偏微分方程
初值问题差分方法

胡祖炽 雷功炎 编

北京大学出版社

偏微分方程初值问题差分方法

胡祖炽　雷功炎　编

责任编辑　徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂　印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　8.375印张　180千字

1988年6月第一版　1988年6月第一次印刷

印数：00001—3500册

ISBN 7-301-00239-4/D-053　　定价：2.90元

内 容 提 要

本书介绍偏微分方程初值问题的差分方法。全书分四章。第一章和第二章从简单的方程出发，分别介绍了对抛物型方程和双曲型方程构造差分格式的各种方法，讨论了差分格式的相容性、收敛性、稳定性等问题，以及研究这些问题的方法。第三章介绍线性方程初值问题差分格式的稳定性理论。第四章介绍了常系数线性方程初值问题差分格式的稳定性条件和双曲型方程初边值混合问题的稳定性理论。

本书可用作计算数学专业的教材，也可作为从事计算数学、计算力学、计算物理的科技人员、教师和大学生、研究生的参考书。

序　言

呈现在读者面前的这本书是在北京大学数学系计算数学专业四年级学生同名课程所用讲义的基础上写成的。讲义最初的版本自1981年开始使用，以后经过多次修改，最终编成了这本《偏微分方程初值问题差分方法》。

由于这是一本供本科生在一个学期内使用的教材，因此本书的主要篇幅限定在利用最简单的线性模型阐明差分方程的基本概念、理论和方法。采用线性模型有其独特的优点。一方面它使得数学推导较为严密；另一方面更加突出了差分方法本身所具有的特点及问题。同时考虑到学生进一步的需要，本书也包含有与求解非线性问题有关的某些材料。在尽可能的情况下，这些材料也是通过线性模型进行论述的。在本书的叙述中，我们还力求将差分方程与相应微分方程的理论及方法加以对照，同时注意方程所描写的物理系统的特点。我们认为，对学习这门课程而言，上述两点也是应当加以遵循的原则。

本书共分四章：

第一章以热传导方程为例，叙述抛物型方程的差分解法。本章也介绍了随机游动法和分步方法。

第二章讨论双曲型方程差分格式的构造方法及特点。除迎风格式、Lax 格式及 LW 格式等基本内容外，本章还以声波方程组为例，说明了 Годунов 方法与 Glimm 的随机选取法；介绍了对称双曲型方程组的耗散型差分格式及差分格式的色散现象。本章的最后一节，叙述了求解拟线性双曲型方

程组的 Courant-Issacson-Rees 格式。

第三章介绍了线性方程组初值问题的稳定性理论，证明了 Lax 等价定理。

第四章介绍了常系数线性方程组初值问题的稳定性条件，同时概述了双曲型方程初边值混合问题的稳定性理论。

作为一门专业基础课程的教材，本书的内容并非都是必须的。根据不同的学时安排及课程深度的要求某些章节可以删减。例如可减去第三章和第四章的部分理论性内容。

除作教材外，本书还可以作为计算数学、计算力学、计算物理工作者及工程技术人员的参考书。

本书编写中，北京大学数学系计算数学教研室的同志们提出了许多宝贵意见和建议。黄藤平同志阅读了全部书稿，特此致谢。

编　者

一九八五年一月二十日

目　录

第一章　抛物型方程的差分方法

在研究热的传导过程、气体扩散现象以及电磁场的传播等物理问题时，我们常常遇到抛物型偏微分方程。这一类方程的自变量中往往有一个是时间变量，因而方程所描述的通常是随时间变化的、非定常的物理现象。这也就决定了抛物型方程的基本定解问题是初值问题。

抛物型方程中最典型与最简单的就是热传导方程，本章即以其为基本模型进行讨论。

考虑最简单的一维热传导方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\quad(0<t\leqslant T),$$

它可以有两种不同类型的初值问题：

1° 如果空间变量 x 的变化范围是 $-\infty<x<\infty$，定解条件为

$$U(x,0)=f(x)\quad(-\infty<x<\infty),$$

则称之为纯粹的初值问题，也叫做 Cauchy 问题。

2° 如果 x 的变化范围是一有限区间，$a\leqslant x\leqslant b$，则为了使解在 $t>0, a\leqslant x\leqslant b$ 唯一确定，除应在 $t=0$ 给定初始条件外，还必须在 $x=a$ 及 $x=b$ 处给出辅助的边界条件。边界条件可以有三种不同的形式，所谓第一类边界条件即是给出

$$U(a,t)=\psi_1(t),\quad U(b,t)=\psi_2(t)\quad(0\leqslant t\leqslant T).$$

此时在给出的初值与边值之间应满足所谓的连接条件：

$$\psi_1(0)=f(a),\quad \psi_2(0)=f(b).$$

第二和第三类边界条件可以统一表示为

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}-\alpha(t)U\right]\bigg|_{x=a}=\psi_1(t),$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\beta(t)U\right]\bigg|_{x=b}=\psi_2(t)$$

$$(0\leqslant t\leqslant T,\alpha(t)\geqslant 0,\beta(t)\geqslant 0),$$

当 $\alpha(t),\beta(t)$ 都恒等于 0 时为第二类边界条件，否则称为第三类边界条件。2°所讨论的问题一般称为混合问题。

本章首先以一维热传导方程为例，说明如何用差分方法近似地解上述两类初值问题，给出了适用于抛物型方程的主要差分格式，从对这些格式的讨论中，引出差分方法的若干基本概念，说明了差分方法中的主要理论问题，同时叙述了研究这些问题的各种不同方法。然后，我们还利用多维热传导方程作为模型，讨论了适用于高维方程数值求解的特殊方法。本章最后一节对与差分方法有密切关系的，求解抛物型方程的随机游动方法作了简要介绍。

§1　一维热传导方程 Cauchy 问题的差分解法

1.1　热传导方程解的基本性质

在讨论数值方法之前，有必要先对微分方程理论的有关结果做一简单的回顾。讨论一维热传导方程纯初值问题

$$(1.1)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & (-\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T),\\ U(x,0)=f(x) & (-\infty<x<\infty),\end{cases}$$

其中 $U=U(x,t)$ 是未知函数。在讨论数值方法时，初值函数 $f(x)$ 总假定是足够光滑的。

微分方程理论告诉我们，只要 $f(x)$ 是 $|x|<\infty$ 上的有界

连续函数，那么问题(1.1)的有界解就是唯一存在的。它连续依赖于初值，且具有形式

$$(1.2)\qquad U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right\}d\xi.$$

由解的这一表达式可以容易地推出下列结果：

1° 无论 $t>0$ 多么小，$U(x,t)$都依赖于$t=0$时U的一切值，即依赖于对一切ξ的$f(\xi)$之值。当然在$|x-\xi|$很大时，依赖程度是很小的。但请注意，这是线性抛物型方程与双曲型方程极不相同之点，即在抛物型情形下，信号传播速度是无限的，而对于双曲型方程这一速度是有限的；

2° $U(x,t)$不仅仅是x和t的连续函数，而且只要$t>0$，则无论对x还是对t，各阶导数都是存在的；

3° 极值原理成立，即如果$m\leqslant f(x)\leqslant M$，则有

$$m\leqslant U(x,t)\leqslant M.$$

此外，通常称 (1.2) 式右端积分号下的函数

$$(1.3)\qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right\}$$

为方程的基本解。它可以看做一个均值为x，方差为$2t$的正态随机变数ξ的概率密度函数。(1.2)式表明，$U(x,t)$就是$f(\xi)$关于这一概率密度的期望值。对此可做如下简略的物理解释：把热传导过程看做能量的扩散，而能量则由若干完全相同的粒子所携带，由此，温度的分布可以等价于粒子的分布。设想每一个粒子均按照(1.3)随机游动，也就是说，初始时刻位置为ξ的粒子，在时刻t位于点x的概率密度是(1.3)。这样，初始时刻按密度$f(\xi)$分布的粒子在t时刻分布的数学期望，即t时刻的温度分布就是$U(x,t)$。这一看

法为一类基于概率论思想的数值方法提供了依据。

1.2 四点显式格式

在讨论用差分方法求解问题(1.1)时，我们假定 $f(x)$ 的四阶导数连续且有界。这就保证了解 $U(x,t)$ 在 $|x|<\infty$，$0<t\leqslant T$ 内对 t 和 x 分别有直到二阶与四阶的有界连续偏导数，而且易于知道

$$(1.4)\qquad \sup_{\substack{0<t\leqslant T\\ |x|<\infty}}\left|\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right| = \sup_{\substack{0<t\leqslant T\\ |x|<\infty}}\left|\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\right| = \sup_{|x|<\infty}|f^{(4)}(x)|.$$

在用差分方法数值求解时，首先选取时间步长 Δt 及空间步长 Δx，用直线

$$x = j\Delta x \quad (j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

$$t = n\Delta t \quad (n=0,1,2,\cdots,[T/\Delta t])$$

在 (x,t) 平面上构成网格(如图 1.1所示)，再利用数值微分公式

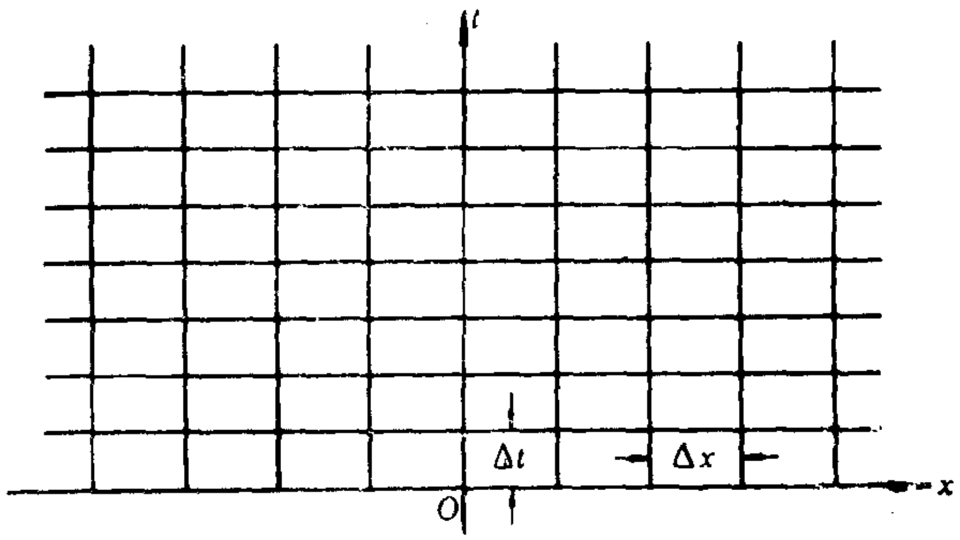

图1.1 (x,t) 平面上的网格

$$U_t = \frac{U(x,t+\Delta t)-U(x,t)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}U_{tt}(x,t+\theta\Delta t) \quad (|\theta|<1),$$

$$U_{xx}=\frac{U(x+\Delta x,t)-2U(x,t)+U(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$$

$$-\frac{(\Delta x)^2}{12}U_{x^4}(x+\tilde{\theta}\Delta x,t)\qquad(|\tilde{\theta}|<1)$$

代替(1.1)中的微商，得到

$$(1.5)\quad \frac{U(x,t+\Delta t)-U(x,t)}{\Delta t}$$

$$-\frac{U(x+\Delta x,t)-2U(x,t)+U(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}=R(x,t),$$

其中

$$R(x,t)=\frac{\Delta t}{2}U_{t^2}(x,t+\theta\Delta t)-\frac{(\Delta x)^2}{12}U_{x^4}(x+\tilde{\theta}\Delta x,t).$$

由于 $U_{t^2}=U_{x^4}$，故若 U_{x^4} 有界，则在求解区域内

$$(1.6)\qquad |R(x,t)|\leqslant\left(\frac{\Delta t}{2}+\frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ |x|<\infty}}|U_{x^4}|$$

$$=O(\Delta t+(\Delta x)^2).$$

注意到当 $\Delta t,\Delta x$ 足够小时，$R(x,t)$ 是小量. 为给出一个可用于数值计算的公式，将其从(1.5)中略去，这样就得到了一个与微分方程(1.1)相近似的差分方程：

$$(1.7)\qquad \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}=0$$

$$(n=0,1,2,\cdots,[T/\Delta t]-1,\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

此处 u_j^n 可被看作在网格点 $(j\Delta x,n\Delta t)$ 上 $U(j\Delta x,n\Delta t)$ 的近似值. 对 $n=0$ 而言，由初值条件可有

$$(1.8)\qquad u_j^0=f(x_j)=f_j,\quad (j=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

将(1.7)与(1.8)合在一起，我们就构成了一个数值求解 Cauchy 问题(1.1)的差分格式。$R_j^n=R(j\Delta x,n\Delta t)$ 称为差分方程(1.7)的截断误差。

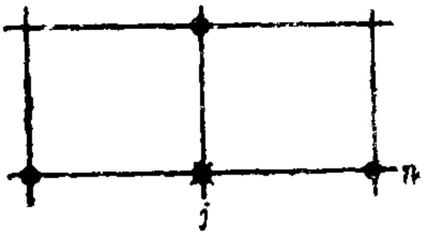

图1.2 四点显式格式

上面所得到的格式通常以图1.2表示，称为四点显式格式。说它是显式格式，是因为当水平直线 $t=n\Delta t$ 上各网格点处的 u_j^n 已知时，(1.7)式就直接给出直线 $t=(n+1)\Delta t$ 上格点处 u_j^{n+1}的值，即为得到 u_j^{n+1}不需要求解联立方程组。

应当指出，由于求解是逐层进行的，因而前一时刻数值计算所带来的误差,会影响下一时刻的计算结果。也就是说，误差是要随着时间传播的。对于一个差分格式而言，这一传播误差的性态是十分重要的。为说明这一点，先来看一下如下的简单情况。

1.3 四点显式格式的误差传播

令 $r=\Delta t/(\Delta x)^2$,差分格式(1.7),(1.8)可改写为

$$(1.9)\qquad \begin{cases} u_j^{n+1}=ru_{j+1}^n+(1-2r)u_j^n+ru_{j-1}^n, \\ u_j^0=f_j. \end{cases}$$

我们假设只在初始层($n=0$)的一个点，例如 $j=0$上引入误差 ε,即仅把 u_0^0换成 $\tilde{u}_0^0=u_0^0+\varepsilon$,而当 $j\neq0$时，仍有 $\tilde{u}_j^0=u_j^0$。以这一带有误差的初值 $\tilde{u}_j^0$ 按照(1.9)逐层计算，且假设在以后的计算中不再引进新的误差，那么计算出的 $\tilde{u}_j^n$ 就满足

$$(1.10)\qquad \begin{cases} \tilde{u}_j^{n+1}=r\tilde{u}_{j+1}^n+(1-2r)\tilde{u}_j^n+r\tilde{u}_{j-1}^n, \\ \tilde{u}_j^0=\begin{cases} f_j & (j\neq0), \\ f_j+\varepsilon & (j=0). \end{cases} \end{cases}$$

把(1.10)和(1.9)相减，并将“传播误差”记为

$$\varepsilon_j^n = \tilde{u}_j^n - u_j^n,$$

则 ε_j^n 满足方程

$$(1.10_\varepsilon)\quad \begin{cases} \varepsilon_j^{n+1} = r\varepsilon_{j+1}^n + (1-2r)\varepsilon_j^n + r\varepsilon_{j-1}^n, \\ \varepsilon_j^0 = \begin{cases} 0 & (j \neq 0), \\ \varepsilon & (j = 0). \end{cases} \end{cases}$$

图1.3标出了 ε_j^1 在各格点上的值。容易看出，受点 $(j,n) = (0,0)$ 处误差 ε 影响的只有 $x = \pm(\Delta x/\Delta t)t$ 两条斜线之间格

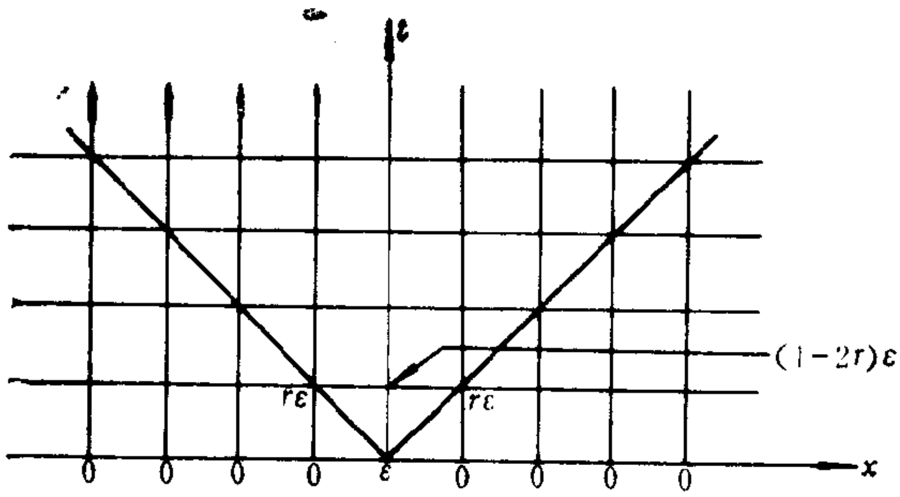

图1.3 四点显式格式的误差传播

点上的 u 值，在两条直线之外的格点上误差为 0 。(1.10_ε) 的解 ε_j^n 依赖于 r 的取值。以下证明：

若$0<r\leqslant 1/2$，则 ε_j^n 对一切 j 和 n 均有界，且其绝对值小于$|\varepsilon|$。

为证明方便，记 $E^n = \sup\limits_j|\varepsilon_j^n|$，由$0<r\leqslant 1/2$，故 $1-2r\geqslant 0$，于是

$$|\varepsilon_j^{n+1}| \leqslant r|\varepsilon_{j+1}^n| + (1-2r)|\varepsilon_j^n| + r|\varepsilon_{j-1}^n|$$
$$\leqslant rE^n + (1-2r)E^n + rE^n = E^n.$$

由此，$E^{n+1}\leqslant E^n$，进而有 $E^n \leqslant E^0 = |\varepsilon|$。

这说明当 $r\leqslant 1/2$时，单个格点上的误差 ε，对以后各层

格点上的影响恒不超过其绝对值．下一节中即可知道，这实际表明差分格式(1.7)，(1.8)当$r\leqslant 1/2$时是数值稳定的．

下面讨论$r>1/2$的情况．首先说明，此时(1.10)的解ε_j^n随着指标j的变化交替地改变符号．用数学归纳法证明这一点．$n=1$时，$\varepsilon_{-1}^1=r\varepsilon$，$\varepsilon_0^1=(1-2r)\varepsilon$，$\varepsilon_1^1=r\varepsilon$，它们是交替变号的．现在来证明，若$\varepsilon_j^n$交替地变号，则$\varepsilon_j^{n+1}$也如此．这是因为若$\varepsilon_j^n>0$，则有

$$\varepsilon_j^{n+1}=r\varepsilon_{j+1}^n+(1-2r)\varepsilon_j^n+r\varepsilon_{j-1}^n<0.$$

反之若$\varepsilon_j^n<0$，则有$\varepsilon_j^{n+1}>0$，故的确ε_j^{n+1}也是交替变号的．由此可知，对一切n与j，

$$|\varepsilon_j^{n+1}|=r|\varepsilon_{j+1}^n|+(2r-1)|\varepsilon_j^n|+r|\varepsilon_{j-1}^n|.$$

令$S^n=\sum\limits_j|\varepsilon_j^n|$，于是

$$\begin{aligned}S^{n+1}&=rS^n+(2r-1)S^n+rS^n=(4r-1)S^n\\&=(4r-1)^2S^{n-1}=\cdots=(4r-1)^{n+1}|\varepsilon|.\end{aligned}$$

今$r>1/2$，故$4r-1>1$．当$n\to\infty$时，$(4r-1)^n\to\infty$，由此$S^n\to\infty$．但注意只有在$x=\pm(\Delta x/\Delta t)t$之间的格点上才有$\varepsilon_j^n\neq 0$，因而在直线$t=n\Delta t$上，非零的$\varepsilon_j^n$至多有$(2n+1)$个，所以必有一个$\varepsilon_j^n$，它的绝对值比$t=n\Delta t$上$|\varepsilon_j^n|$的平均值为大，即有

$$|\varepsilon_j^n|\geqslant\frac{(4r-1)^n}{2n+1}|\varepsilon|.$$

由上式可以看出，在$r>1/2$时，初始时刻一个点上的误差对差分方程的解所造成的影响随n无限制地增加．这显然是不能容许的．

上面所讨论的现象对差分方法而言，无疑是具有重要意

义的。为区分两种截然不同的误差传播方式，需要引进“稳定性”的概念，为此我们转入下一节。

§2 稳定性·相容性·收敛性

2.1 差分格式的(一致)稳定性

我们把上节对四点显式格式误差传播的讨论一般化。假设在初始层的每个格点上均引进误差 ε_j^0，然后按照(1.7)数值求解，并设在以后各层的计算中不再引入新的误差。由此 ε_j^0 在以后时刻各层结点上造成的传播误差记为 ε_j^n。由于格式是线性的，ε_j^n 适合于与 u_j^n 形式相同的差分方程

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \varepsilon_j^{n+1}=r\varepsilon_{j+1}^n+(1-2r)\varepsilon_j^n+r\varepsilon_{j-1}^n, \\ \varepsilon_j^0 \text{ 给定。} \end{cases}$$

据此，可以给出一般的差分格式稳定性定义：

定义 1 如果对于给定的 $\varepsilon>0$，存在与 $\Delta t,\Delta x$ 无关的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使当

$$\sup_j|\varepsilon_j^0|<\delta$$

时，恒有

$$\sup_j|\varepsilon_j^n|<\varepsilon\quad (n=1,2,\cdots,[T/\Delta t]),$$

则差分格式就叫做(一致)稳定的。

这个定义意味着差分方程的解对初值关于 $\Delta t,\Delta x$ 的一致连续依赖性。

由于现在所讨论的差分格式是线性的，稳定性可有下述等价定义：

定义 2 若存在一个与 $\Delta t,\Delta x$ 无关的正常数 M，使对任何初始误差，总有

$$(2.2)\qquad \sup_j|\varepsilon_j^n|\leqslant M\sup_j|\varepsilon_j^0|\quad (n=1,2,\cdots,[T/\Delta t]),$$

则差分格式是(一致)稳定的。

下面证明两个定义的等价性。把定义 1 作为稳定性的基本定义，则(2.2)的充分性是显然的. 只须证明必要性。设对于按照定义 1 稳定的格式，(2.2) 不成立，那就有一串 $\Delta_m x, \Delta_m t$ 及相应的初始误差 $\varepsilon^{(m)}{}_j^0$，使得由此引起的传播误差 $\varepsilon^{(m)}{}_j^n$ 适合

$$\sup_j|\varepsilon^{(m)}{}_j^n| > m\sup_j|\varepsilon^{(m)}{}_j^0|. \tag{2.3}$$

今取初始误差为

$$w^{(m)}{}_j^0 = \varepsilon^{(m)}{}_j^0 / m\sup_j|\varepsilon^{(m)}{}_j^0|,$$

则由于差分格式是线性的，相应的传播误差为

$$w^{(m)}{}_j^n = \varepsilon^{(m)}{}_j^n / m\sup_j|\varepsilon^{(m)}{}_j^0|.$$

由(2.3)则有

$$\sup_j|w^{(m)}{}_j^n| > 1. \tag{2.4}$$

但

$$\sup_j|w^{(m)}{}_j^0| = \frac{1}{m},$$

故由定义 1，

$$\sup_j|w^{(m)}{}_j^n| \to 0 \quad (m \to \infty).$$

这和(2.4)式是矛盾的。从而证明了(2.2)的必要性。

依据这里的稳定性定义，每一层误差的大小，是以该层各点误差绝对值的上确界来衡量的。所以更确切些，应称为一致稳定性，以区别于以后要讨论的平均稳定性。

定理 1 若 $\Delta t/(\Delta x)^2 = r =$ 常数，则差分格式 (1.7)，(1.8)当 $r \leqslant 1/2$时是稳定的；当 $r > 1/2$时是不稳定的。

上述定理的证明与1.3中所进行的讨论大致相同，留给读者作为练习。