

丁善瑞 编著

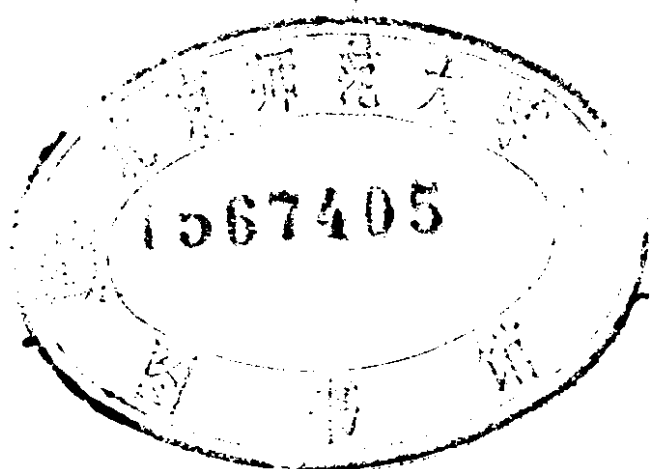
实分析基础

浙江大学出版社

实分析基础

丁善瑞 编著

TJ11/229/04



浙江大学出版社

内 容 简 介

本书是为工科院校学生学习高等数学以后，希望学习现代数学的读者提供必要的分析基础而编写的。全书共六章一个附录：包括集合与映射，实数的构造以及有关实数的重要定理，级数，度量空间，微分和可微映射， R^n 的积分，Lebesgue积分（附录）。

本书对想要涉足现代数学的读者提供了分析的基本理论、思想和方法。内容深入浅串，说理清楚。

本书可作为工科大学生、研究生的教材或数学参考书，对数学专业的学生也有一定的参考价值。

实 分 析 基 础

丁善瑞 编著

责任编辑 贾吉柱

浙江大学出版社出版

浙江上虞印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * *

850×1168 32开本 12·625印张 305千字

1990年11月第1版 1990年11月第1次印刷

印数0001—1500

ISBN 7-308-00408-2/O·081 定 价:3.20元

前 言

目前我国高校数学课的设置不外乎两类，一类是高等数学，一类是工程数学。后者多强调于方法与应用，而真正能反映学生数学基础与数学素养的是高等数学。但由于近代科学的迅速发展，各种领域互相交叉渗透，研究的问题越来越广泛与复杂，许多现代数学的思想、方法和内容无时无刻不在影响其它学科的发展。这就使广大从事研究工作的科技人员、研究生和大学生普遍感到传统的工科院校高等数学内容远远不能满足要求，他们想涉足现代数学而又感到基础不足，所以迫切希望在高等数学和现代数学之间能搭起一座知识的桥梁，以便引导他们能较为方便地接近现代数学的前沿。正是出于这个考虑，作者于1983年开始在浙江大学为工科高年级大学生和研究生开设了“实分析基础”，试图通过这门课程的讲授，能使工科大学生、研究生在数学的素质方面有所提高，并为他们进一步学习现代数学打下一个必要的分析基础。实践证明，这是一件非常有意义的工作，而且这个目的基本上是达到了。

在高等数学与现代数学之间究竟要补充何科知识才能最“省时省科”地填平两者之间鸿沟，这是一个值得探讨的问题。作者对此经验不多，所编“实分析基础”实为闭门造车，尚有待不断试验、改进、充实与提高。

本书插图由张礼明同志精心绘制，作者在此表示感谢。

目录中打有“*”号的内容，初学者可以不读。

囿于作者水平，书中缺点、错误在所难免，望校内外专家和读者不吝指正。

作者

1990年4月

目 录

第一章 集合与映射

§ 1	集合	1
1.1	集合的概念	1
1.2	集合的基本运算	2
1.3	集的积	4
1.4	上(下)界, 最大(小)元, 上(下)确界	5
§ 2	映射	7
2.1	映射的概念	7
2.2	映射的例子	9
2.3	映射的复合	13
2.4	单射、满射、双射	15
2.5	逆映射	15
2.6	直接象与原象	18
§ 3	等价关系	19
3.1	二元关系	19
3.2	等价关系	20
3.3	等价类	22
3.4	商集	23
3.5	序关系	24
§ 4	同构	25
§ 5	可数集与不可数集	28

5.1	集的势	28
5.2	可数集与不可数集	28
5.3	区间 $[0, 1]$ 的不可数性	30
§ 6	量词及例	31
6.1	量词	31
6.2	例	31
	习题	33

第二章 实数的构造以及有关实数的定理

* § 1	实数的构造	37
1.1	建立实数理论的必要性	37
1.2	Cauchy 序列和等价的 Cauchy 序列	38
1.3	实数的加法	40
1.4	实数的乘法	42
1.5	实数域是有理数域的扩张	46
1.6	实数的比较	46
§ 2	有关实数的定理	48
2.1	$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 内的稠密性	48
2.2	Cauchy 收敛准则	49
2.3	确界定理	51
2.4	有关单调数列的一个定理	54
2.5	Bolzano—Weierstrass 定理	55
2.6	闭区间套定理	56
2.7	有限覆盖定理	57
2.8	有关实数定理的相互推证举例	60
§ 3	闭区间上连续函数的性质	62

3.1	有界性与最大(小)值定理·····	62
3.2	介值定理·····	64
3.3	Cantor一致连续定理·····	65
3.4	有关反函数的一个定理·····	66
§ 4	上、下极限·····	69
4.1	上、下极限的概念与定义·····	69
4.2	上、下极限的性质·····	70
	习题·····	73

第三章 级 数

§ 1	常数项级数·····	77
1.1	基本概念·····	77
1.2	Cauchy收敛准则·····	78
§ 2	正项级数·····	80
2.1	正项级数的比较判别法·····	80
2.2	Cauchy判别法和D'Alembert判别法·····	82
§ 3	任意项级数·····	86
3.1	级数的绝对收敛与条件收敛·····	86
3.2	Abel变换·····	88
3.3	Dirichlet判别法与Abel判别法·····	90
§ 4	绝对收敛级数的性质·····	92
4.1	绝对收敛级数关于项的可交换性·····	92
4.2	级数的乘法·····	97
§ 5	函数序列及其一致收敛性·····	105
5.1	点态收敛与一致收敛·····	105
5.2	与一致收敛定义等价的其它条件·····	108

5.3	一致收敛与连续性	111
5.4	一致收敛序列的积分	112
5.5	一致收敛序列的微分	113
§ 6	函数项级数及其一致收敛性	114
6.1	函数项级数及其收敛的定义	114
6.2	一致收敛级数的性质	114
6.3	函数项级数的一致收敛判别法	116
§ 7	幂级数	122
7.1	Abel定理与幂级数的收敛半径	122
7.2	Abel定理的应用	124
7.3	幂级数的逐项微分与逐项积分	127
习题		129

第四章 度量空间

§ 1	Euclid空间	134
1.1	n 维Euclid空间	134
1.2	范数及其性质	136
1.3	Hölder不等式和Минковский不等式	137
§ 2	度量空间	141
2.1	距离和度量空间	141
2.2	度量空间的其它例子	143
2.3	序列的收敛	145
2.4	开集和闭集	148
2.5	紧集	153
§ 3	连续映射	158

3.1	连续映射及其性质	158
3.2	一致连续	161
3.3	压缩映射及其应用	163
§ 4	Weierstrass逼近定理	171
4.1	СТЕКЛОВ函数	171
4.2	СТЕКЛОВ函数的卷积表示	173
4.3	Weierstrass逼近定理	174
4.4	Bernstein多项式	177
	习题	182

第五章 微分和可微映射

§ 1	预备知识	187
1.1	向量值函数	187
1.2	线性变换及其矩阵	187
1.3	线性变换的复合	189
1.4	空间 $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$	190
§ 2	方向导数与偏导数	192
2.1	方向导数	192
2.2	偏导数	192
2.3	方向导数、偏导数存在与函数连续 之关系	193
§ 3	微分	194
3.1	微分的定义	194
3.2	可微性与连续性以及与方向导数 存在性之间的关系	197
3.3	$DF(X)$ 的矩阵(Jacobian矩阵)	200

3.4	链法则.....	202
3.5	C^1 类映射.....	208
§ 4	隐函数存在定理及其应用.....	210
4.1	由一个方程确定的隐函数存在定理.....	212
4.2	由方程组确定的隐函数存在定理.....	218
4.3	反函数存在定理.....	229
* 4.4	条件极值.....	230
习题		239

第六章 R^n 内的积分

§ 1	R^1 内的Riemann积分.....	246
1.1	$[a, b]$ 的分划.....	246
1.2	Riemann积分.....	247
1.3	Darboux积分.....	249
1.4	Darboux可积的充要条件.....	252
1.5	Darboux可积与Riemann可积 的关系.....	256
1.6	积分的基本性质.....	258
§ 2	R^n 内的容积.....	266
2.1	n 维区间的容积.....	266
2.2	有界点集的容积.....	269
§ 3	R^n 内积分.....	273
3.1	分划.....	273
3.2	R^n 内的Riemann积分.....	274
3.3	R^n 内的Darboux积分.....	276
3.4	Darboux可积的充要条件.....	278

3.5	D -可积与 R -可积的关系	278
§ 4	重积分的计算	283
4.1	化积分为累次积分	283
4.2	重积分的变量替换	288
§ 5	微分形式与外微分	307
5.1	坐标变换与空间的定向	307
5.2	一次微分形式及其积分	310
5.3	二次微分形式及其积分	313
5.4	三次微分形式及其积分	321
5.5	推广	323
5.6	外微分	325
5.7	Stokes公式	327
	习题	330
附录	Lebesgue积分	335
§ 1	零测度集	336
§ 2	简单函数及其积分	337
§ 3	简单函数的单调序列	338
§ 4	C_1 类函数及其积分	343
§ 5	一般区间 I 上的Lebesgue积分及其性质	349
§ 6	Levi单调收敛定理	354
§ 7	Lebesgue控制收敛定理与Fatou定理	359
§ 8	可测函数与可测集	364
§ 9	平方可积函数类 $L^2(I)$	370
	习题	376

第一章 集合与映射

§1 集 合

1.1 集合的概念

集合是数学中常用的概念。例如，实数的集合，自然数的集合，多项式的集合，连续函数的集合，平面点的集合，空间平面的集合，等等。

集合的概念在现代数学中扮演着极其重要的角色。但这个概念是如此基本，以致我们在这里没有必要也无法对它下一个精确的定义，而只能用事物的“总体”，“全体”等等词汇对它作一番解释。当然，这种解释在概念上仍然是很模糊的。要弥补这个缺陷，一般可以采用“公理集合论”。但它已超出本教程的范围。

集合也简称为集。

组成集合的“个体”或“成员”叫做元素。为了表示元素 x 是属于集合 E 的，我们采用记号

$$x \in E \text{ 或 } E \ni x$$

若 x 不属于 E ，则记作 $x \notin E$

通常用两种方法来表示集合：

1° 将属于此集的元素都列举出来。例如

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10, \}$$

$$N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

$$B = \{\text{甲}, \text{乙}, \text{丙}, \text{丁}\}$$

2° 给出集合的一切元素所满足的从属法则。这个法则一般由一个或多个条件组成。例如：

$$A = \{x: x \in N \text{ 且 } x \leq 10\}$$

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$C = \{y: y^2 - 16 = 0\}$$

定义 如果组成集合 A 的元素也都是集 B 的元素，则称集 A 是集 B 的一个子集或部分。记为

$$A \subseteq B$$

并读作“ A 包含在 B 中”或“ B 包含 A ”（见图 1）

从定义可知，每一个集合本身也是它自己的一个子集。因此上述包含关系 $A \subseteq B$ 并没有排斥 $A = B$ 的情况。当 $A \subseteq B$ 并且存在元素 $x \in B$ 而 $x \notin A$ 时，称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subset B$ 。不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\{\}$ 或 $\emptyset$ 。每一个集合 M 都以空集为其子集。事实上，由定义可知，

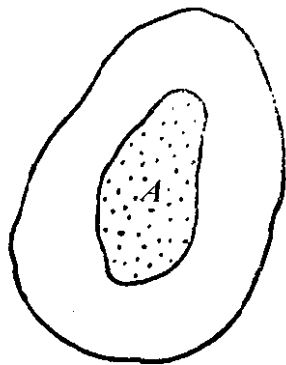


图 1

知， $A \subseteq B$ 当且仅当凡不属于 B 的元素必也不属于 A 。因此，如果 $x \notin M$ ，显然亦有 $x \notin \emptyset$ 。所以 $\emptyset \subseteq M$ 。

例 1 菱形的全体是四边形集的一个子集。

例 2 多项式全体 P 是连续函数全体 C 的一个子集。

例 3 集 $A = \{(x, y): x^2 + y^2 = -3, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ 是空集。

1.2 集合的基本运算

A. 并集：设 A 、 B 为两集。若集 C 是由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成，则称 C 是 A 、 B 两集之并（见图 2），记作

$$C = A \cup B$$

例 4 菱形集 L 与矩形集 R 之并是至少有两个对称轴的四边形集。

例 5 设 A 是 24 的因子集， B 是 36 的因子集，则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$$

由此可知

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\} \quad (1)$$

我们同样可以定义 $A \cup B \cup C$ ，等等。

B. 交集：若集 C 是由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成，则称 C 是 A 、 B 的交（见图 3），记为

$$C = A \cap B$$

例 6 在四边形集中，菱形子集 L 与矩形子集 R 之交是正方形集。

例 7 24 的因子集 A 与 36 的因子集 B 之交是集

$$C = A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{x: x \text{ 是 } 12 \text{ 的因子}\}$$

由此可知，

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\} \quad (2)$$

我们同样可以定义 $A \cap B \cap C$ ，等等。

C. 差集：设 A 、 B 为任意两集。所有属于 A 而不属于 B

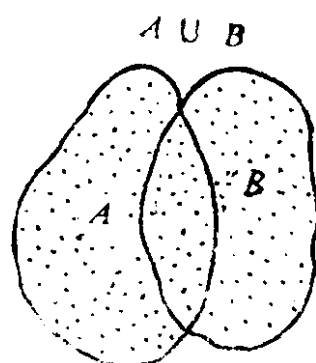


图 2

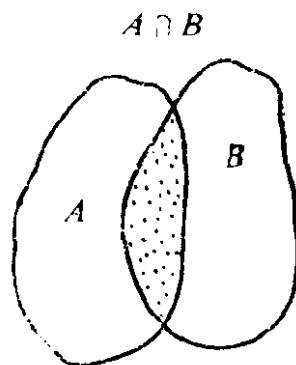


图 3

的元素所成之集，称为 A 与 B 之差（见图4）。记为 $A \setminus B$ 。
于是有

$$A \setminus B = \{x; x \in A \text{ 且 } x \notin B\} \quad (3)$$

D. 补集：设 A 是 E 的一个子集。称集 $E \setminus A$ 为 A 关于 E 的补集（或余集）（见图5），并记为 $C_E A$ ，其中， E 是某个基本集。当基本集不讲自明时，也可以把 $C_E A$ 简单地记为 $C A$ 或 A^c 。

定理1 设 A, B 为两集，则有

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (4)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (5)$$

其中补集都是关于某个基本集 E 而言的。

证明 我们证明第一个等式而把第二个等式的证明留给读者。

设 $x \in (A \cup B)^c$ 。于是 $x \in E \setminus (A \cup B)$ ，从而 $x \notin A, x \notin B$ 。故 $x \in E \setminus A = A^c, x \in E \setminus B = B^c$ ，即 $x \in A^c \cap B^c$ 。所以有

$$(A \cap B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad (*)$$

反过来，若 $x \in A^c \cap B^c$ ，则 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$ ， $x \notin A, x \notin B$ ，从而 $x \in E \setminus (A \cup B) = (A \cup B)^c$ 。故

$$(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c \quad (**)$$

由 $(*)$ 与 $(**)$ 便得公式(4)

1.3 集的积

设 x, y 为两事物。称事物的序列 (x, y) 为偶，其中 x 称为偶的第一元素， y 称为偶的第二元素。偶与元素

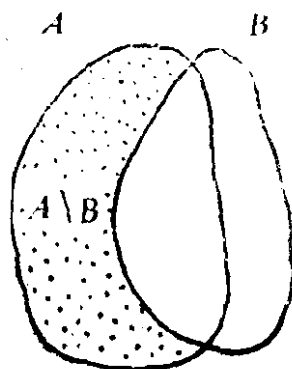


图 4

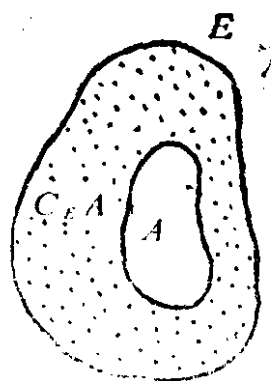


图 5

的次序有关，它并不等于含两个元素 x, y 的子集 $\{x, y\}$ 。一般而言， $(x, y) \neq (y, x)$ 。

设 X, Y 为两集。由一切取自 X 的元素 x 与取自 Y 的元素 y 所成偶 (x, y) 的集合称为集 X 和 Y 的积集，并记为 $X \times Y$ 。因此有

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

例 8 我们可以定义 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 。这个集由所有两个元素都是实数的偶组成。为了使这个概念显得更直观，我们可以把 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 中的每一个元素 (x, y) 与平面 P 内关于坐标系有横标 x 和纵标 y 的点相对应。于是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 便与 P 等同。同样的理由， $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 的子集 $[a, b] \times [c, d]$ 便与平 P 面内顶点为 $(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)$ 的闭矩形点集等同（见图 6）

我们可以毫无困难地定义 n 个集 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的积 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 。特别，若 $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ ，便将集 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 记为 X^n 。例如 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2, \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n$ ，等等。通常还把 $X^m \times X^n$ 与 X^{m+n} 视为等同。

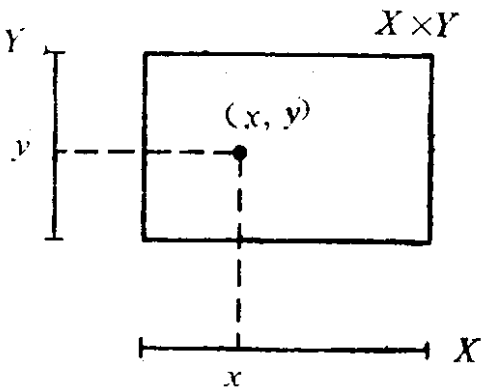


图 6

1.4 上(下)界，最大(小)元，上(下)确界

以下都假定 X 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集， a 是 $\mathbf{R}$ 的一个元素。

A. 上(下)界：如果对 X 中的每一个元素 x ，恒有 $a \geq x$ 成立，则称 a 是 X 的一个**上界**；如果对 X 中的每一个元素 x ，恒有 $a \leq x$ 成立，则称 a 是 x 的一个**下界**。

例 9 $\mathbf{R}$ 的子集 $X = [0, +\infty)$ 没有上界，而所有