

数理化自学丛书

立体几何

杨荣祥 编

上海科学技术出版社

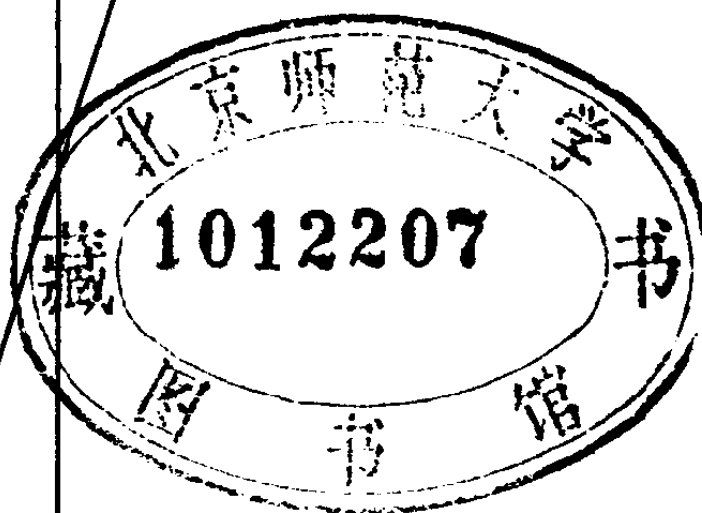
数理化自学丛书

第二版

立体几何

杨荣祥编

JU1153/09



上海科学技术出版社

数理化自学丛书

第二版

立 体 几 何

杨荣祥 编

数理化自学丛书编委会审定

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10 字数 261,000

1978年6月第1版

1982年10月第2版 1982年10月第6次印刷

印数: 700,001—895,500

统一书号: 13119·727 定价: (科二) 0.70 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的一本，在平面几何学的基础上，介绍了中学立体几何学的全部内容。本书写得深入浅出，概念清楚，定理证明严谨、逻辑性强，并有大量联系生产及生活实际的例题。书中附有大量习题可作为练习，以帮助复习巩固并进一步加深对课文内容的理解，对较难的习题都作了程度不同的提示。只要具备平面几何、代数和三角的初步知识即可自学阅读。

本书可供知识青年、青年职工、干部自学之用，也可供中等学校教师参考。

第二版出版说明

《数理化自学丛书》第二版是在第一版的基础上编写而成的。考虑到我社已出版大学数、理、化自学丛书，中学数学中的微积分内容没有另编分册。第二版仍包括《代数》四册、《平面几何》两册、《平面三角》、《立体几何》、《平面解析几何》、《物理》四册和《化学》四册，共十七册。

由黄丹蘧、杨荣祥、余元希、杨逢挺、桂君协等同志主编的第一版，自1963年陆续出版后，受到广大读者的欢迎。特别是1977年重排、重印以来，受到社会各方面极为广泛的关注，在广大读者中有了相当的影响。许多在职职工、农村青年和在校学生，自学了这套书以后，数理化知识水平有了一定的提高。

第二版由杨荣祥、余元希、束世杰、季文德等同志主编，数理化自学丛书编委会审定。它保留了第一版在编写上“详尽在先、概括在后、通俗到底”和“便于自学、无师自通”的特色，仍是一套与现行中学课本并行的自学读物。第二版仍从读者的实际情况出发，按传统的教学体系编写。但这次参照新的试行教学大纲的要求，与第一版相比，数学各分册的编写内容作了适当的增删和调整，基础知识和运算技能的训练有了进一步加强；物理各分册在内容的取舍、习题的更新、插图的选配、实验的描述等方面均有较大的改进；化学各分册还增加了反映现代科学技术水平的基础理论知识，在理论和实践相结合的原则下，内容和体系均有新的特色。此外，各册的例题和习题选配得力求恰当、合理，知识

论述力求通俗、严密；并按章增加了测验题。在各册编者的话中，还有供读者自学时参考的指导性意见。

自学要有成就，必须刻苦勤奋、踏实认真、持之以恒、知难而进。刻苦自学、学有成就者不乏其人，愿广大读者努力学好。

《数理化自学丛书》出版以来，全国各地的读者给以热情的鼓励和有力的支持，特在此表示衷心感谢。

上海科学技术出版社

编 者 的 话

本书是《数理化自学丛书》中的一种，在学习平面几何的基础上继续学习中学立体几何的全部内容，其中包括直线与平面、多面体和旋转体等三章。只要具备平面几何、代数和三角的初步知识，就可以自行阅读。

本书这次修改时，凡有利于自学的特点，全都保留下来了，除了在正文和范例方面作了适当的修改和补充之外，在习题上也作了相当数量的增删：

(1) 重新描述多面角的定义，增添了补三面角的概念，为读者今后自学球面几何学做好准备。

(2) 补充了欧拉公式，为讨论正多面体建立了理论根据。

(3) 增加了空间几何的点的轨迹和多面体的截面的画法以及这方面的例题和习题。

(4) 加强了多面体和旋转体的极值问题的讨论，增补了这方面的范例和习题。

(5) 补充了球台体积公式的推导，可以直接应用球台的体积公式计算它的体积。

(6) 每章之后的复习题分成 A、B 两组（其中 A 组的题目可以全做，B 组略难一些，可以选做。），并在各章后备有测验题，以供读者自行检验学习成果。

为了培养读者的逻辑思维能力、空间想象能力、分析问题和解决问题的能力以及自学的能力，希望读者在自学过程中能做到下面几点：

(1) 学习立体几何应先学会空间图形(直线与平面)的画法,从而弄清空间的直线和平面之间的位置关系,以便形成空间图形的概念.

(2) 详细阅读课文,读到论证的部分,最好自行推导一遍,便能熟练掌握空间图形的性质和定理.

(3) 解题时应仔细审题,审清题意后则绘制符合题设条件的图形,然后进行分析思考,认真解答.不要先看提示或答案,以便提高独立思考和解题的能力.

(4) 学完每一章时要进行学习小结,领会本章的重点和难点.例如异面直线和三垂线定理是直线与平面这章的重点内容,异面直线间的公垂线的画法是难点.然后在复习的基础上,再检验学习的成果.

总之,要以坚强的信心和决心,进行不懈的努力,并持之以恒,就一定会学好立体几何.

本书原由华祇文、赖云林、奚定华诸同志提供资料,经本人执笔写成,于1978年出版.为与第二版配套,这次虽未重新编写,但按第二版的要求进行了整理.限于本人的水平,书中一定还有缺点和错误,希望读者提供宝贵意见.

编 者

1981年2月

《数理化自学丛书》(第二版)编辑委员会

(以姓氏笔划为序)

主编:

数学 杨荣祥 余元希

物理 束世杰

化学 季文德

委员:

杨荣祥(上海师范学院)

束世杰(上海师范学院)

吴孟明(上海市七一中学)

余元希(华东师范大学)

汪思谦(上海教育学院)

张国模(上海教育学院)

张冠涛(上海市育才中学)

季文德(上海市教育局)

赵宪初(上海市南洋模范中学)

桂君协(上海师范学院)

凌康源(上海教育学院)

目 录

第二版出版说明.....	i
编者的话.....	iii

1. 直线与平面.....	1
平面.....	1
§ 1.1 平面以及平面的判定	1
§ 1.2 平面的表示法	2
§ 1.3 在水平位置的平面内画平面图形	3
§ 1.4 平面的基本性质	6
§ 1.5 确定平面的条件	9
§ 1.6 空间作图题的解法	14
直线和直线的位置关系.....	17
§ 1.7 两条直线的相关位置	17
直线和平面的位置关系.....	20
§ 1.8 直线和平面的相关位置	20
§ 1.9 直线和平面平行的判定	22
§ 1.10 直线和平面平行的性质定理.....	24
§ 1.11 两条异面直线所成的角.....	30
§ 1.12 直线和平面垂直的判定.....	31
§ 1.13 直线和平面垂直的性质定理.....	38
§ 1.14 平面的垂线和斜线.....	41
§ 1.15 直线与平面所成的角.....	44
§ 1.16 三垂线定理.....	47
平面和平面的位置关系.....	53
§ 1.17 两个平面的相关位置.....	53
§ 1.18 平面和平面平行的判定.....	54
§ 1.19 平面和平面平行的性质定理.....	58
§ 1.20 二面角.....	65
§ 1.21 二面角的平面角.....	67

§ 1.22	直二面角和互相垂直的平面	72
§ 1.23	平面和平面垂直的判定	73
§ 1.24	平面和平面垂直的性质定理	76
§ 1.25	点和线在平面内的射影	81
§ 1.26	多面角	91
§ 1.27	补三面角、三面角和多面角的性质定理	96
§ 1.28	多面角的全等	102
§ 1.29	多面角的对称	105
	本章提要	107
	复习题一 A	111
	复习题一 B	113
	第一章测验题	114

2. 多面体 116

	棱柱、棱锥和棱台	116
§ 2.1	多面体	116
§ 2.2	棱柱	117
§ 2.3	平行六面体	122
§ 2.4	棱锥	127
§ 2.5	棱台	136
§ 2.6	棱柱、棱锥和棱台的直观图	141
	棱柱、棱锥和棱台的面积	149
§ 2.7	棱柱的侧面积和全面积	149
§ 2.8	正棱锥的侧面积和全面积	152
§ 2.9	正棱台的侧面积和全面积	158
	棱柱、棱锥和棱台的体积	164
§ 2.10	关于体积的概念	164
§ 2.11	长方体的体积	165
§ 2.12	祖暅定理	170
§ 2.13	棱柱的体积	172
§ 2.14	棱锥的体积	178
§ 2.15	棱台的体积	184
*§ 2.16	拟柱体	189

§ 2.17 正多面体、欧拉公式	194
本章提要	202
复习题二 A	204
复习题二 B.....	206
第二章测验题	208
3. 旋转体	210
圆柱、圆锥和圆台	210
§ 3.1 圆柱	210
§ 3.2 圆锥	212
§ 3.3 圆台	216
§ 3.4 圆柱、圆锥和圆台的直观图.....	223
圆柱、圆锥和圆台的面积	227
§ 3.5 圆柱的侧面展开图和它的侧面积	227
§ 3.6 圆锥的侧面展开图和它的侧面积	230
§ 3.7 圆台的侧面展开图和它的侧面积	234
圆柱、圆锥和圆台的体积	239
§ 3.8 圆柱的体积	239
§ 3.9 圆锥的体积	242
§ 3.10 圆台的体积.....	246
球、球的截面和切面	253
§ 3.11 球.....	253
§ 3.12 球的截面和切面.....	254
球面和它的部分面积.....	261
§ 3.13 球冠、球带	261
§ 3.14 球面、球冠、球带的面积.....	263
球和它的部分体积.....	272
§ 3.15 球扇形.....	272
§ 3.16 球扇形的体积.....	273
§ 3.17 球的体积.....	276
§ 3.18 球缺和球台的体积.....	279
本章提要	284
复习题三 A	286

复习题三 B.....	289
第三章测验题	291
总复习题 A	292
总复习题 B.....	294
总测验题	295
 习题答案.....	 297

1

直线与平面

平面

§1.1 平面以及平面的判定

在平面几何的绪论里已经讲过：体的界限是面，面就是物体的表面，有平的和不平的。现在先讨论物体表面是平的情形。象窗玻璃面、平静的水面、桌子面等等，这些都给我们平面的形象。

木工用角尺检查刨的木板是否平整，水泥工用一根直

的木尺在刚铺水泥的面上刮平，这些做法，都与平面的性质有关。木工常常用角尺的一条直边

放到刨过的木板表面上(图 1.1)，看

角尺的这条直边是不是处处和木板

面密合；如果把角尺的直边随便放

到木板表面的任何位置上，它总是

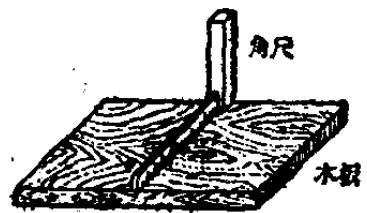


图 1.1

与木板表面密合的，这就说明这块木板已刨平了，也就是这木板表面已被刨成平面了。这里必须注意，在检查时只要发现一次角尺的直边不与木板面处处密合，这就表明木板表面还没有刨平。

木工用角尺检查板面是否刨平的方法，水泥工利用直

的木尺铺平地板的方法，这些都是劳动人民经历了无数次

实践的结果。人们用这个总结出来的经验来判定一个平

面，把这个经验写成定理的形式就是：

经过面内任意两点的直线，如果这直线全部在这个面内，那末这个面是平面。

我们也可以利用这个性质来判定不平的物体表面。例如，玻璃瓶、煤气管、茶杯等的表面都不是平面。如果用直尺去检查一下，很快就会发现它们的表面与直边不可能总是密合的，这就从反面证明了上述各物的表面是不平的。

§1.2 平面的表示法

日常生活中所看到的平面图形，如地板、桌面、匣子表面等，它们的周界都是确定的，而且比较常见的是矩形。当我们站在适当的位置和距离去观察一个矩形的表面时，看上去都象一个平行四边形。因此我们常把矩形表面画成平行四边形，这样可使图形有立体感(图 1.2)。

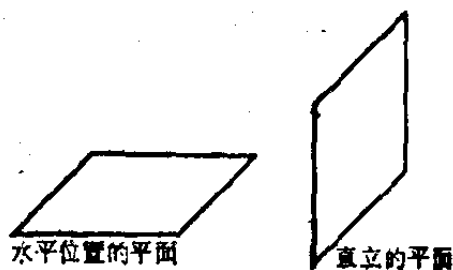


图 1.2

上面的左图是表示水平位置的平面，右图是表示直立的平面。在平面内画空间图形的时候，通常画一个平行四边形以表示平面。但必须注意：用平行四边形表示平面仅仅是表示平面的一部分，而整个平面应当想象它是无边且无限延伸开来的一片平面。

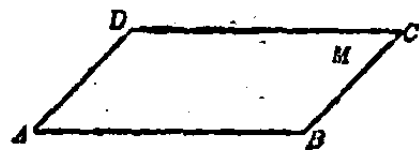


图 1.3

表示一个平面的方法，通常用一个大写的字母写在平行四边形某一个顶角的内部，如图 1.3

中的 M ，记做“平面 M ”。有时也用平行四边形对角的两个大写的字母来标明，如用“平面 AC ”或“平面 BD ”等来表示。

[注意]

(1) 用一个字母或两个字母表示平面的时候，在字母

前面应该写“平面”两个字,以免与点、直线混淆.

(2) 当画一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应该把被遮住部分的线段画成虚线(图 1.4 左)或者连虚线也不画(图 1.4 右).

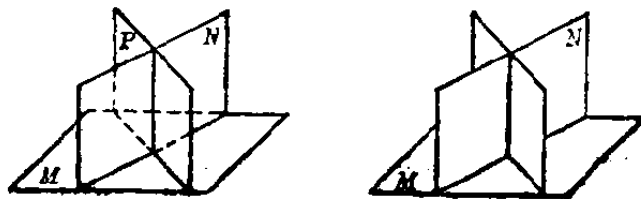


图 1.4

§1.3 在水平位置的平面内画平面图形

在水平位置的平面内画平面图形,一般分为下面几个步骤:

(1) 先画出水平位置的平面(一般用 $\alpha=45^\circ$, $k=\frac{1}{2}$).

(2) 把平面图形上的一条边画成水平方向,也就是和平行四边形的横边平行,它的长度等于原来的长度,或者按比例尺的长度.

(3) 在平面图形上如果有垂直于该边的线段(看作垂直于水平方向),就把这些垂直线段画成和平行四边形的纵边平行(就是和横边成 45° 角),垂直线段的长度等于原来长度的一半,或按比例尺长度的一半截取.

(4) 对于其他位置的线段,应当先在原来的平面图形上从线段的各个端点画出这水平方向边的垂线,再按(3)画出这些垂直的线段,端点确定后就可以画出这些线段了.

下面用例题来说明如何在水平位置的平面内表示平面图形(在下列各例中,水平位置的平面 P 内的作图中取 $\alpha=45^\circ$, $k=\frac{1}{2}$).

例 1 在水平位置的平面 P 内表示已知的正方形 $ABCD$ (图 1.5).

横边 AB 移到水平位置的平面 P 内为 A_1B_1 , 它的长度不变. 但纵边 AD 和 BC 移到平面 P 内时, 须画成与线段 A_1B_1 成 45° 的角, 并且它的长度为原来实长的一半. 则 $A_1B_1C_1D_1$ 就是所要画的正方形.

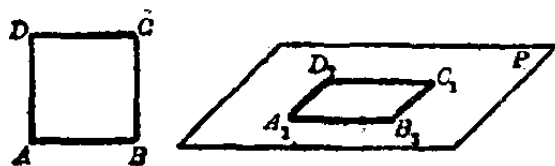


图 1.5

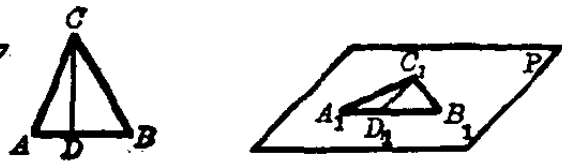


图 1.6

例 2 在水平位置的平面 P 内表示已知的 $\triangle ABC$ (图 1.6).

先在 $\triangle ABC$ 内作高 CD , 在平面 P 内作 $A_1B_1 = AB$, A_1B_1 须与表示平面的平行四边形的横边平行. 在 A_1B_1 上取 D_1 点, 使 $A_1D_1 = AD$. 再由点 D_1 作一直线使它与 A_1B_1 成 45° 的角, 并且自点 D_1 起在这线上截取 $C_1D_1 = \frac{1}{2}CD$, 从而得出点 C_1 . 连 C_1A_1 和 C_1B_1 , 那么, $\triangle A_1B_1C_1$ 就是所要画的三角形.

例 3 在水平位置的平面 P 内表示四边形 $ABCD$ (图 1.7).

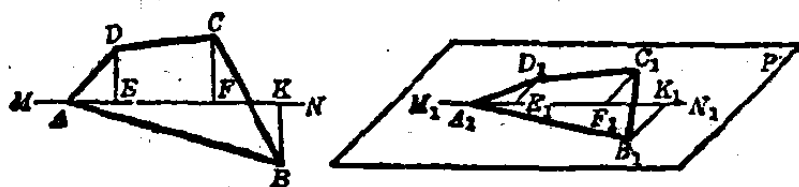


图 1.7

除了上面所说的把一条边画成水平的方法那样, 还可以采取如下的作法. 过四边形的顶点 A 作一条水平的直线 MN . 从 B 、 C 和 D 各顶点分别作 BK 、 CF 和 DE 垂直于 MN .

在平面 P 内, 任作一条和横边平行的直线 M_1N_1 . 在 M_1N_1 上任取一点 A_1 ; 再在 M_1N_1 上顺次截取 A_1E_1 、 E_1F_1