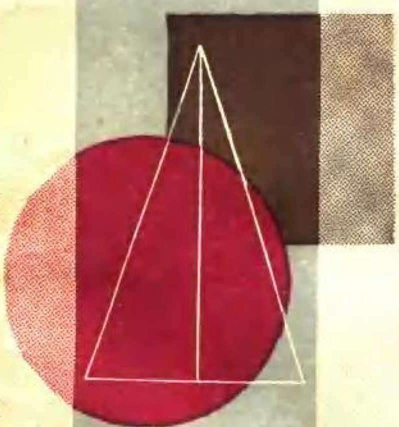
数理化竞赛丛书

北京市中学数学竞赛题解

1956—1979

北京市数学会 编



BEIJINGSHIZHONG Shuxuejingsai

科学普及

数理化竞赛丛书

北京市中学数学竞赛题解

(1956—1979)

北京市数学会编

科学普及出版社

内 容 提 要

自 1956 年以来，北京市曾多次举办数学竞赛。本书是1979年以前的各届数学竞赛的试题及解答的汇集，可供中学师生、一般知识青年及其他数学爱好者参考。

封面设计：窦 桂 芳

数 理 化 竞 赛 丛 书

北京市中学数学竞赛题解

(1956—1979)

北 京 市 数 学 会 编

*

科学普及出版社出版　（北京白石桥紫竹院公园内）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

八九九二〇部队印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/32　印张：4 1/8　字数：86 千字

1980年 8 月第 1 版　1980年 8 月第 1 次印刷

印数：1—285,000册　　定价：0.37元

统一书号：13051.1120　本社书号：0137

前　言

1956年，敬爱的周恩来同志代表党中央发出了向现代科学大进军的号召。这一年，北京市举行了第一次中学数学竞赛。接着，又在1957、1962、1963、1964年各举行了一次。后来，由于林彪和“四人帮”的干扰破坏，这项活动从1965年起，停顿了十三年。

党中央一举粉碎了“四人帮”，为科学技术的大发展开辟了广阔的道路。十一大、五届人大和全国科学大会向全国发出庄严号召，要在本世纪内实现四个现代化，极大地提高整个中华民族的科学文化水平，赢得了全国人民的热烈响应。在这样的大好形势下，1978年举行了全国和八省市中学数学竞赛，1979年又举行了全国和各省、市、自治区中学数学竞赛。这两次竞赛在动员青少年为革命勤奋学习和选拔优秀人才方面起了积极作用。

本社曾在1979年将1965年以前北京市举办的五次数学竞赛试题和题解汇集再版，受到广大读者的欢迎。现应各方面的要求，将1978、1979两年的竞赛试题和题解补充进去，增订出版。

本书内容如有错误或不妥之处，请批评指正。

科学普及出版社编辑部

1980年3月

目　　次

一、1979 年 数 学 竞 赛

第 一 试

1． 求函数$y=\lg(\sqrt{x^2-3x-10}-x-3)$的定义域．

【解】 先解不等式

$$x^2-3x-10\geqslant 0 \qquad (1)$$

得

$$x\leqslant -2 \quad 或 \quad x\geqslant 5 . \qquad (2)$$

再在条件（2）之下解不等式

$$\sqrt{x^2-3x-10}-x-3>0 \qquad (3)$$

即

$$\sqrt{x^2-3x-10}>x+3 . \qquad (4)$$

当$x+3<0$（即$x<-3$）时，不等式显然不成立．当$x+3\geqslant 0$（即$x\geqslant -3$）时，将（4）的两边平方得

$$x^2-3x-10>x^2+6x+9,$$

解得

$$x<-\frac{19}{9}, \qquad (5)$$

（2）与（5）联立得函数的定义域是$x<-\dfrac{19}{9}$．

2． 已知：x、y、z均为锐角，且满足等式

$$\cos x+\cos y+\cos z=1+4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2},$$

试证　$x+y+z=\pi$.

【证】　已给等式可变为

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$=(1-\cos z)+2\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)\sin\frac{z}{2}$$

$$=2\sin^2\frac{z}{2}+2\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)\sin\frac{z}{2},$$

$$\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{y}{2}$$

$$=\sin^2\frac{z}{2}+\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{z}{2},$$

$$\cos\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{z}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{z}{2}\right), \qquad (1)$$

因为 x、y、z 均为锐角，所以 $\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{z}{2}\neq 0$　所以

(1) 可化简为

$$\cos\frac{x+y}{2}=\sin\frac{z}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right),$$

所以

$$\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2},\quad x+y+z=\pi.$$

3. 在图1中，圆的三条弦 PP_1，QQ_1，RR_1 两两相交，交点分别为 A、B、C，已知

$$AP=BQ=CR,$$
$$AR_1=BP_1=CQ_1,$$

求证：$\triangle ABC$ 是正三角形.

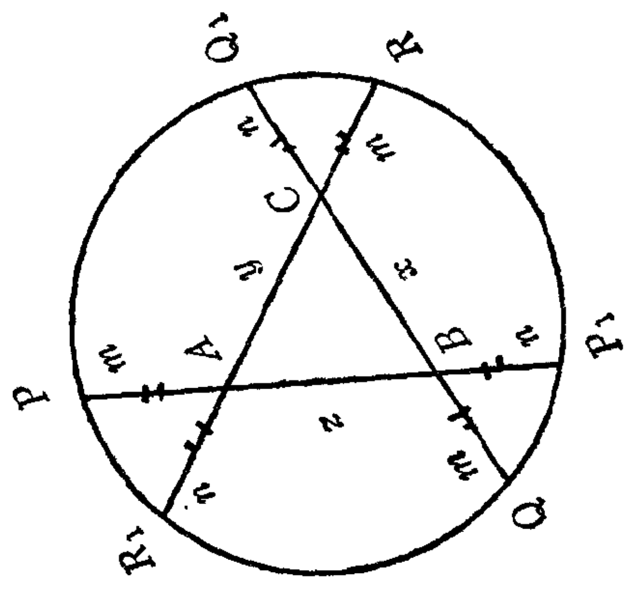


图1

【证】 设

$AP=BQ=CR=m$，

$AR_1=BP_1=CQ_1=n$，

$BC=x$，$CA=y$，

$AB=z$.

根据圆内相交弦定理有

$$\begin{cases} n(m+x)=m(n+y) \\ n(m+y)=m(n+z) \\ n(m+z)=m(n+x) \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} nx=my, \\ ny=mz, \\ nz=mx. \end{cases}$$

三式相加得

$$n(x+y+z)=m(x+y+z),$$

所以

$$m=n,\qquad x=y=z.$$

可见 $\triangle ABC$ 为正三角形.

4. 在平面 α 内有正三角形 $A'BC$，直线 $DE \parallel BC$ 且分别交 $A'B$、$A'C$ 于 D、E. 沿 DE 将 $\triangle A'DE$ 折起使与平面 α

垂直至$\triangle ADE$位置．问与BC平行的直线DE取在何处AB最短？

【解】 在$\triangle A'BC$中作BC边上的高线$A'M$与DE交于N（图2），连BN，当$\triangle A'BC$折起与平面α垂直时有

$$AN\perp\text{平面}\alpha,\ AN\perp BN.$$

设正三角形$A'BC$的边长为a，$A'N=x$，则在直角$\triangle NMB$中有

$$BN^2=NM^2+BM^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

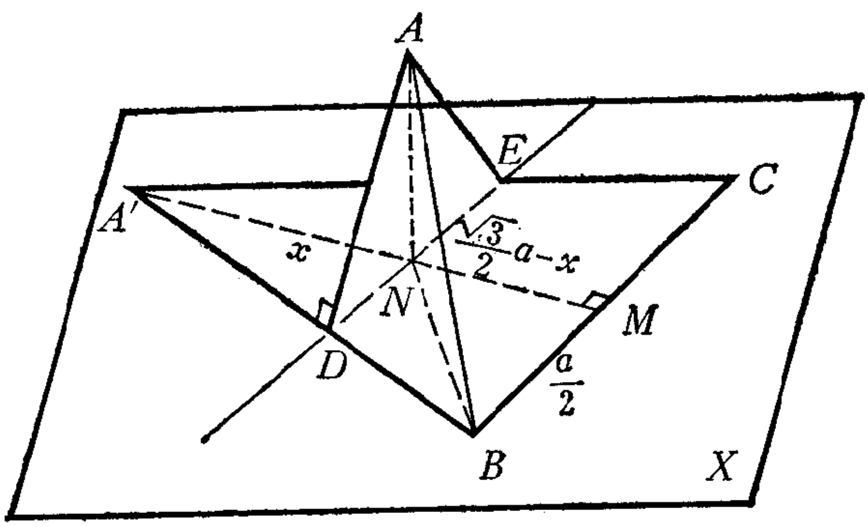


图 2

在直角$\triangle ANB$中有

$$\begin{aligned}AB^2&=AN^2+BN^2\\&=x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$=2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\frac{5}{8}a^2,$$

可见，当 $x=\frac{\sqrt{3}}{4}a$ 时 AB 最短，即 DE 是 $A'B$, $A'C$ 的中点连线时，AB 最短.

5 已知 $x^2+y^2\leqslant 1$，求证

$$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}.$$

【解】 设 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，这里 $0\leqslant a\leqslant 1$，于是

$$\begin{aligned}
&|x^2+2xy-y^2|\\
&=|a^2\cos^2\theta+2a^2\cos\theta\sin\theta-a^2\sin^2\theta|\\
&=a^2|\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta|\\
&=a^2|\cos 2\theta+\sin 2\theta|\\
&=\sqrt{2}a^2\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta\right|\\
&=\sqrt{2}a^2\left|\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\\
&\leqslant\sqrt{2}a^2\leqslant\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

第 二 试

1. 在直角坐标平面的第一象限中，把坐标都是整数的点按以下方法编号（图 3）：

(0,0) 点第 1 号，

(1,0) 点第 2 号，

(1,1) 点第 3 号，

(0,1) 点第 4 号,

(0,2) 点第 5 号,

(1,2) 点第 6 号,

(2,2) 点第 7 号,

(2,1) 点第 8 号,

(2,0) 点第 9 号,

……………………

按图 3 中箭头的顺序,问第 2000 号的点的坐标是什么?

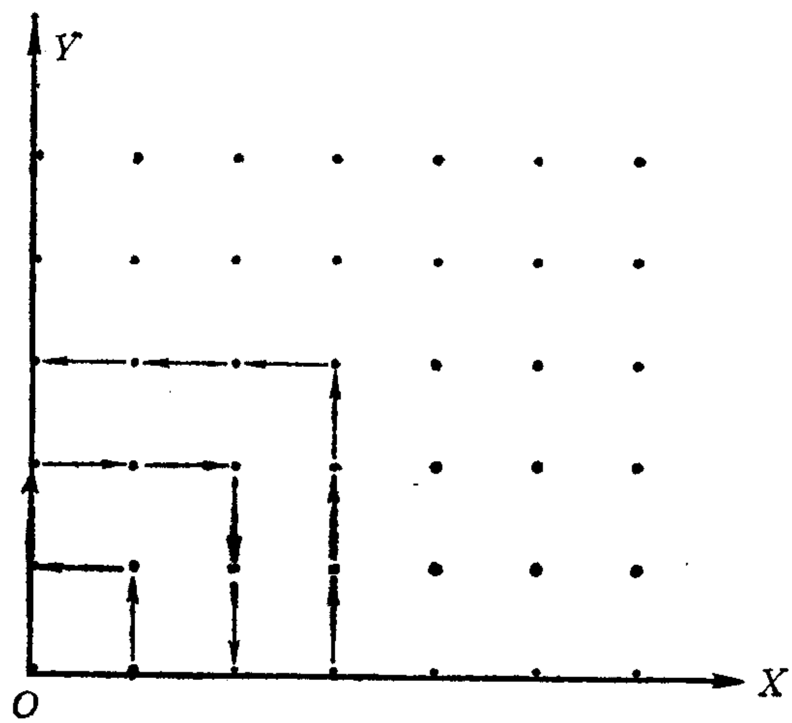


图 3

【解】 注意,满足条件

$$0\leqslant x\leqslant k,\quad 0\leqslant y\leqslant k$$

的坐标为整数的点(x,y)一共有$(k+1)^2$个.

考虑满足不等式

$$(k+1)^2<2000$$

的最大整数 k，得 $k=43$．所以编号为 2000 的点的纵坐标为 44，或横坐标为44．

因为44是偶数，所以应该从（0,44）往右数，因为

$$2000-44^2=64>44,$$

所以第 2000 号点的横坐标是 44，并且它的纵坐标是

$$44-(64-45)=25.$$

因此编号为 2000 的点的坐标是（44,25）．

2． 设$a_1\,a_2\,a_3\cdots a_{1979}$是 1, 2,…，1979 这些自然数的任一个排列．为了配对，令 $a_{1980}=0$．从计算

$$b_i=|a_{2i-1}-a_{2i}|$$

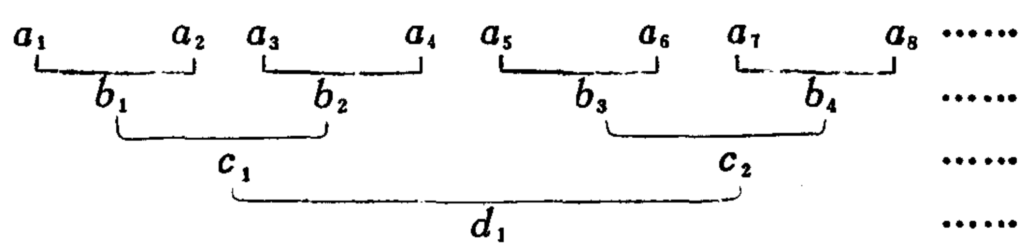
得到数列 $b_1,b_2,\cdots,b_{990}$；再从计算

$$c_i=|b_{2i-1}-b_{2i}|$$

得到数列 $c_1,c_2,\cdots,c_{495}$；为了配对，令 $c_{495}=0$．从计算

$$d_i=|c_{2i-1}-c_{2i}|$$

得到数列 $d_1,d_2,\cdots,d_{298}$；如此一直算下去（如下表所示），最后得到一个数 x，求证：x 是偶数．



【解】 用反证法．假设最后一个数 x 是奇数．因为每个奇数是由一个奇数和一个偶数相减得出来的，每个偶数是由两个奇数或者两个偶数相减得出来的，如下表

$$\underbrace{\text{奇数}\qquad\text{偶数}}_{\text{奇数}}\qquad\underbrace{\text{奇数}\qquad\text{奇数}}_{\text{偶数}}\qquad\underbrace{\text{偶数}\qquad\text{偶数}}_{\text{偶数}}$$

这样，倒数第三行的四个数将有奇数个奇数．

同理，倒数第四行也有奇数个奇数，……，最后，第一行也是奇数个奇数．但是奇数共有 990 个，是偶数个，得出矛盾．所以 x 是偶数．

3． 已知椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$$

及直线

$$x=-\frac{a^2}{c}.$$

其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$．在椭圆上放置 n 个点（$n>1$）使相邻两点与左焦点连线所成的夹角均相等（如图 4 所示，$\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\cdots=\angle P_nFP_1=\frac{2\pi}{n}$），试证：这几个点各到直

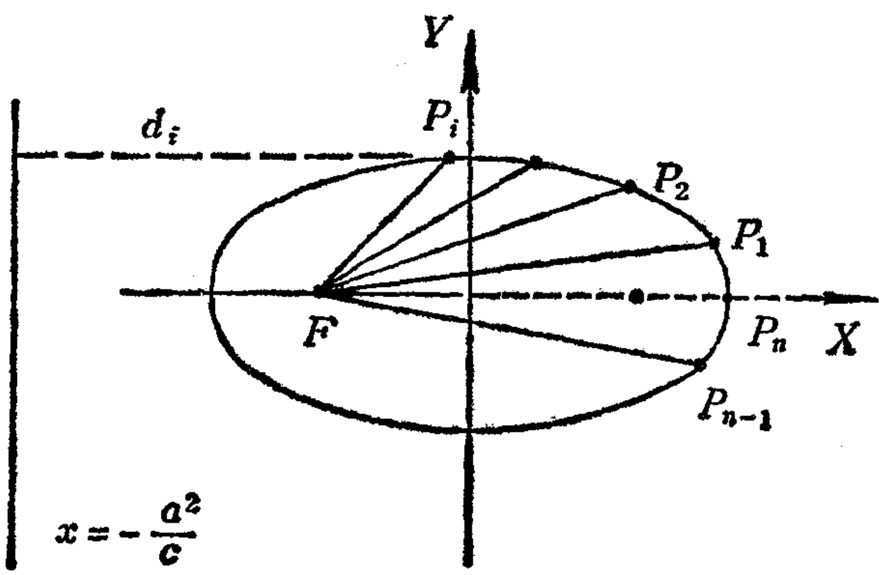


图 4

线 $x=-\dfrac{a^2}{c}$ 的距离的倒数之和为一个与 n 有关的常数.

【证】 设在椭圆上的 n 个点是 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，它们到 $x=-\dfrac{a^2}{c}$ 的距离各记为 $d_1, d_2\cdots, d_n$，$\alpha=\dfrac{2\pi}{n}$，$\angle P_1FO=\beta$.

因 $x=-\dfrac{a^2}{c}$ 是准线，故

$$\frac{P_iF}{d_i}=\frac{c}{a}\ (\text{离心率}),\ (i=1,2,\cdots,n),$$

由此可得

$$P_iF=\frac{c}{a}d_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

由图可以看出：

$$d_i-P_iF\cos[(i-1)\alpha+\beta]=\frac{a^2}{c}-c,$$

$$d_i-\frac{c}{a}d_i\cos[(i-1)\alpha+\beta]=\frac{a^2-c^2}{c},$$

$$d_i=\frac{\dfrac{b^2}{c}}{1-\dfrac{c}{a}\cos[(i-1)\alpha+\beta]},\ (i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}=\frac{c}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{c}{a}\cos[(i-1)\alpha+\beta]\right\}$$

$$=\frac{nc}{b^2}-\frac{c^2}{ab^2}\sum_{i=1}^{n}\cos[(i-1)\alpha+\beta],$$

因为 $n>1,\sin\frac{\alpha}{2}\neq0$,所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\cos[(i-1)\alpha+\beta]\\
&=\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)+\cdots+\cos[(n-1)\alpha+\beta]\\
&=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}+\cos(\alpha+\beta)\sin\frac{\alpha}{2}+\cdots\right.\\
&\quad\left.+\cos[(n-1)\alpha+\beta]\sin\frac{\alpha}{2}\right\}=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right.\right.\\
&\quad\left.-\sin\left(-\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right]+\left[\sin\left(\frac{3}{2}\alpha+\beta\right)-\sin\left(\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\right]\\
&\quad\left.+\cdots+\left[\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right]-\sin\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\alpha+\beta\right]\right\}\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right]-\sin\left(-\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right\}\\
&=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\frac{(n-1)\alpha}{2}+\beta\right]\sin\frac{n\alpha}{2}\\
&=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left[\frac{(n-1)\alpha}{2}+\beta\right]\sin\pi=0,
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}=\frac{nc}{b^2}.$$

4. 已知方程组

$$\begin{cases} x+y+z=2 & (1) \\ xy+yz+zx=1-b & (2) \\ xy=(k-1)z+(1-b) & (3) \end{cases}$$

的所有各组解(x,y,z)都是由非负实数组成的，其中b、k是参数．试求：

(i) k的取值范围，

(ii) b的取值范围（用k表示）.

【解】 把（3）代入（2）得

$$(k-1)z+(1-b)+z(x+y)=1-b,$$

从（1）式得

$$x+y=2-z,$$

代入上式得

$$z(k+1-z)=0.$$

此方程的两个根为

$$z=0 \quad 和 \quad z=k+1,$$

$z=0$时（1）、（2）化为

$$x+y=2,$$
$$xy=1-b.$$

x,y是下面辅助方程

$$m^2-2m+(1-b)=0$$

的两个根因为它们是实根，所以

$$\Delta=2^2-4(1-b)=4b\geqslant0,$$

即

$$b\geqslant0. \qquad (4)$$

又因为x、y都是非负的，所以

$$(1-b)=xy\geqslant0,$$

$$b \leqslant 1. \qquad (5)$$

$z=k+1$时，因为 z 是非负的，所以

$$k+1=z \geqslant 0,$$

$$-1 \leqslant k, \qquad (6)$$

这时（1）、（3）化为

$$\begin{cases} x+y=1-k, \\ xy=k^2-b, \end{cases}$$

x、y 是下面辅助方程

$$n^2-(1-k)n+(k^2-b)=0$$

的两个根．因为 x、y 是实数，所以

$$\Delta=(1-k)^2-4(k^2-b) \geqslant 0,$$

$$b \geqslant \frac{(3k-1)(k+1)}{4}, \qquad (7)$$

因为 x、y 都是非负的，所以

$$1-k=x+y \geqslant 0,$$

$$k \leqslant 1. \qquad (8)$$

又因 x、y 都是非负的，所以

$$k^2-b=xy \geqslant 0,$$

$$b \leqslant k^2. \qquad (9)$$

从（6）、（8）得出 k 的范围是

$$-1 \leqslant k \leqslant 1,$$

所以 $k^2 \leqslant 1$，故不等式（5）可以不考虑．

从（7）、（9）得出（用 k 表示的）b 的范围是

$$\frac{(3k-1)(k+1)}{4} \leqslant b \leqslant k^2.$$

但要注意：不等式（4）与不等式（7）却不互相包含．因