近代电磁理论

龚中麟 徐承和 编著

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS
·1979·

北京大学教材

近代电磁理论

龚中麟　徐承和　编著

北京大学出版社

北京大学教材
近代电磁理论
龚中麟　徐承和　编著
责任编辑：李采华
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂　印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
850×1168毫米　32开本　13.25印张　333千字
1990年12月第一版　1990年12月第一次印刷
印数：0001—3,000册
ISBN 7-301-01319-1/TN·3
定价：3.15元

内 容 简 介

本书系统地讲述应用电磁理论的基本理论，着重选择与近代进展及应用密切有关的难度较高的问题。第一章介绍电磁场的基本定理。第二章为平面电磁波理论，包括在各向异性及非均匀介质中的传播及射线光学近似。第三章讲述导波理论，侧重于光纤及缓变参量不规则波导理论。第四至六章为辐射、散射及衍射理论，着重于积方分程方法，含有较多的高难度问题。第七章讲述开放式谐振腔理论。

本书可作为理工科高等院校无线电电子学、无线电物理、电磁场工程等专业研究生“电磁理论”课程的教学参考书，对于在有关领域内工作的研究人员及工程技术人员本书也是一本有用的参考书。

前　　言

本书是以作者们近年来在北京大学无线电电子学系为硕士研究生讲授的“近代电磁理论”和“缓变参量波导及开放式谐振腔”等课程所写的讲义及讲稿为基础，经补充、修订而成，着重讲述应用电磁理论的基本原理和近代发展。应用电磁理论是构成现代电子技术及应用物理的科学基础的一个重要组成部分，同时它又是某些专门的技术领域或科学分支，如天线与电波传播、微波技术、无线电物理、电磁场工程、电磁兼容性等的直接基础。本书的主要目的是针对后者的需要，即为了满足将在上述领域或有关的其它领域内从事科学研究的硕士研究生的需要而编写的。

尽管近年来在应用电磁理论领域中不断有新的概念和方法提出，而且解析方法的发展与应用高速计算机的数值方法的发展之间的联系也越来越紧密，但应用电磁理论的基础仍然是Maxwell的经典理论，基本的解析方法仍然是发展新的解析方法和计算方法的基础，故本书的重点放在讲述基本原理和基本解析方法方面，同时加强了与新的应用有关的概念和方法的介绍。第一章在Maxwell方程组中引入虚构的磁源之后着重介绍了场等效原理和互易定理，作为互易定理应用的一个重要方面给出了应用反应概念导出电磁学特征量的变分公式的例子。以后的各章则分别讲述平面电磁波传播，导波传播，电磁辐射、散射和衍射的基本理论。由于波传播问题的射线方法近年来已有相当普遍的应用，我们在论述平面波传播问题的第二章中辟出一节系统地介绍射线光学近似。在讨论导波问题的第三章中则对于光纤传输理论和缓变参量不规则波导理论给以较多的篇幅，后者在国内外的电磁理论教科书中均很少涉及。在论述辐射、散射和衍射问题的第四、五、六章中

侧重介绍积分方程方法和积分方程的求解问题。广泛地应用积分方程方法是近年来应用电磁理论发展的一个明显趋势，这与有效求解积分方程的数值方法——矩量法的发展是分不开的．在§4.3中我们给出了用矩量法求解线天线的积分方程的例子，而在第六章中则以导体半平面的衍射问题和平行平面波导开口端的衍射问题为例分别介绍了求解积分方程的回路积分方法和函数论方法(即Wiener-Hopf 方法)。相信在§4.5中介绍的Sommerfeld 半空间问题的求解和§6.2中导体圆柱衍射问题的求解会有助于读者了解和掌握在电磁理论中应用积分变换和复平面上回路积分的方法。根据作者们的经验，学习电磁理论需要掌握某些典型的复杂问题的详细求解过程，对于基本原理和方法有了透彻的了解方能具备解决新的问题的能力，在这三章中给出的上述各个问题及一些其它问题的详细求解过程将有助于达到这个目的。在最后一章，即第七章中集中介绍了开放式谐振腔的理论，这实际上是波导开端衍射理论的应用，开放式谐振腔在激光器和准激光器类型的微波电子器件中有着重要的应用。

综观全书内容，有一些电磁理论的近代进展本书未予以介绍，较为明显的是衍射的渐近理论(即衍射的几何理论和物理理论)，瞬态问题和逆散射问题，以及电磁理论的相对论理论。由于受到教学时数的限制这些内容未能讲授，如欲在本书中包括这些内容势必使篇幅大增，好在其中的一些，如衍射的几何理论以及相对论理论已有了专著。

阅读本书要求读者具备理工科大学“电动力学”或“电磁场理论”的水平，而且通晓矢量和张量运算，复变函数理论，偏微分方程和特殊函数方面的数学知识。为节省篇幅本书未编写有关的数学附录，但在用到有关的公式时多数均指出了出处。在本书中矢量用黑斜体字母表示，张量用黑正体字母表示，物理量随时间的简谐变化用工程上习惯用的 $e^{j\omega t}$ 表示方法，单位制则采用SI制。

本书的§3.3—§3.5，§6.4，§6.5和第七章由徐承和编写，其余部分由龚中麟编写。由于作者的学识水平所限，书中难免存在错误和不妥之处，还望读者和同行专家、学者不吝赐教。

龚中麟　徐承和

1989年11月

目　录

第一章　电磁理论基础……………………………………………………（1）

§1.1　电磁场的基本方程……………………………………………（1）

1. Maxwell方程式 ……………………………………………（1）

2. 磁荷及磁流．电磁场方程的对偶性 ……………………………（2）

3. 边界条件 ………………………………………………………（4）

4. 复数Poynting 定理……………………………………………（4）

§1.2　势函数 …………………………………………………………（7）

1. 电型Lorentz势及磁型Lorentz势………………………………（7）

2. 无界空间三维标量波动方程的Green 函数………………………（9）

3. 无界空间中任意局域分布源的势 ………………………………（11）

§1.3　场等效原理 ……………………………………………………（13）

1. 唯一性定理 ……………………………………………………（13）

2. 镜像原理 ………………………………………………………（14）

3. 场等效原理 ……………………………………………………（16）

§1.4　互易定理 ………………………………………………………（20）

1. 互易定理 ………………………………………………………（20）

2. 反应概念及互易定理的简单应用 ………………………………（22）

3. 以反应作为约束导出的变分公式 ………………………………（25）

参考文献…………………………………………………………………（30）

第二章　无界媒质中的平面电磁波 ……………………………………（32）

§2.1　电介质和导体的频率色散特性…………………………………（32）

1. 电介质的色散和损耗 ……………………………………………（32）

2. 导电介质的色散和损耗 …………………………………………（40）

3. Kramers-Kronig 关系……………………………………………（42）

§2.2　无耗可逆各向异性介质中的平面电磁波…………………………（46）

1. 晶体的介电张量 …………………………………………………（46）

2. 各向异性电介质中平面电磁波的一般特性 ………………………（48）

3. 单轴电介质中的平面电磁波 ……………………………………（49）

4. 波矢量面与波射线 …… (53)
§2.3 旋性介质中的平面电磁波 …… (55)
1. 磁化等离子体的介电张量 …… (55)
2. 波方程 …… (58)
3. 平行于外磁场方向传播的波 …… (59)
4. 垂直于外磁场方向传播的波 …… (62)
§2.4 平面电磁波在非均匀介质中的传播 …… (65)
1. 非均匀介质中的电磁波方程 …… (65)
2. 平面分层介质中的波方程 …… (66)
3. 波在平面分层介质表面的反射。等效网络表示 …… (69)
4. 波在缓变分层介质中的传播。WKB近似解 …… (72)
5. 波在缓变分层介质中的传播。几何光学近似 …… (74)
§2.5 电磁波传播问题的射线光学近似 …… (77)
1. 程函（eikonal）方程 …… (77)
2. 射线的微分方程式 …… (80)
3. 能量及场振幅的传播 …… (83)
4. 平方律介质的聚焦性质 …… (88)
5. 射线追迹 …… (92)
参考文献 …… (93)
第三章 导行电磁波 …… (95)
§3.1 表面波 …… (95)
1. 导波的基本方程式 …… (95)
2. 沿平面分界面传播的表面波 …… (97)
3. 沿圆柱面传播的表面波 …… (102)
§3.2 电介质波导 …… (102)
1. 圆介质杆波导中的混合模 …… (103)
2. 轴对称模式 …… (106)
§3.3 光纤传输理论基础 …… (110)
1. 双层均匀介质模型。线性极化模式 …… (111)
2. 色散方程的近似求解 …… (117)
3. 阶梯（折射率）光纤中的功率流 …… (121)
4. 阶梯多模光纤中的模式色散 …… (123)
5. 光纤中的传输损耗 …… (126)
§3.4 缓变参量不规则波导理论 …… (128)

1. 规则波导中的模式及其正交性 ……(128)
2. 横截面法计算缓变填充物质波导 ……(134)
3. 直波导中μ和ε是分块常数的情况 ……(138)
4. 横截面法计算缓变截面波导 ……(141)
§3.5 周期性传输系统 ……(153)
1. Floquet 定理与空间谐波 ……(154)
2. 螺旋线 ……(161)
参考文献 ……(167)
第四章 电磁波的辐射 ……(169)
§4.1 电磁辐射的理论基础 ……(169)
1. 自由空间并矢Green 函数。辐射条件 ……(169)
2. 局域分布源的辐射 ……(172)
3. 天线的基本概念 ……(176)
4. 半波天线 ……(179)
§4.2 柱形天线的积分方程 ……(182)
1. Pocklington 积分方程 ……(182)
2. Hallén积分方程 ……(189)
§4.3 细圆柱天线Hallén 积分方程的矩量法解 ……(191)
1. 矩量法的一般原理和步骤 ……(191)
2. 细圆柱天线Hallén积分方程的矩量法解。点匹配法 ……(196)
3. 最小平方逼近法 ……(200)
§4.4 电磁波通过孔的辐射 ……(204)
1. 场等效原理应用于孔辐射问题 ……(204)
2. 平面孔的辐射场 ……(209)
3. 平面波均匀照射的圆形孔的辐射 ……(212)
§4.5 有耗的半空间上偶极子的辐射 ……(217)
1. 问题的概述 ……(217)
2. 球面波展开为柱面波 ……(218)
3. 有耗半空间上竖直电偶极子的辐射 ……(223)
4. 积分的近似求值 ……(229)
参考文献 ……(239)
第五章 电磁波的散射 ……(241)
§5.1 导体圆柱对于平面电磁波的散射 ……(241)

1. 二维电磁场方程……(241)
2. E型平面波在无穷长导体圆柱上的散射……(243)
3. 散射截面……(246)
§5.2 介质球的散射……(248)
1. 用标量势构成球坐标系中矢量波动方程的解……(248)
2. 入射平面波展开为球面波……(252)
3. 均匀介质球散射问题的解……(253)
4. Rayleigh 散射……(257)
§5.3 散射截面及截面定理……(259)
1. 散射截面……(259)
2. 截面定理……(263)
§5.4 散射问题的积分方程……(268)
1. 电磁场方程式的直接积分……(268)
2. 散射场的积分表示式……(275)
3. 电场积分方程和磁场积分方程……(279)
§5.5 Babinet原理。平面孔的散射及传输……(287)
1. Babinet 原理……(287)
2. 隙缝天线及其阻抗……(293)
3. 孔隙传输……(297)
参考文献……(299)
第六章 电磁波的衍射……(301)
§6.1 Fraunhofer及 Fresnel 衍射……(301)
1. Kirchhoff 近似积分的矢量形式……(301)
2. Fraunhofer及 Fresnel 衍射……(305)
§6.2 平面电磁波在导体圆柱上的衍射……(311)
1. Watson 变换解……(311)
2. 阴影区中的衍射场……(314)
3. 照明区的散射场……(319)
§6.3 平面波在半平面导体边缘的衍射……(322)
1. 平面波的角谱……(322)
2. 导体半平面的散射场……(324)
3. 半平面衍射问题的积分方程……(326)
4. 用回路积分法求解积分方程……(327)
5. 积分方程的解化为Fresnel积分……(330)

6. 解的特性 ……(335)
§6.4 电磁波在平行平面波导开口端的衍射 ……(337)
1. 面电流分布的积分方程 ……(337)
2. 面电流分布衍射修正项的积分方程 ……(341)
3. Wiener-Hopf 方法 ……(344)
4. 近截止情况下的解 ……(348)
§6.5 圆波导开口端的衍射 ……(352)
1. 圆对称模式 ……(352)
2. 非对称模式 ……(363)
参考文献 ……(366)
第七章 开放式谐振腔理论 ……(368)
§7.1 引言 ……(368)
§7.2 平面波导开端衍射的抛物型微分方程解法 ……(370)
§7.3 矩形平面镜腔 ……(379)
§7.4 圆形平面镜腔 ……(387)
§7.5 球面镜开放腔 ……(393)
参考文献 ……(405)
索引 ……(406)

第一章　电磁理论基础

§1.1　电磁场的基本方程

1.　Maxwell方程式

真空或介质中的宏观电磁场的 Maxwell 方程组为

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \quad \nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}, \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho, \qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

电荷和电流在Maxwell方程组中是作为源项出现的，电荷密度ρ和电流密度$\boldsymbol{J}$ 通过电流连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{1.1.2}$$

相互联系．作为确定电磁场和电荷、电流系统运动的完整方程组，除了Maxwell方程组和电流连续性方程之外还必须补充两个关系式以给出电场强度$\boldsymbol{E}$和电位移 $\boldsymbol{D}$ 以及磁场强度$\boldsymbol{H}$和磁感应强度$\boldsymbol{B}$ 之间的关系．这两个关系与介质的性质有关，称为结构关系（constitutive relations）．

在真空中$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{H}$之间有简单的线性关系：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}. \tag{1.1.3}$$

这里的ε_0和μ_0 分别称为真空介电常数和真空磁导率，取值分别为

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}, \\ &\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m}. \end{aligned}$$

ε_0 和μ_0是基本的物理常数．对于各向同性电磁介质，在实际上通

常遇到的场强值范围内结构关系是简单的线性关系：

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\kappa_e\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E},\\ &\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})=\mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H}=\mu_0\kappa_m\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}. \end{aligned}\right\} \quad (1.1.4)$$

$\boldsymbol{P}$ 和$\boldsymbol{M}$分别是介质的宏观电极化强度和磁化强度。但是，在结构比较复杂的介质，例如晶体中$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{H}$ 之间的这种简单的线性关系不再成立，介电常数和磁导率需要用张量表示，这种介质称为各向异性介质。关于介质的电磁性质问题将在第二章中作详细的讨论。

2. 磁荷及磁流。电磁场方程的对偶性[1,2]

对于随时间简谐变化的电磁场使用复数表示是方便的，本书中我们使用对于工程问题方便的 $e^{j\omega t}$表示物理量随时间的简谐变化。从本世纪40年代开始在应用电磁理论中引入的虚构磁荷和磁流概念已被证明对于解决许多应用电磁学的实际问题是方便的。使用简谐场的复数表示方法并且在对应的位置加上虚构的磁荷密度ρ_m及磁流密度$\boldsymbol{J}_m$ 后 Maxwell 方程组(1.1.1)就变成

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E}+j\omega\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{J}_m, && \nabla\times\boldsymbol{H}-j\omega\boldsymbol{D}=\boldsymbol{J},\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho, && \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_m. \end{aligned}\right\} \quad (1.1.5)$$

尽管磁荷和磁流不像电荷和电流那样是物理上可以观察的实体，但将它们作为源项引入Maxwell方程式后使得 Maxwell方程式的数学形式变成对称的，当认识到磁型源所表示的问题的物理意义之后就可以给某些电磁场问题的求解带来数学上的便利。对于磁型源的意义我们将通过具体问题来逐步说明。写成(1.1.5)形式的 Maxwell 方程组在本书中将作为时谐电磁场问题的基本方程。

当只存在电型源ρ,$\boldsymbol{J}$或只存在磁型源 ρ_m,$\boldsymbol{J}_m$ 时我们逐一写出均匀介质中的Maxwell方程式和电流连续性方程（在虚构源 ρ_m 和 $\boldsymbol{J}_m$之间存在着与真实源 ρ,$\boldsymbol{J}$ 之间相同的连续性方程）：

电 型 源	磁 型 源
$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=0,$	$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}},$
$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J},$	$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=0,$
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon,$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,$
$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,$	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\rho_{\mathrm{m}}/\mu,$
$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\rho=0,$	$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\rho_{\mathrm{m}}=0.$

不难看出这两组方程式之间存在着明显的对应关系，也就是说如果将上面两组方程式中的所有场量和源量作如下的代换：

$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H},$	$\boldsymbol{E}\to-\boldsymbol{H},$
$\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E},$	$\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{E},$
$\varepsilon\to\mu,$	$\varepsilon\to\mu,$
$\mu\to\varepsilon,$	$\mu\to\varepsilon,$
$\rho\to\rho_{\mathrm{m}},$	$\rho_{\mathrm{m}}\to\rho,$
$\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}},$	$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}\to\boldsymbol{J},$

电型源方程就变为磁型源方程，而磁型源方程则变为电型源方程。电型源方程式和磁型源方程式的这种对应形式称为对偶性(duality)。电磁场方程式的对偶性提供了这样一种便利，如果知道一个问题（例如电型源问题）的解就可由对偶关系得出它的对偶问题（为一磁型源问题）的解，而无需重复求解过程。由电偶极子的辐射场写出磁偶极子的辐射场可作为对偶性应用的简单例子。

【例】 短磁流元的辐射场。

位于原点沿 $+z$ 轴方向取向的短电流元 $I_0\mathrm{d}l$ 在远区的辐射场的熟知结果为

$$\left.\begin{aligned}E_\theta&=\frac{I_0\mathrm{d}l}{4\pi}\,\mathrm{j}\omega\mu_0\sin\theta\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_0r)}}{r},\\H_\phi&=\frac{1}{Z_0}E_\theta=\frac{I_0\mathrm{d}l}{4\pi}\,\mathrm{j}k_0\sin\theta\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_0r)}}{r},\end{aligned}\right\}\tag{1.1.6}$$

其中$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，$Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$。短电流元的对偶源是短磁流元$I_{m0}dl$，依据对偶关系可由(1.1.6)式直接写出沿$+z$轴取向的短磁流元$I_{m0}dl$在远区的辐射场

$$\left.\begin{aligned}H_\theta &= \frac{I_{m0}dl}{4\pi}\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\sin\theta\ \frac{e^{\mathrm{j}(\omega t-k_0r)}}{r},\\ E_\phi &= -\frac{I_{m0}dl}{4\pi}\mathrm{j}k_0\sin\theta\frac{e^{\mathrm{j}(\omega t-k_0r)}}{r}.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.7}$$

不难看出这是小电流圈的辐射场，但为得到磁流元与小电流圈磁矩之间的具体对应关系还需直接求出小电流圈的辐射场，所得到的具体对应关系为

$$I_{m0}dl=\mathrm{j}\omega\mu_0IS=\mathrm{j}\omega\mu_0m_0,\tag{1.1.8}$$

这里$m_0=IS$为小电流圈的磁矩。

3. 边界条件

在不同介质分界面两侧场发生不连续性变化，应用与(1.1.5)式对应的积分形式的Maxwell方程式可导出在介质分界面两侧场应当满足的下列边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=-\boldsymbol{J}_{ms}, &&\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_s,\\ &\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s, &&\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=\rho_{ms}.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.9}$$

式中$\boldsymbol{n}$为介质分界面的单位法线，方向由介质2指向介质1；$\rho_s,\rho_{ms},\boldsymbol{J}_s$和$\boldsymbol{J}_{ms}$分别表示电荷、磁荷、电流以及磁流的面密度。

4. 复数Poynting定理[3,4]

由复数形式的Maxwell方程式可以导出表示电磁场能量关系的复数Poynting定理。当讨论能量关系时(1.1.5)式中引入的虚构的磁型源应当去掉，Maxwell方程式的两个旋度方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}, \tag{1.1.10a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}. \tag{1.1.10b}$$

(1.1.10b)式取复共轭得

$$\nabla \times \boldsymbol{H}^* = -\mathrm{j}\omega\varepsilon^*\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{J}^*, \tag{1.1.11}$$

然后分别用$\boldsymbol{H}^*$和$\boldsymbol{E}$标乘(1.1.10a)和(1.1.11)式，所得的两式相减后为

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*) = \boldsymbol{H}^*\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}^*)$$
$$= -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon^*\boldsymbol{E}^* - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*.$$

上式在闭合面S包围的区域V上积分得

$$\frac{1}{2}\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{j}\frac{\omega}{2}\iiint_V(\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon^*\boldsymbol{E}^* - \boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H})\mathrm{d}V$$
$$-\frac{1}{2}\iiint_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*\mathrm{d}V$$

整理后就得到下列形式的复数Poynting 定理：

$$-\frac{1}{2}\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\mathrm{j}2\omega\iiint_V\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon^*\boldsymbol{E}^* - \boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H})\mathrm{d}V$$
$$+\frac{1}{2}\iiint_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*\mathrm{d}V. \tag{1.1.12}$$

对于各向同性介质，介质常数μ,ε一般为复数①，$\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$，$\mu=\mu'-\mathrm{j}\mu''$，在无外源的情况下由Ohm定律有$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，将这些关系代入(1.1.12)式，分离出它的实部和虚部后得

$$-\mathrm{Re}\oiint_S\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

---

① 见§2.1关于介质性质的讨论。