

数理化自学丛书

第二版

TV/1225/03

代 数

第四册

姚福丽编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

第二版

代 数

第 四 册

姚福丽 编

数理化自学丛书编委会审定

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10 字数 239,000

1966年6月第1版

1982年10月第2版 1982年10月第7次印刷

印数: 645,001—875,000

统一书号: 13119·959

定价: (科二) 0.70 元

内 容 提 要

本书是《数理化自学丛书》第二版中的“代数”第四册。在本丛书“代数”前三册的基础上，讲述初等代数的最后一部分内容。全书共分六章，即：排列和组合、二项式定理、概率初步、复数、方程论初步、行列式和线性方程组。书中对于每一章节的难点和重点，皆予强调；配有丰富的例题和习题，并附提示和答案，以助读者深入理解和加强练习。

本书可供青年工人、在职干部、知识青年自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

第二版出版说明

《数理化自学丛书》第二版是在第一版的基础上编写而成的。考虑到我社已出版大学数、理、化自学丛书，中学数学中的微积分内容没有另编分册，第二版仍包括《代数》四册、《平面几何》两册、《平面三角》、《立体几何》、《平面解析几何》、《物理》四册和《化学》四册，共十七册。

由黄丹麓、杨荣祥、余元希、杨逢挺、桂君协等同志主编的第一版，自1963年陆续出版后，受到广大读者的欢迎。特别是1977年重排、重印以来，受到社会各方面极为广泛的关注，在广大读者中有了相当的影响。许多在职职工、农村青年和在校学生，自学了这套书以后，数理化知识水平有了一定的提高。

第二版由杨荣祥、余元希、束世杰、季文德等同志主编，数理化自学丛书编委会审定。它保留了第一版在编写上“详尽在先、概括在后、通俗到底”和“便于自学、无师自通”的特色，仍是一套与现行中学课本并行的自学读物。第二版仍从读者的实际情况出发，按传统的教学体系编写。但这次参照新的试行教学大纲的要求，与第一版相比，数学各分册的编写内容作了适当的增删和调整，基础知识和运算技能的训练有了进一步加强；物理各分册在内容的取舍、习题的更新、插图的选配、实验的描述等方面均有较大的改进；化学各分册还增加了反映现代科学技术水平的基础理论知识，在理论和实践相结合的原则下，内容和体系均有新的特色。此外，各册的例题和习题选配得力求恰当、合理，知识

论述力求通俗、严密;并按章增加了测验题。在各册编者的话中,还有供读者自学时参考的指导性意见。

自学要有成就,必须刻苦勤奋、踏实认真、持之以恒、知难而进。刻苦自学、学有成就者不乏其人,愿广大读者努力学好。

《数理化自学丛书》出版以来,全国各地的读者给以热情的鼓励和有力的支持,特在此表示衷心感谢。

上海科学技术出版社

编 者 的 话

本书是《数理化自学丛书》第二版代数部分的最后一册。为了适应读者自学以及今后学习高等数学的需要，第二版在原有的基础上又作了慎重的修订。与第一版相比，主要有以下一些变动：

1. 充实了内容。原书第一章§1·11仅简单地介绍了概率的概念，这次修订已把它独立成为一章，比较系统地介绍了概率的初步知识。在方程论初步这一章中补充了部分分式和对称多项式方面的知识。在行列式和线性方程组一章中，引进了 n 阶行列式、 n 元线性方程组以及矩阵等内容。至于原书第二章数学归纳法，则已提前安排至代数第三册中去了，本书不再重复。

2. 调整了习题。根据读者的建议，对本书各章各节所附的习题，都作了一定的充实和调整，并在每一章之后及全书最后增加了测验题。书中的复习题分成A、B两组，B组的习题要求较高，以适应不同水平读者的需要。

学习本书，只需具有相当于本《丛书》代数前三册，以及平面几何、平面三角的知识。编者相信，具有这样水平的读者，只要仔细阅读书中所述的内容，注意独立思考，认真解答书中的习题，力求彻底理解，并持之以恒，就能学好这些知识，提高分析问题和解决问题的能力。书中部分打*号的内容，初学者倘若感到有困难，不妨暂时把它略去；书中所附习题，读者也可以根据具体情况，选做或全做。

本书第一版是由余元希同志根据林树德同志的初稿重

行编写的,第二版由姚福丽编写,并经余元希、赵宪初两同志审稿。由于编者水平有限,缺点和错误在所难免,希望读者批评指正。

姚福丽

1980年10月于上海教育学院

《数理化自学丛书》(第二版)编辑委员会

(以姓氏笔划为序)

主编:

数学 杨荣祥 余元希

物理 束世杰

化学 季文德

委员:

杨荣祥(上海师范学院)

束世杰(上海师范学院)

吴孟明(上海市七一中学)

余元希(华东师范大学)

汪思谦(上海教育学院)

张国模(上海教育学院)

张冠涛(上海市育才中学)

季文德(上海市教育局)

赵宪初(上海市南洋模范中学)

桂君协(上海师范学院)

凌康源(上海教育学院)

目 录

第二版出版说明	i
编者的话	iii
1. 排列和组合	1
§ 1.1 排列	1
§ 1.2 乘法原则	4
§ 1.3 相异元素不许重复的排列	7
§ 1.4 全排列	10
§ 1.5 加法原则	11
§ 1.6 相异元素可以重复的排列	17
§ 1.7 组合	20
§ 1.8 组合数公式	22
§ 1.9 组合数的两个性质	28
§ 1.10 排列、组合综合应用题	32
本章提要	35
复习题一 A	36
复习题一 B	37
第一章测验题	38
2. 二项式定理	40
§ 2.1 杨辉三角形	40
§ 2.2 二项式定理	43
§ 2.3 二项展开式的通项公式	50
§ 2.4 二项展开式中系数间的关系	54
§ 2.5 二项展开式里各项系数的和	58
§ 2.6 二项式定理在近似计算中的应用	60

本章提要	63
复习题二 A	64
复习题二 B	65
第二章测验题	66
3. 概率初步	68
§ 3.1 随机事件	68
§ 3.2 事件之间的关系	71
§ 3.3 频率和概率	79
§ 3.4 古典概型	82
§ 3.5 概率的加法公式	88
§ 3.6 概率的乘法公式	91
*§ 3.7 贝努利概型	99
本章提要	101
复习题三 A	102
复习题三 B	104
第三章测验题	106
4. 复数	107
§ 4.1 数的概念的扩展	107
§ 4.2 复数的概念	108
§ 4.3 复数与平面内的点、向量之间的对应	114
§ 4.4 复数的四则运算	121
§ 4.5 复数的三角形式	128
§ 4.6 复数的开方	141
§ 4.7 复数的指数形式	148
*§ 4.8 数域	150
本章提要	152
复习题四 A	155
复习题四 B	157
第四章测验题	159

5. 方程论初步	161
§ 5.1 多项式的一些重要性质	161
§ 5.2 综合除法	175
§ 5.3 一元 n 次方程	180
§ 5.4 实系数一元 n 次方程	188
§ 5.5 有理系数一元 n 次方程	192
§ 5.6 几种特殊类型的高次方程的解法	202
*§ 5.7 部分分式	213
§ 5.8 对称多项式	221
本章提要	230
复习题五 A	234
复习题五 B	236
第五章测验题	238
6. 行列式和线性方程组	240
§ 6.1 三阶行列式	240
§ 6.2 子行列式和代数余子式	245
§ 6.3 三元线性方程组	250
§ 6.4 n 阶行列式和 n 元线性方程组	257
§ 6.5 消元法与矩阵的行的初等变换	263
本章提要	273
复习题六 A	276
复习题六 B	279
第六章测验题	281
总复习题 A	283
总复习题 B	286
总测验题	290
习题答案	291

排 列 和 组 合

排列和组合是数学的重要基础知识之一。它对我们分析和解决实际问题,进一步学习某些数学知识(如二项式定理、概率、对称多项式等等)都有着重要的作用。

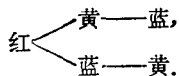
本章将在阐明排列和组合意义的基础上,着重学习几种基本的、常用的排列和组合问题的解法。

§1.1 排 列

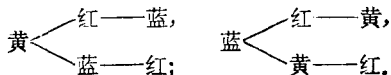
让我们来看下面这几个问题。

问题 1 用红、黄、蓝三种颜色的小旗,按不同的顺序升上旗竿,用以作出信号。在每个信号里,如果要求这三面小旗都要用到,那末单凭这三面小旗可以作出哪几种不同的信号?

[解] 在这三面小旗中,先取定一面(例如红旗)升上旗竿,这时,第二面旗子就只能在余下的两面中任取一面(要末是黄旗,要末是蓝旗),第三面旗子就只能用剩下的最后一面旗了。这样就可以作出 2 种不同的信号:



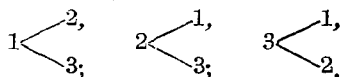
如果第一面旗是取定黄旗或者蓝旗,和上面的讨论一样,可以分别作出 2 种不同的信号:



很明显，上面作出的这6种信号是各不相同的，并且，除这6种信号外，不可能再作出其他不同的信号了。由此，我们就找到了这个问题的答案：可以作出上面列举的这6种不同信号。

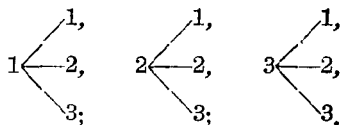
问题 2 由数字 1, 2, 3, 可以组成：(1) 多少个没有重复数字的二位数？(2) 多少个二位数？

[解] (1) 我们可以按照先选十位上数字再选个位上数字的顺序，把各个不同的二位数一起列举出来：



由此可知，总共可组成 6 个不同的二位数。

(2) 对于一般的二位数，两个数位上的数字可以相同，因此，当我们选定了一个数字做十位上的数字以后，个位上的数字仍旧可以在这三个数字中任选，所以把这三个数字所组成的二位数一起列举出来便是：



由此可知，总共可组成 9 个不同的二位数。

上面所提出的这两个问题，有着一个共同的特点，它们都可以看成是：从一些元素（旗子、数字）中，每次取出几个元素，按照一定的顺序摆成一排的问题。

从 m 个元素中，每次取出 n 个元素，按照一定的顺序摆成一排，称为从 m 个元素里每次取出 n 个元素的排列。

[注意] 根据上面这个排列的定义，所给的这 m 个元素和取出的 n 个元素，都不要求各不相同。本书只讨论下面这两种排列：

(1) 从 m 个各不相同的元素里，每次取出 n 个各不相

同的元素的排列(如上面的问题 1 和问题 2 中的(1)都属于这一类型),以后把这类排列简称为相异元素不许重复的排列.

(2) 从 m 个各不相同的元素里,每次取出 n 个元素(可以重复)的排列[如问题 2 中的(2)就属于这一类型],以后把这类排列简称为相异元素可重复的排列.

在考虑排列问题时,常常把所给的元素顺次编上号码,用符号 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 来代表. 当元素不多时,还可以简单地用字母 $a, b, c, d, \dots$; 或者用数字 $0, 1, 2, \dots, 9$ 来表示. 熟练地解这类符号、字母或者数字的排列问题,可以帮助我们掌握解排列问题的基本方法,提高解题能力. 在下面的例题和习题里,列入这类问题的目的就在于此.

例 写出从四个字母 a, b, c, d 中每次取出 2 个字母的所有不同排列,并要求: (1) 不许重复; (2) 可以重复. 这种排列各有几个?

[解] (1) $ab, ba, ca, da,$
 $ac, bc, cb, db,$
 $ad, bd, cd, dc.$

这样的排列有 12 种.

(2) $aa, ba, ca, da,$
 $ab, bb, cb, db,$
 $ac, bc, cc, dc,$
 $ad, bd, cd, dd.$

这样的排列共有 16 种.

从上面的例子中可以看到,如果两个排列里所含的元素不完全一样,例如 ab 和 ac , 就是不同的排列; 如果所含的元素完全一样,而排列的顺序不同,例如 ab 和 ba , 那末也是不同的排列.

[注意] 上面例题中,这种写出排列的方法,叫做列举法. 用列

习 题

1.1

举法把具体的排列写出, 在今后解题时, 考虑解题途径, 或者进行检验, 都很有用. 读者可以自己思考一下, 怎样进行列举, 才能使写出的排列做到既不遗漏又不重复.

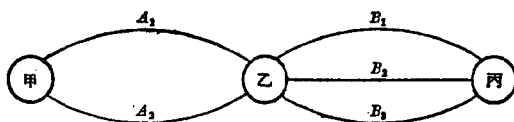
1. 用 1, 2, 3, 4 这四个数字所组成的不含重复数字的三位数有几个? 把它列举出来.
2. 由 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字所组成的二位数一共有几个? 其中不含重复数字的有几个?
3. 用红色的、黄色的、蓝色的小旗各一面升上旗竿, 以作出信号. 总共可作出多少种不同的信号?

[提示: 作信号时, 可以只用一面小旗升上旗竿, 也可以用二面或者三面小旗按不同顺序升上旗竿.]

§1.2 乘法原则

对排列问题的研究, 主要是求出根据已知条件所作出的不同排列的种数. 对于一些简单的问题, 可以采用上节例题中的方法, 把所有不同的排列列举出来, 数出种数找到答案. 显然, 这种方法是很烦的. 为了能找寻出一个简单的、直接的求排列种数的方法, 下面先来考察一个具体问题.

问 题 如果从甲地到乙地有 2 条路可走, 乙地到丙地又有 3 条路可走, 试问: 从甲地经乙地而到丙地, 可以有几种不同的走法?



[解] 如果用 A_1, A_2 表示从甲地到乙地的两条路, 用 B_1, B_2, B_3 表示从乙地到丙地的这三条路(上图), 从图中可以看出, 从甲地经乙地到丙地, 有并且只有下面这 6 种走法:

$$A_1 \text{——} B_1, A_1 \text{——} B_2, A_1 \text{——} B_3,$$

$$A_2 \text{——} B_1, A_2 \text{——} B_2, A_2 \text{——} B_3.$$

可以看出,解这个问题需要考虑两个步骤:第一步,先从由甲地到乙地的这两条路中任意选择一条(有2种选法);第二步,再从乙地到丙地这三条路中任意选择一条(有3种选法);而最后计算出来的不同走法的种数6,正就是这两个步骤中每一步骤的选法种数(2与3)的乘积.

对这个具体问题的解,给了我们一个重要的启示:倘使撇开了这里所说的“从甲地到乙地”、“从乙地到丙地”这些具体内容,而把它们一般地看成是要完成一件事的两个步骤,并且把这里所说的“2条路”、“3条路”一般地叙述成“有 m_1 个方法”、“有 m_2 个方法”,这样,就可以作出如下的结论:

设完成一件事要分两个步骤,完成第一步有 m_1 种方法,完成第二步有 m_2 种方法;那末完成这件事,就有

$$N = m_1 \cdot m_2$$

种方法.

更一般地,我们还可以作出这样的结论:

设完成一件事要分 n 个步骤,完成第一步有 m_1 种方法,完成第二步有 m_2 种方法,……,完成第 n 步有 m_n 种方法;那末完成这件事,就有

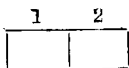
$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

种方法.

在上面这个式子里,等号右边是乘积的形式,为了突出这一点,我们把上面这个结论称为乘法原则.

应用这个原则,就可以不通过具体作出排列,而求出符合题设条件的所有的不同排列的种数.

例如,对§1.1例题中的(1)所作的排列,可以看成是在排好顺序的两个位置



上,从 a, b, c, d 这四个字母里,选取字母去分别占据,因此可以认为这是要依次完成下面两件事:

(1) 先在 a, b, c, d 这四个字母中选取 1 个,去占据第 1 号位置;

(2) 再在余下的 3 个字母(因为排列里不许有重复字母,所以已经占有第 1 号位置的那个字母不能再选)中选取 1 个去占据第 2 号位置.

因为,完成第一件事有 4 个方法,完成第二件事有 3 个方法,所以完成这两件事共有

$$N = 4 \cdot 3 = 12$$

个方法.

类似地,读者可以自己来说明上节例题里(2)所求的排列种数是

$$N = 4 \cdot 4 = 16.$$

习 题 1.2

应用乘法原则解下列各题:

1. 从 a, b, c, d, e 这 5 个字母里,每次取出:

(1) 2 个; (2) 3 个; (3) 4 个; (4) 5 个

不同字母,求所组成的各种不同排列的种数.

[解法举例: (1) $N_2 = 5 \cdot 4 = 20$.]

[注意] 本题的四个小题目都是要求排列的种数 N , 为便于区别,我们用 N_2 表示选取 2 个字母的排列种数, N_3, N_4, N_5 便分别表示选取 3, 4, 5 个字母的排列种数.

2. 用数字 1, 2, 3, 4 可以组成多少个:

(1) 二位数? (2) 三位数? (3) 四位数?

其中不含有重复数字的各有几个?

3. (1) 从 9 块不同颜色的积木里,取出三块排成一横排,共有多少种不同排法?

(2) 在所有的三位数里,共有几个不含有数字 0 的?

比较一下,(1)和(2)有什么区别.