元素 a 所属的共轭类 C 的长度 $|c|=|G:C_G(a)|$,因此, $|c|$ 是 $|G|$ 的因子. 类似地,子群(或子集) H 的共轭子群(或共轭子集)的个数为 $|G:N_G(H)|$, 也是 $|G|$ 的因子.

五、双陪集

1.25. 定义 设 H, K 是有限群 G 的子群, 我们称形如 HaK, $a\in G$ 的子集为 G 关于子群 H 和 K 的一个双陪集.

类似于陪集,我们有

1.26. 命题 对于双陪集成立

$$HaK\cap HbK\neq\varnothing\Rightarrow HaK=HbK.$$

于是, G 可表成互不相交的若干双陪集的并:

$$G=Ha_1K\cup Ha_2K\cup\cdots\cup Ha_sK.$$

证 设 $hak=h'bk'\in HaK\cap HbK$, $h,h'\in H$, $k,k'\in K$. 则 $a=(h^{-1}h')b(k'k^{-1})$,其中 $h^{-1}h'\in H$, $k'k^{-1}\in K$. 于是有

$$HaK=H(h^{-1}h')b(k'k^{-1})K=HbK. \quad //$$

1.27. 定理 任一双陪集 HaK 可表成若干 H 的右陪集(或 K 的