丁善瑞 编著

实分析基础

浙江大学出版社

实分析基础

丁善瑞 编著

浙江大学出版社

内　容　简　介

本书是为工科院校学生学习高等数学以后，希望学习现代数学的读者提供必要的分析基础而编写的。全书共六章一个附录：包括集合与映射，实数的构造以及有关实数的重要定理，级数，度量空间，微分和可微映射，R^n的积分，Lebesgue积分（附录）。

本书对想要涉足现代数学的读者提供了分析的基本理论、思想和方法。内容深入浅出，说理清楚。

本书可作为工科大学生、研究生的教材或数学参考书，对数学专业的学生也有一定的参考价值。

实　分　析　基　础

丁善瑞　编著

责任编辑　贾吉柱

浙江大学出版社出版

浙江上虞印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*　*　*

850×1168　32开本　12.625印张　305千字

1990年11月第1版　1990年11月第1次印刷

印数0001—1500

ISBN 7-308-00408-2/O·081　**定　价：3.20元**

前　言

目前我国高校数学课的设置不外乎两类，一类是高等数学，一类是工程数学。后者多强调于方法与应用，而真正能反映学生数学基础与数学素养的是高等数学。但由于近代科学的迅速发展，各种领域互相交叉渗透，研究的问题越来越广泛与复杂，许多现代数学的思想、方法和内容无时无刻不在影响其它学科的发展。这就使广大从事研究工作的科技人员、研究生和大学生普遍感到传统的工科院校高等数学内容远远不能满足要求，他们想涉足现代数学而又感到基础不足，所以迫切希望在高等数学和现代数学之间能搭起一座知识的桥梁，以便引导他们能较为方便地接近现代数学的前沿。正是出于这个考虑，作者于1983年开始在浙江大学为工科高年级大学生和研究生开设了“实分析基础”，试图通过这门课程的讲授，能使工科大学生、研究生在数学的素质方面有所提高，并为他们进一步学习现代数学打下一个必要的分析基础。实践证明，这是一件非常有意义的工作，而且这个目的基本上是达到了。

在高等数学与现代数学之间究竟要补充何科知识才能最“省时省科”地填平两者之间鸿沟，这是一个值得探讨的问题。作者对此经验不多，所编“实分析基础”实为闭门之车，尚有待不断试验、改进、充实与提高。

本书插图由张礼明同志精心绘制，作者在此表示感谢。

目录中打有“*”号的内容，初学者可以不读。

囿于作者水平，书中缺点、错误在所难免，望校内外专家和读者不吝指正。

作者

1990年4月

目　　录

第一章　集合与映射

第二章 实数的构造以及有关实数的定理

第三章 级 数

第四章 度量空间

第五章 微分和可微映射

第六章 R^n内的积分

第一章　集合与映射

§1　集　　合

1.1　集合的概念

集合是数学中常用的概念。例如，实数的集合，自然数的集合，多项式的集合，连续函数的集合，平面点的集合，空间平面的集合，等等。

集合的概念在现代数学中扮演着极其重要的角色。但这个概念是如此基本，以致我们在这里没有必要也无法对它下一个精确的定义，而只能用事物的“总体”，“全体”等等词汇对它作一番解释。当然，这种解释在概念上仍然是很模糊的。要弥补这个缺陷，一般可以采用“公理集合论”。但它已超出本教程的范围。

集合也简称为集。

组成集合的“个体”或“成员”叫做**元素**。为了表示元素x是属于集合E的，我们采用记号

$$x\in E \text{ 或 } E\ni x$$

若x不属于E，则记作$x\notin E$

通常用两种方法来表示集合：

1°　将属于此集的元素都列举出来。例如

$$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,8,10,\}$$

$$N=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$$

$$B=\{甲，乙，丙，丁\}$$

2° 给出集合的一切元素所满足的从属法则。这个法则一般由一个或多个条件组成。例如：

$$A=\{x:\ x\in N 且 x\leqslant 10\}$$

$$D=\{(x,\ y):\ x^2+y^2\leqslant 1\}$$

$$C=\{y:\ y^2-16=0\}$$

定义 如果组成集合A的元素也都是集B的元素，则称集A是集B的一个**子集**或**部分**。记为

$$A\subseteq B$$

并读作"A包含在B中"或"B包含A"（见图1）

从定义可知，每一个集合本身也是它自己的一个子集。因此上述包含关系$A\subseteq B$并没有排斥$A=B$的情况。当$A\subseteq B$并且存在元素$x\in B$而$x\notin A$时，称A为B的**真子集**，记为$A\subset B$。不含任何元素的集合叫做**空集**，记为$\{\ \}$或$\varnothing$。每一个集合M都以空集为其子集。事实上，由定义可知，$A\subseteq B$当且仅当凡不属于B的元素必也不属于A。因此，如果$x\notin M$，显然亦有$x\notin\varnothing$。所以$\varnothing\subseteq M$。

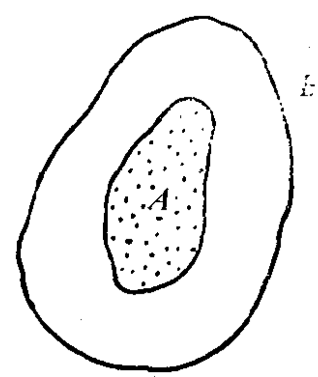

图 1

例 1 菱形的全体是四边形集的一个子集。

例 2 多项式全体P是连续函数全体$\mathbf{C}$的一个子集。

例 3 集$A=\{(x,\ y):\ x^2+y^2=-3,\ x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$是空集。

1.2 集合的基本运算

A.并集：设A、B为两集。若集C是由所有属于A或者属于B的元素组成，则称C是A、B两集之并（见图2），记作

$$C=A\cup B$$

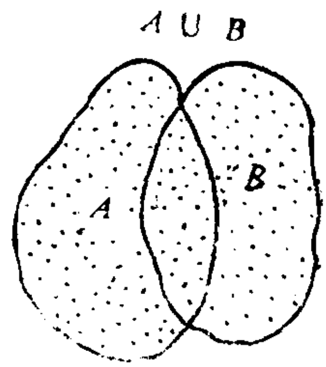

图 2

例4　菱形集L与矩形集R之并是至少有两个对称轴的四边形集。

例5　设A是24的因子集，B是36的因子集，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}$$

由此可知

$$A\cup B=\{x: x\in A或x\in B\} \qquad (1)$$

我们同样可以定义$A\cup B\cup C$，等等。

B.交集：若集C是由所有既属于A又属于B的元素组成，则称C是A、B的交（见图3），记为

$$C=A\cap B$$

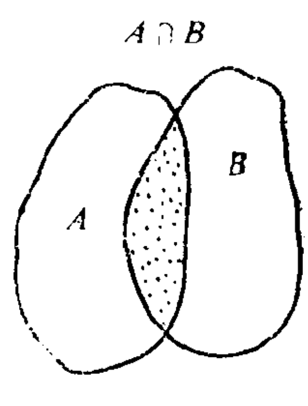

图 3

例6　在四边形集中，菱形子集L与矩形子集R之交是正方形集。

例7　24的因子集A与36的因子集B之交是集

$$C=A\cap B=\{1,2,3,4,6,12\}=\{x: x是12的因子\}$$

由此可知，

$$A\cap B=\{x: x\in A且x\in B\} \qquad (2)$$

我们同样可以定义$A\cap B\cap C$，等等。

C.差集：设A、B为任意两集。所有属于A而不属于B

的元素所成之集，称为A与B之差（见图4）。记为$A\setminus B$。于是有

$$A\setminus B=\{x: x\in A且x\notin B\} \quad (3)$$

D. 补集：设A是E的一个子集。称集$E\setminus A$为A关于E的补集（或余集）（见图5），并记为$C_E A$，其中，E是某个基本集。当基本集不讲自明时，也可以把$C_E A$简单地记为CA或A^c。

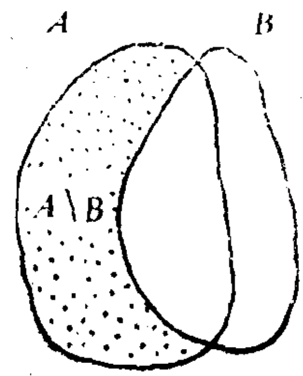

图 4

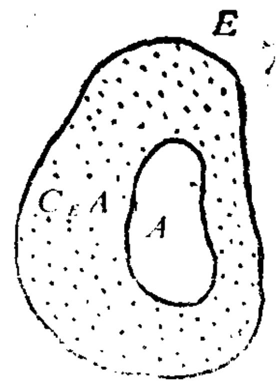

图 5

定理1 设A、B为两集，则有

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c \quad (4)$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c \quad (5)$$

其中补集都是关于某个基本集E而言的。

证明 我们证明第一个等式而把第二个等式的证明留给读者。

设$x\in(A\cup B)^c$。于是$x\in E\setminus(A\cup B)$，从而$x\notin A$，$x\notin B$。故$x\in E\setminus A=A^c$，$x\in E\setminus B=B^c$，即$x\in A^c\cap B^c$。所以有

$$(A\cap B)^c\subseteq A^c\cap B^c \quad (*)$$

反过来，若$x\in A^c\cap B^c$，则$x\in A^c$且$x\in B^c$，$x\notin A$，$x\notin B$，从而$x\in E\setminus(A\cup B)=(A\cup B)^c$。故

$$(A\cup B)^c\supseteq A^c\cap B^c \quad (**)$$

由（$*$）与（$**$）便得公式（4）

1.3 集的积

设x，y为两事物。称事物的序列（x，y）为偶，其中x称为偶的第一元素，y称为偶的第二元素。偶与元素

的次序有关，它并不等于含两个元素x，y的子集$\{x,y\}$。一般而言，$(x, y) \neq (y, x)$。

设X，Y为两集。由一切取自X的元素x与取自Y的元素y所成偶(x, y)的集合称为集X和Y的**积集**，并记为$X \times Y$。因此有

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$$

例 8　我们可以定义$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$。这个集由所有两个元素都是实数的偶组成。为了使这个概念显得更直观，我们可以把$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$中的每一个元素$(x, y)$与平面$P$内关于坐标系有横标$x$和纵标$y$的点相对应。于是$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$便与$P$等同。同样的理由，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$的子集$[a, b] \times [c, d]$便与平$P$面内顶点为$(a, c)$，$(a, d)$，$(b, c)$，$(b, d)$的闭矩形点集等同（见图 6）

我们可以毫无困难地定义n个集X_1，X_2，$\cdots$，X_n的积$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$。特别，若$X_1 = X_2 = \cdots = X_n$，便将集$X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$记为$X^n$。例如　$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$，$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^m$，等等。通常还把$X^m \times X^n$与$X^{m+n}$视为等同。

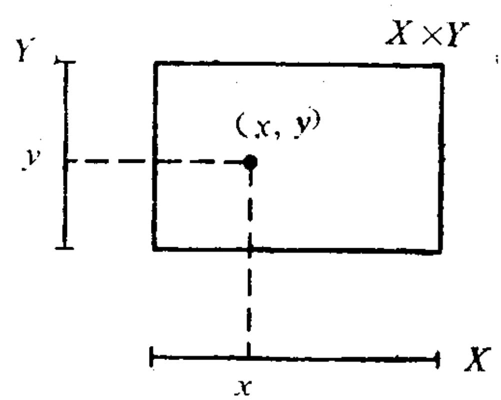

图　6

1.4　上（下）界，最大（小）元，上（下）确界

以下都假定X是$\mathbf{R}$的一个子集，a是$\mathbf{R}$的一个元素。

A.上（下）界：如果对X中的每一个元素x，恒有$a \geqslant x$成立，则称a是X的一个**上界**；如果对X中的每一个元素X，恒有$a \leqslant x$成立，则称a是x的一个**下界**。

例 9　$\mathbf{R}$的子集$X = [0, +\infty)$没有上界，而所有