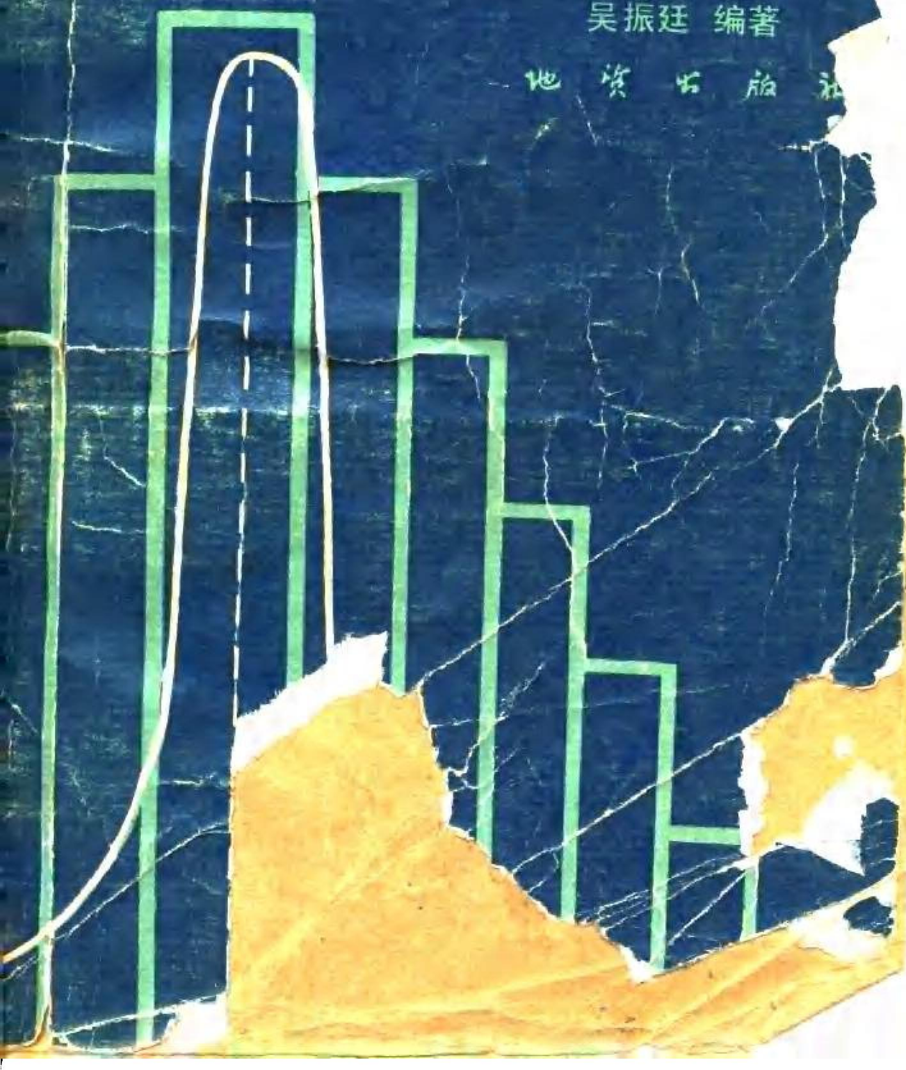
简明微积分研究

吴振廷 编著



地质出版社

简明微积分研究

吴振廷　编著

地质出版社

内容提要

本书研究了微积分基本理论、方法、计算与应用的内在联系、本质、特点、要点与某些规律性；研究了解题的思想方法、具体技巧与一题多解法；阐述了初学微积分者应注意的某些事项；并运用微积分知识，讨论了与中学数学教材有关、但在中学教材中又无法深入研究的一些专题。

本书可供中学数学教师、理工科大学生和正在学习微积分的读者参考；其中的基本内容也可以作为高中学生深入钻研的材料。

简明微积分研究

吴振廷 编著

*

地质矿产部书刊编辑室编辑

责任编辑：吴 关

地质出版社出版

（北京西四）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32 印张：14 字数：367,000

1984年1月北京第一版·1984年1月北京第一次印刷

印数：1-9,700 定价：1.75元

统一书号：7038·新113

前　言

本书是写给正在学习微积分的大专学生和初教微积分课的中学教师的参考用书。有些基本内容也可作为中学生深入钻研的题材。考虑到正在自学微积分读者的需要，也希望能够帮助他们掌握微积分这门学科的要领，并克服在自学过程中可能遇到的某些难点。

本书作为一本微积分的参考书，与一般的入门书或课本不同：对于在这类书籍中所讲的基本知识，诸如基本概念的系统阐述，基本定理、公式、法则的证明推导等等大都省略了；而在这类书籍中往往不讲或讲的不够的一些基本问题，诸如：关于微积分这门学科中基本概念的本质特点；理论证明、基本运算与典型应用的规律性；解题的思想方法、具体技巧；一题多解法以及初学者应该注意的一些问题等等，则是本书讨论与阐述的重点。这是我历年来讲授微积分学科中的有关概念、计算、某些理论证明与应用问题的经验教训，也是我向国内外先达们学习和从事教学研究的点滴所得的部分总结。

本书各章结构大体相同，每章第一部分简述有关概念、定理、公式、法则等。这部分的写作重点是对上述“基本事项”所作的“注释”。其内容是根据作者的体会与认识，研究有关基本概念或基本命题的来龙去脉、相互联系、异同比较，初学者应注意的问题或有关规律性的一些探讨等等。

每章第二部分讨论基本理论证明与计算法。主要是通过体系的安排、典型题目的解答、对问题的分析研究、注、小结、思考题、习题等形式，来阐述其中的基本思想、规律性以及具体的解题技巧。写这部分材料时的主要想法是：力求用较少的题目，概括与阐述较多的规律与技巧，并且重点着眼于比较基本的东西。

每章最后一部分讲有关基本应用．这是十分广泛与特别丰富的领域，限于本书的宗旨和篇幅，每章只能挑选几个较为典型、较为有代表性的题目来讨论．对于这些入选的题目，力求解释得更详细、深入或更实际一些．在这部分中我们还提出并解决了在中学数学教材中已经涉及到但未能深入讨论的一些问题．

对于本书的写作，人民教育出版社于琛副教授给予了热心帮助与指导；地质出版社有关领导与编辑同志给予了充分的合作；沈阳师范学院和数学系的领导和其他许多同志给了作者以支持与鼓励；沈阳师范学院金淑良同志参与了本书的写作工作，对此我表示衷心的感谢．

由于作者才疏学浅，书中必定会有肤浅、疏漏乃至错误的地方，诚恳希望同志们批评指教．

作者

1982年12月于沈阳

目　　录

第一章　极　限　方　法

在微积分学中，极限是最基本的概念，也是最基本的方法。这一章，将讨论极限概念，介绍极限基本理论，研究极限计算的基本规律，最后简略介绍极限方法的一些初步应用。

§1.1　基本事项及其注释

§§1.1-1　极限的定义

一　数列极限的定义

当不进行严格推理论证时，数列$\{a_n\}$以常数a为极限的意义，可以按下述两个等价的定义理解。

(一)描述性定义Ⅰ　称数列$\{a_n\}$当n趋向于无穷大时，以常数a为极限，是指：当n无限制增大时，a_n与a的距离$|a_n-a|$可以变得并保持任意地小。记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

(二)描述性定义Ⅱ　称数列$\{a_n\}$以常数a为极限，是指：当n无限制增大时，a_n向a无限制地接近。

当需要进行严格推理论证时，极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的意义，须以下述精确定义为依据：

(三)精确定义　称数列$\{a_n\}$当n趋向于无穷大时以常数a为极限，是指：对任意给定的正数ε，都存在一个序号N，使当$n>N$时，总有$|a_n-a|<\varepsilon$成立。

注　描述性定义Ⅰ、Ⅱ与精确定义指的是同一的东西，前者的缺点是使用了没有明确限定确切含义的语言，如“任意地小”、“无限制地接近”等；而后者则用有明确数学含义与关系的不等式来代替了。但前者的优点是直观性强，便于接受。

极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的几何意义　由极限的精确定义可见，对于

数 a 的任意一个 ε 一邻域❶ $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$（不论多末小），总有某个序号 N，使得数列 $\{a_n\}$ 在 a_N 之后的一切项 $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \cdots$ 全进入此邻域（如图1.1-1）。所述结果表明：在点 a 的任意小的邻域内聚集着数列 $\{a_n\}$ 的序号足够大的一切项。

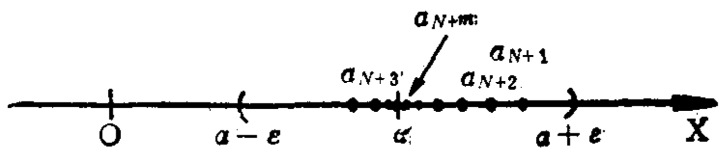


图 1.1-1

二　函数极限的定义（之一）

称当 x 趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，是指：若函数在 x_0 的某个邻域内有定义（x_0 除外），且对任意给定的正数 ε，都存在某个正数 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

与数列极限一样可以较粗糙地理解极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的含义：当 x 无限制地趋向于 x_0（但总不等于 x_0）时，相应的函数值 $f(x)$ 与常数 A 的距离 $|f(x)-A|$ 可以变得并保持任意地小；或当 x 无限制趋向于 x_0（但总不等于 x_0）时，相应的函数值 $f(x)$ 向常数 A 无限制地接近。

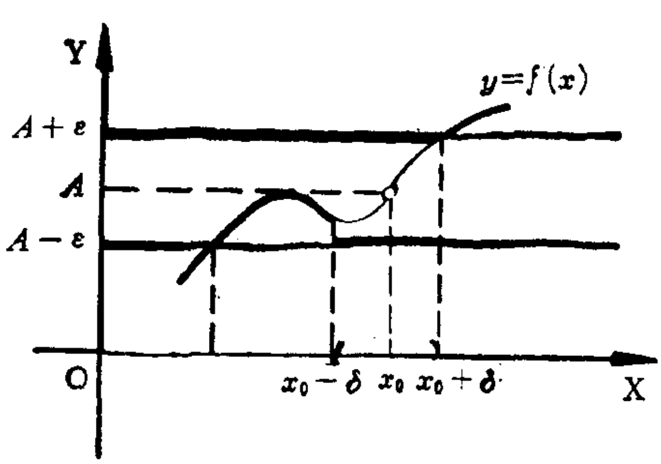


图 1.1-2

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的几何意义　对于 A 的任意一个 ε 一邻域 $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$，总有 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，使得对于 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 中的任何 $x\ (\neq x_0)$，相应的函数值 $f(x)$ 都落入 A 的 ε 一邻域内；从函数图象的角度看，对于由直线

❶以 a 为中心，以 ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$，称为数 a 的 ε 一邻域。

$y=A-\varepsilon, y=A+\varepsilon$ 围成的带形区域，总存在x_0的一个δ一邻域，使在这个邻域（x_0除外）内相应的函数图形，都位于这个带形区域内（图1.1-2）。

三　函数极限的定义（之二）

称函数$f(x)$当x趋向于x_0时，以常数A为右极限，是指：若函数$f(x)$在某个区间$(x_0, x_0+\eta)$($\eta>0$为某个定数)内有定义，且对任意给定的正数ε，总存在某个正数δ，使当$0<x-x_0<\delta$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立。记作$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$，或$f(x_0+0)=A$。其几何意义如图1.1-3。类似地，可定义左极限$f(x_0-0)$。

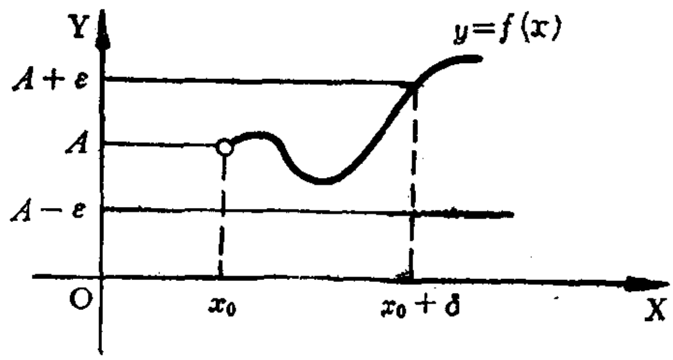


图 1.1-3

四　无穷大的定义

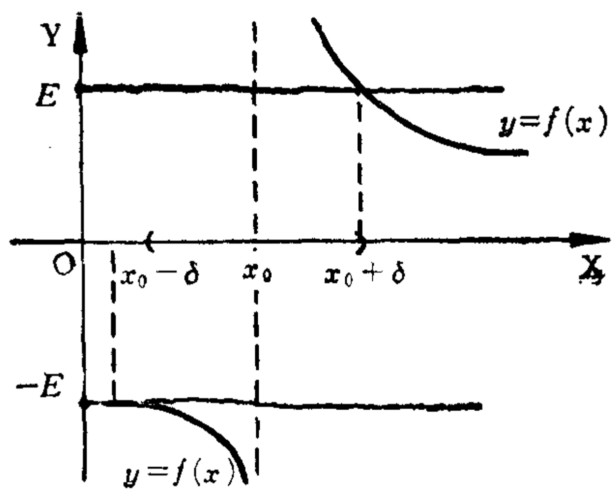


图 1.1-4

称当x趋向于x_0时，$f(x)$是无穷大量(简称 无穷大)是指：若$f(x)$在x_0的某个邻域内有定义（x_0除外)，且对任意给定的正数E，存在正数δ，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，总有$|f(x)|>E$,记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

还有许多其它类型的极限，将在以后陆续给出。

§§1.1-2　关于极限概念的一些注释

一　从瞬时速度看函数在一点的极限

下面，以自由落体的瞬时速度为例，指出函数在一点的极限的实际背景，并借以阐明某些和此类极限有关的问题。

我们知道，在离开地面不远的条件下，自由落体的运动规律，即下落的距离与时间的关系是

$$S=S(t)=\frac{gt^2}{2}$$

其中g表示重力加速度，视为常数．由实验观测得知，这是一个变速运动，物体在下落的过程中速度越来越大，因此物体在每一瞬间的速度都是不同的．现在我们来确定，物体在下落的过程中，当t取某一固定时刻t_0的那一瞬间，物体下落速度的确切数值．记落体在t_0瞬时的速度为$V(t_0)$，它是客观存在的，当然现在还是未知的．

考察t_0瞬时速度，不能只孤立地考察t_0那一瞬间，而必须联系到在时刻t_0前后物体的运动规律．为此，我们让时间t_0变到它附近的某个值t_1，求出在时间间隔t_1-t_0内物体下落的路程：

$$S(t_1)-S(t_0)$$

于是，比值

$$V_{t_0t_1}=\frac{S(t_1)-S(t_0)}{t_1-t_0}$$

表示落体在时间t_1-t_0内的平均速度．由于物体作匀速直线运动时，

$$速度=\frac{路程}{时间}$$

所以，它相当于在时间t_1-t_0内，把物体视作匀速运动时的速度，对取定的t_0，它是t_1的函数．由于物体在下落过程中，速度是逐渐变化的，在较短的一段时间里，速度只有很小的变化，所以可以把这个平均速度看成是在时刻t_0的瞬时速度的近似值

$$V_{t_0t_1}\approx V(t_0)$$

容易明白，当t_1越接近于t_0，这个平均速度$V_{t_0t_1}$越接近于在t_0时刻的瞬时速度$V(t_0)$，让t_1非常接近于t_0，则平均速度$V_{t_0t_1}$便非常接近于瞬时速度$V(t_0)$．但是，只要$t_1\neq t_0$，平均速度总不是瞬时速度．只有让t_1变到t_0，这时在一段时间内的平均速度

才应该变成在一个时刻的瞬时速度。但是，在数学上怎样实现这种转变呢？最自然地，当然是在平均速度函数$V_{t_0t_1}$中令$t_1=t_0$，在t_0点的函数值$V_{t_0t_0}$应该表示在t_0时刻的瞬时速度。但这时，我们有

$$V_{t_0t_0}=\frac{S(t_0)-S(t_0)}{t_0-t_0}=\frac{0}{0}$$

即函数$V_{t_0t_1}$在t_0点无意义，是个$\frac{0}{0}$，得不到具体的数值。由此可见，从取函数值的角度得不出应有的结果。这个困难，可以运用极限方法加以克服。其特点，不是简单地把瞬时速度$V(t_0)$看成是平均速度$V_{t_0t_1}$在t_0点的值（这是没有意义的），而是把瞬时速度$V(t_0)$看成是在t_1趋向t_0时，$V_{t_0t_1}$随之变化的结果，即：若t_1无限接近于t_0（但$t_1\neq t_0$）时，相应地，函数$V_{t_0t_1}$无限制接近于某个常数V，则这个V就当作t_0瞬间的速度，即在时刻t_0的瞬时速度$V(t_0)$。这个V就是函数$V_{t_0t_1}$在t_1趋向于t_0时的极限：

$$\lim_{t_1\to t_0}V_{t_0t_1}=V$$

这个瞬时速度的具体数值，在以后将是容易求出的。

二　函数在一点的两种值——极限值与函数值的区别与联系

在函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的精确定义中要求$0<|x-x_0|$，这意味着$x\neq x_0$，表明函数的极限值是在$x\neq x_0$的条件下求得的，它与函数在该点是否有值以及有什么样的值都毫无关系。人们在定义极限值时，之所以不考虑函数在x_0的值，是有实际背景的，这个我们在研究落体运动的瞬时速度时已经看到了。它在理论上也是有道理的，关于这一点，稍后将加以说明。

在这个同一定义中，我们还看到，这个极限值，却是由函数在x_0附近（左、右两侧）的函数值来决定的。因此函数在一点的极限，反映的是函数在该点附近的“局部”性质（不包括点x_0）。

综合上述两点，我们还可以得到一个在以后计算极限时需要用到的重要结论：若两个函数在x_0的某一个邻域内（不包括x_0）

的值都相等，那末它们在x_0点就有相同的极限（如果其中至少一个存在极限的话）。这个结论表明：求一个函数在某一点的极限时，可以考虑转换成求另一个函数在同一点的极限，充分条件是除这一点之外，在这点的某个邻域内两个函数的值是相同的。

由于函数在一点x_0的极限值，反映了函数在x_0附近函数值的变化趋势，因此函数极限在研究始终处于运动变化着的客观世界时，具有突出的重要性。

三　极限精确定义的两种等价形式

在函数与数列极限定义中的任意正数ε，可以改成小于任意定数$\varepsilon_0>0$的正数ε：$0<\varepsilon<\varepsilon_0$；或改成数列$\varepsilon_n\downarrow 0$❶，因此我们有如下与前述精确定义的等价形式：

（一）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow$ 设ε_0是任意取定的正数，对于满足$0<\varepsilon<\varepsilon_0$的任意正数$\varepsilon$，都存在正数$\delta$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$❷。

（二）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow$ 设$\varepsilon_n\downarrow 0$，对每个$\varepsilon_n$，都存在正数$\delta_n$，使当$0<|x-x_0|<\delta_n$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon_n$。

在这些定义中，主要的是用ε来描述$f(x)$与A的距离$|f(x)-A|$可以任意小，因此ε是必须任意小的，这是最本质的。但是在运用此定义进行论证的过程中，ε又必须是相对固定的，否则论证便无法进行，这也是需要注意的。

四　诸种极限之间的异同比较

为了加深对极限这一重要概念的理解，我们在这里对后面经常遇到的极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

---

❶ $\varepsilon_n\downarrow 0$，表示数列$\{\varepsilon_n\}$单调递减趋于零。

❷ 符号$\Rightarrow$表示“蕴涵”、“推得”等意，如$A\Rightarrow B$表示由A可以推得B；符号$\Leftrightarrow$表示“等价”、“充要条件”等意，如$A\Leftrightarrow B$，表示有A的充要条件是有B；

极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的前提：“$f(x)$在$x_0$的某个邻域内有定义。”在今后经常略去。

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

$$\left(\text{或} \begin{matrix} x\to x_0+0 \\ x\to x_0-0 \end{matrix}\right) \quad \left(\text{或} \begin{matrix} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{matrix}\right)$$

之间的异同作些比较。

这些极限都有两个相互联系的变化过程：一个是自变量的变化过程（简称自变过程），一个是相应地因变量的变化过程(简称因变过程)。

我们知道，数列 $\{a_n\}$ 可以看成是定义在自然数集上的函数 $f(n)=a_n(n=1, 2, 3, \cdots)$，数列极限的自变过程，是自变量$n$通过一切自然数"跳跃"（就实数而言)地趋向于 $+\infty$；一般的函数$f(x)$，它的定义域是某一个区间（有限或无穷)，函数极限的自变过程，有自变量x通过一切"中间"的实数值"连续"地趋向于有限值x_0或无穷大两类。当x趋向于有限值x_0时，又分x从x_0两侧趋于x_0（$x\to x_0$）与x从x_0一侧趋于x_0（$x\to x_0+0$与$x\to x_0-0$）两种，为了互相区别，前者称为双侧极限，后者称为单侧极限。当x趋向于无穷时，也相应有三种情况：x取正值无限制地增大（$x\to+\infty$），x取负值无限制地减小（$x\to-\infty$），x可正、可负，其绝对值无限制地增大（$x\to\infty$）。

由此可见，函数$f(n)$或$f(x)$的诸极限，彼此之间的主要差别就是自变量n或x的变化过程不同。具体说来，就是自变量的变化方式(连续变化或跳跃变化，单侧变化或双侧变化)、趋向的数值（有限值或无限增大）有所区别。此外，就其本质而言，它们有一个共同之点，这就是可以把所讨论的函数，看成是在一个给定过程中（这是依赖于自变量的某种变化过程的）运动变化着的量，考虑在这个变化过程中$f(n)$或$f(x)$与某个常数A的距离，是否可以变得并保持任意的小。

当变量为无穷大：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{或} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

$$(\text{或}\pm\infty) \qquad\qquad (\text{或}\pm\infty)$$

(或其它自变过程)