左宗明　蒋　声　编著

初等数学题解

江苏科学技术出版社

初等数学题解

左宗明　蒋声　编

江苏科学技术出版社

K1

初等数学题解

左宗明　蒋　声　编

*

江苏科学技术出版社出版
江苏省新华书店发行
扬州印刷厂印刷

1979年12月第1版　1979年12月第1次印刷
印数：1—350,000册

书号：13196·016　定价：1.40 元

前　　言

我们选编本书的目的，主要是为了帮助具有高中水平的同学复习迎考，帮助他们进一步提高解题能力，开阔思路，加深对基本概念的理解。

所谓解题能力，就数学而言，主要包括具体演算能力、空间想象能力、抽象概括能力和逻辑推理能力。这四方面能力提高了，就不怕数学题目的千变万化，同时也就为以后的学习和工作打下了良好的基础。而要迅速提高这几方面的能力，最好的办法，就是在教师或参考资料的指导和帮助下，自己动手动脑，选做若干不同类型的典型习题，边做边分析，举一反三，触类旁通。本书题目集中排列在第一部分，第二部分是提示，第三部分则是解答和注释。我们希望读者尽量独自解题，如果认真思考一番以后，仍觉得无从下手，再看提示；看过提示仍做不出，再看解答。不过，最好还是在自己解出之后，再翻阅解答部分核对比较。

在本书的解答部分，我们力求多介绍几种类型的解题方法，并且在某些习题的解答后面附有注释，介绍该题如何变形和发展，或者有何高等数学背景，等等。有些题目还会有各种不同解法，我们相信，一定有很多读者，能够对本书中的很多习题提出自己的新解法和新注释。

本书精选了550道比较有代表性的习题。由于编选的题目多数带有不同程度的综合性，有时很难说某道具体题目属于教材的哪一部分，因而只是按照题目的形式大致分为代数

题、几何题、三角题和解析几何题。书中还有50道综合题和50道杂题，合并列为第五类。有些难度较大的题，在题目前面加上*号，可供进一步钻研的同学参考。

由于编者水平所限，书中难免会有许多缺点，甚至错误，欢迎读者批评指出。

沈宗华、张中强同志认真、仔细地帮助审改了书稿的全文，曹志英同志热情帮助绘制本书的大量附图，我们一并在此表示衷心的感谢！

编者　1979年6月

目　录

Ⅰ　问　题

Ⅱ　提　示

Ⅲ　解　答

I 问　　题

一、代　　数

1． 大小汽车在狭窄的道路上相遇，必须其中一车倒车让道才能通过。已知小汽车的速度是大汽车的3倍，小汽车倒车的距离是大汽车的10倍。如果倒车速度是正常速度的五分之一，问该谁倒车才能使两车都能尽快地通过这段狭窄的道路？

2． 试写出下列算式中各个字母所代表的数：

$$
\begin{array}{r|cccccc}
 & & & & m & 8 & n \\ \cline{2-7}
g\,h\,k & a & b & c & d & e & f \\
 & p & q & r & s & & \\ \cline{2-7}
 & & & t & u & e & \\
 & & & v & w & j & \\ \cline{4-7}
 & & & x & y & z & f \\
 & & & x & y & z & f \\ \cline{4-7}
\end{array}
$$

3． 如果$x>0$，$y>0$且$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$，求

$$\frac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}.$$

4． 证明：表达式

$$y=(x+2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}+(x-2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}$$

当 $1\leqslant x<2$ 时等于 $\frac{2}{2-x}$，当 $x>2$ 时等于 $\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$。

5。分解因式：(a) $x^{5n}+x^n+1$；

(b) $x^4+6x^2y^2+25y^4$。

6。分解因式：(a) $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}-y^2+y+2$；

(b) $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$。

7. 分解因式：

$(a^2+ab+b^2)(a^2+ab+2b^2)-12b^4$。

8。分解因式：

(a) $2a^2+9ab-5b^2-3a+7b-2$；

(b) $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$。

9. 分解因式：

$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$。

10。已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数，并且 $bd+cd$ 是奇数。试证此多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积。

***11**。求这样的实数 a，b 和 p，q，使下面的式子对任何 x 都成立：

$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$。

12。设 k，p，m，n 都是非负整数，求出使等式

$$\frac{(x+1)^k}{x^p}-1=\frac{(x+1)^m}{x^n}$$

对所有 $x\neq0$ 成立的 k，p，m，n 的值。

13。(a) 若 $\frac{a}{x^2-yz}=\frac{b}{y^2-zx}=\frac{c}{z^2-xy}$ 且 $xyz\neq0$，证明

$$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z).$$

(b) 若 $ax^3=by^3=cz^3$ 且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，

证明 $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

14. 已知 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$，求证

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$$
$$=(a+b+c)^{2n+1}.\text{（}n\text{为正整数）}$$

15. 已知

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1,$$

试证这三个分数中有两个等于1，一个等于－1。

16. 设a，b，c互不相等，且将式子

$a+\frac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}$中某二数互换时其值不变。证明：互换其他二数时式子的值也不变，且当$a+b+c=1$时式子的值为零。

17. 已知 $a:b=c:d$，求证

$$\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n.$$

18. 若$a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=0$，试证

$$a^2+c^2=1,\ b^2+d^2=1,\ ab+cd=0.$$

19. 证明：如果将一个数A的最后三位数字所表示的数N与其余各位数字表示的数M相减（大数减小数），所得的差为零，则该数同时被7，11与13整除；若所得的差是7或11或13的倍数，则该数分别被7或11或13整除。

20. 若n为自然数，证明

(a) n^5-n 被5整除；

(b) $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$被9整除；

（c） n^5-5n^3+4n 被120整除。

21. （a） 对任何质数$p>3$，证明p^2被24除的余数都等于1。

（b） 求出使p^2+8为质数的一切质数p。

22. 证明

（a） $13^{2n}-1$被168整除（n为自然数）；

（b） $5^{2n}-24n-1$被576整除（n为自然数）；

（c） $11^{10}-1$被100整除。

23. 哪些自然数n，能使2^n+1被3整除？

24. 试求以11除101^{10}的余数。

*25. 对于任意的正整数n，证明

$$S_n=1^n+2^n+3^n+4^n$$

在且仅在n不是4的倍数时，被5整除。

26. 如果p和q是相差为2的一对质数，则p^p+q^q必是$p+q$的倍数。

27. 对于任何自然数n，证明

$$A=2903^n-803^n-464^n+261^n$$

被1897整除。

28. 对于任意的自然数n，证明

$$A_n=5^n+2\times3^{n-1}+1$$

必被8整除。

29. 对于任意自然数n与k，证明表达式

$$k^{n+2}+(k+1)^{2n+1}$$

被k^2+k+1整除。

30. 若q是被p^n（p是自然数n是非负整数）整除的自然数，则$(p+1)^q-1$被p^{n+1}整除，试证明之。

31. 若奇数$n\geqslant3$，证明

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)(n-1)!$$

被 n 整除。

32. 证明多项式$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$（m，n，p都是非负整数）被x^2+x+1整除。

33. 假定a，b，c与d都是整数且ac，$bc+ad$，bd都被整数p整除，证明bc与ad也被p整除。

34. 证明$2x+3y$与$9x+5y$对于某些整数x与y的值同被17整除。

35. 设x，y，z是不同的整数，而n是非负整数，证明

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

必是整数。

36. 对于任何整数a，证明

a^5+4a^3+3a 与 a^4+3a^2+1

没有公因子。

37. 证明：仅用面额为3斤和10斤的粮券即可购买任意k（$k\geqslant 18$）斤粮食而不需要找补。

***38.** 设n，m（$n<m$）为互质（即没有大于1的公约数）的正整数，试求自然数N，使对任意的自然数$k\geqslant N$，必有

$$k=pn+qm,$$

其中p，q为非负整数。

39. 求三个正整数a，b，c，使

（a） $a<b<c$；

（b） 它们两两互质；

（c） 任意两个数之和必是第三个数的倍数。

*40. 设 x，y，z是按增长顺序排列的三个自然数，并且它们的倒数之和是整数，求此三数。

41. 设 a_1，b_1，c_1 与 a_2，b_2，c_2 是这样的实数，对任何整数 x 与 y，数

$$a_1x+b_1y+c_1 \text{ 与 } a_2x+b_2y+c_2$$

中至少有一个是偶数。证明：系数 a_1，b_1，c_1 与 a_2，b_2，c_2中至少有一组的所有数都是整数。

42. 求证：任一正整数m都可表示为

$$2^k+a_{k-1}2^{k-1}+a_{k-2}2^{k-2}+\cdots+a_1 2+a_0$$

的形式，且 k 为自然数，而a_0，a_1，…，a_{k-1}是 0 或 1 。

43. 将 1 元人民币1000张分为10叠，使当取用 1～1000中任一 x（x 为整数）元时，只要适当的拿出其中的若干叠。问这10叠人民币的张数应各为多少？

44. 如果在1331的每相邻两位数字中间添上相等个数的 0，证明这样得到的数必是完全立方数。

45. 证明数列 11，111，1111，……中没有完全平方数。

46. 在一个完全平方数中，个位与十位数字的乘积必定是偶数，试证明之。

47. 任意四个连续的自然数的乘积不可能是某个整数的平方，试证明之。

48. 五个连续的正整数的平方和不可能是任何整数的平方，试证明之。

49. 试证不论 n 是什么整数，

$$x^2-16nx+11^3=0$$

没有整数解。

*50. 证明：不论 n 是什么整数，方程

$$x^2-16nx+7^s=0$$

没有整数解，其中 s 是任何正的奇数。

51. 已知三位质数 p 的百位数字是 a，十位数字是 b，个位数字是 c，证明二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

没有整数解。

52. 若整系数多项式 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 当 $x=0$ 与 $x=1$ 时取奇数值，则它没有整数根（一个多项式的根，是指那些使多项式的值为 0 的自变量的值），试证明之。

53. 假定 p 是大于 2 的质数，求方程

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

的正整数解 x 与 y 且 $x\neq y$。

54. 设 p，q 为质数，问方程 $x^2+p^2x+q^3=0$ 在 p，q 为何值时有整数根？

55. 对任意的整数 a 与 b，证明方程组

$$\begin{cases}x+y+2z+2t=a\\2x-2y+z-t=b\end{cases}$$

有整数解。

***56.** 求下列方程组的整数解

$$\begin{cases}x^{x+y}=y^{60}\\y^{x+y}=x^{15}\end{cases}$$

57. 已知 a 和 b 是有理数，$a\sqrt[3]{3}+b\sqrt[3]{9}$ 也是有理数，证明 $a=b=0$。

58. 设在 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=s$ 中，a，b，c，d 都是有理数，x

是无理数。求证：当$bc=ad$时，s是有理数；当$bc\neq ad$时，S是无理数。

59. 有一整数的最高位数字为1，如果把1放到末尾所得到的数是原数的3倍，求满足此条件的最小整数。

60. 有一个四位数，已知其十位数加2等于它的个位数，而将此数颠倒顺序所得的数与该数之和为11770，求该数。

61. 哪一年出生的人，在1979年时的年龄恰好等于出生年份的各位数字之和？

62. 若a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3满足

$$3a_1=a_2+a_3+b_1,\quad 3b_1=b_2+b_3+a_1,$$
$$3a_2=a_3+a_1+b_2,\quad 3b_2=b_3+b_1+a_2,$$
$$3a_3=a_1+a_2+b_3,\quad 3b_3=b_1+b_2+a_3,$$

则$a_1=a_2=a_3=b_1=b_2=b_3$，试证明之。

63. 设a，b，c，d均为实数，且适合

$$(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0,$$

试证a，b，c成等比数列，且其公比为d。

64. 试确定m之值，使方程

$$4x^2+(m-2)x+m-5=0$$

的根均为正、均为负及一正一负。

65. 求证方程$(x-a)(x-a-b)=1$有两个实根，其中一个大于a，另一个小于a。

66. 已知方程$x^2+px+q=0$有相异实根，若$k\neq 0$，试证方程

$$x^2+px+q+k(2x+p)=0$$

也有相异实根，并且仅有一根在前一方程的二根之间。

67. 证明方程（其中a与b是正数）

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

有两个实根，其中的一个介于$\frac{a}{3}$与$\frac{2a}{3}$之间，另一个介于$-\frac{2b}{3}$与$-\frac{b}{3}$之间。

68. 设p与q是两个奇数，证明方程 $x^2+2px+2q=0$不可能有有理根。

69. 已知α，β，γ是方程$x^3+px^2+qx+r=0$的根，求下列各式之值：

(a) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$，　(b) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$，

(c) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$，(d) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$，

(e) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$。

70. 已知a，b，c三数既成等差数列又成等比数列，又α，β是方程$ax^2+bx-c=0$的两个根，求$\alpha^5\beta^2-\alpha^2\beta^5$之值。

71. 求方程$x^3-x+1=0$的三个根的8次方之和。

72. 已知α，β，γ是方程$x^3-2x^2+x+1=0$的根，求作新方程，其根为

(a) $a=\beta\gamma$，$b=\gamma\alpha$，$c=\alpha\beta$；

(b) $a=\beta+\gamma$，$b=\gamma+\alpha$，$c=\alpha+\beta$。

73. 设x_1与x_2是方程$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$的根，试证x_1^3与x_2^3是方程

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$$

的根。

74. 设α，β与γ，δ分别是方程

$$x^2+px+1=0 \quad 与 \quad x^2+qx+1=0$$
的根，求证
$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$
75. 设方程
$$x^2-px+n=0 \qquad (1)$$
$$x^2-qx+m=0 \qquad (2)$$
$$x^2-rx+l=0 \qquad (3)$$
两两的公共根 α，β，γ 互不相同，求证
$$p^2+q^2+r^2+4(n+m+l)=2(pq+qr+rp).$$
76. 假定实系数的多项式
$$p(x)=x^3+px+q$$
的根都是实数且 $q\neq 0$，试证 $p<0$。

77. 设 x^3+px^2+qx+r 能被 ax^2+bx+c 整除，证明
$$\frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}.$$
78. 证明不存在这样的两个分数，它们的和与积都是整数。

79. 求方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有两个等根的条件。

80. 解方程：$x(x+1)(x+2)(x+3)=1680$。

81. 解方程：
$$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)+abc=0.$$
82. 解方程：
$$(a^2-a)^2(x^2-x+1)^3=(a^2-a+1)^3(x^2-x)^2.$$
83. 解方程：$x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$。

*__84.__ 求方程 $x^3-15x-126=0$ 的实根。

85. 求方程　$x^3-3x^2+12x-36=0$ 的实根。

*86. 求方程　$x^4-2x^2+8x-3=0$ 的实根。

87. 解方程：$(x^2+1)(y^2+2)(z^2+8)=32xyz$。

88. 证明：同时满足下列二方程

$$x^2-3xy+2y^2+x-y=0$$

$$x^2-2xy+y^2-5x+7y=0$$

的任一对 x 与 y 也必满足方程

$$xy-12x+15y=0.$$

89. 求方程组

$$\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x+y=3 \end{cases}$$

的实数解。

90. 解方程组：

$$\begin{cases} (x+y+2a)(x+y)=a^2, \\ (z+x+2b)(z+x)=b^2, \\ (y+z+2c)(y+z)=c^2. \end{cases}$$

91. 解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=10, & (1) \\ xy+yz+zx=33, & (2) \\ (x+y)(y+z)(z+x)=294. & (3) \end{cases}$$

92. 解方程：$2(x+1)=2\sqrt{x(x+8)}+\sqrt{x}-\sqrt{x+8}$.

93. 求方程

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}$$

的一切实数解。

94. 解方程：