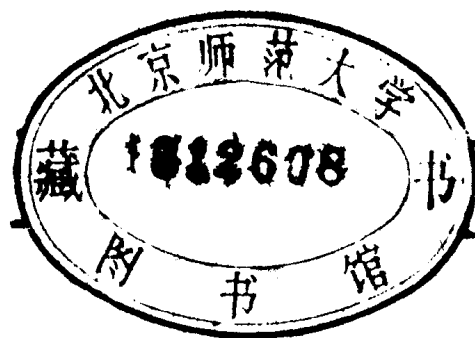


电 磁 场 理 论

吴万春 李缉熙 冯亚伯 赵玉书 编

101159/24



电子工业出版社

电 磁 场 理 论

吴万春 李缉熙 冯亚伯 赵玉书 编

责任编辑: 杨富强

*

电子工业出版社出版 (北京市万寿路)

新城县书刊印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 24 字数: 584千字

1985年5月第1版 1985年6月第1次印刷

印数: 6,300 定价: 5.50元

统一书号: 15290 · 190

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》。中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构。并制定了一九八二到一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共 217 种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者，各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系由电子工业部电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场理论教材编审小组评选审定，并推荐出版。

该教材由西北电讯工程学院吴万春担任主编，上海科技大学孟侃和西安交通大学傅君眉担任主审。编审者均依据电磁场理论编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅的。

本教材的参考教学时数为100学时。全书共十二章。第一至第四章分别系统地阐述了静电场、恒定电流场、静磁场和电磁感应的基本规律和性质。介绍这部分内容时，突出了矢量分析和应用。第五章介绍静态场的各种分析计算方法，包括镜像法、格林函数法、分离变量法、保角变换法以及有限差分法等。第六至第八章介绍时变电磁场的基本理论，系统阐述了无界均匀各向同性和各向异性（等离子体和铁氧体）媒质中电磁波的传播特性，以及电磁波在不同媒质（各向同性均匀）中传播规律。第九、十章介绍导行电磁波、谐振腔和电磁波辐射的基本原理与分析方法。最后两章分别介绍了运动系统的电磁场和带电粒子与电磁场的相互作用。每章末均附有适当数量的习题。

本教材适用于电磁场与微波技术专业。其它相近的电子类专业，也可适当取舍使用。

本教材是针对学过“普通物理学”和“工程数学”的学生编写的，要求学生在掌握基本概念和基本理论的同时，学会分析计算，以提高分析问题和解决问题的能力。

本教材由冯亚伯编写第一至第四章，吴万春编写第五章，李缉熙编写第六至第八章，赵玉书编写第九至第十二章，吴万春统编全稿。参加审阅工作的还有芦荣章、林坚等同志，他们为本书提出许多宝贵意见，这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免存在缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编 者

1984年4月于西北电讯工程学院

目 录

第一章 静电场..... 1	习 题.....74
1.1 库仑定律 1	第四章 电磁感应与磁能77
1.2 δ 函数..... 3	4.1 法拉第电磁感应定律77
1.3 电场强度 5	4.2 电感81
1.4 高斯定理 6	4.3 磁场能量84
1.5 静电场的旋度 电位 8	4.4 磁场力88
1.6 泊松方程和拉普拉斯方程11	习 题.....91
1.7 电偶极子12	第五章 静态场解法93
1.8 电位的多极展开15	5.1 场的方程与边界条件93
1.9 静电场中的导体19	5.2 唯一性定理96
1.10 多导体系统 电位系数 部分电容20	5.3 镜像法97
1.11 介质的极化25	5.4 格林函数法 108
1.12 介质中的场方程 介电常数27	5.5 分离变量法 114
1.13 边界条件30	5.6 保角变换法 128
1.14 静电场的能量32	5.7 有限差分法 136
1.15 电场力36	习 题..... 139
习 题.....38	第六章 时变电磁场 142
第二章 恒定电流场42	6.1 静态场方程在时变条件下的推广 ... 142
2.1 电流强度与电流密度42	6.2 麦克斯韦方程组与罗仑兹力公式 ... 144
2.2 电流连续性方程43	6.3 电磁能量 148
2.3 导体中的恒定电流场44	6.4 时谐电磁场 152
2.4 边界条件46	6.5 电磁场的波动方程 158
2.5 恒定电流场与静电场的比拟48	6.6 电磁场的位函数 161
2.6 焦耳定律50	6.7 麦克斯韦方程组的对称形式及其位函数 165
2.7 驰豫时间50	习 题..... 170
习 题.....51	第七章 电磁波在无界均匀媒质中的传播..... 173
第三章 静磁场53	7.1 无界理想介质中平面波的传播 173
3.1 安培定律53	7.2 电磁波的极化 181
3.2 磁感应强度 毕奥-沙伐定律54	7.3 无界导电媒质中的平面波 185
3.3 罗仑兹力56	7.4 无界等离子体中的平面波 185
3.4 磁通连续性原理 安培环路定律57	7.5 无界均匀铁氧体中的平面波 ... 185
3.5 磁矢位59	7.6 非单色波 群速 185
3.6 磁标位62	习 题..... 185
3.7 磁偶极子 磁矢位的多极展开63	第八章 电磁波在不同媒质中的传播..... 185
3.8 磁介质的磁化 磁化介质的场67	8.1 平面波在不同媒质界面处的反射和折射 185
3.9 磁介质中的场方程 磁导率71	
3.10 边界条件73	
3.11 静磁场与静电场的比拟74	

8.2	向导电媒质界面上垂直入射	219	10.6	罗伦兹互易定理	303
8.3	向理想介质界面上垂直入射	226	习 题		306
8.4	向理想导体界面上斜入射	231	第十一章 运动系统的电磁场		308
8.5	向理想介质界面上斜入射	236	11.1	伽里略变换和罗伦兹变换	308
8.6	向有损耗媒质界面上斜入射	243	11.2	速度、质量和力的变换	312
习 题		246	11.3	运动点电荷之间的作用力 和运动点电荷的场	317
第九章 导行电磁波		250	11.4	四维空间和四维矢量	322
9.1	导行电磁波的一般表示式 及波导中波的分类	250	11.5	电磁场的变换	328
9.2	导波系统中的TEM模	252	11.6	麦克斯韦方程组的四维形式	333
9.3	矩形波导中的TE模和TM模	254	习 题		335
9.4	矩形波导中的主模——TE ₁₀ 模	259	第十二章 带电粒子与电磁场的相互 作用		337
9.5	圆柱形波导	262	12.1	任意运动带电粒子的位	337
9.6	波导中的传输功率和衰减	265	12.2	运动带电粒子的电磁场	339
9.7	谐振腔	269	12.3	加速运动带电粒子的辐射	342
9.8	介质波导	275	12.4	带电粒子的电磁场对粒子本身 的反作用	347
习 题		282	12.5	电子对电磁波的散射和吸收	349
第十章 电磁波的辐射		285	习 题		353
10.1	非齐次波动方程的解——滞后位	285	附 录		355
10.2	电偶极子的辐射	298	习题答案		356
10.3	磁偶极子的辐射	293			
10.4	等效原理 口径的辐射	295			
10.5	线天线和天线阵概念	299			

第一章 静 电 场

静电场是指静止电荷（相对于观察者而言）所产生的场、静电场理论的基础是库仑定律。所以本章从库仑定律和迭加原理出发，运用矢量分析，得出真空中静电场的基本方程。在此基础上，再讨论静电场中的导体及导体系统；介质中的静电场；静电场的能量和电场力等。

静电场理论除其本身有着许多实际应用外，熟悉处理它的方法及所得出的结论，将有助于后续各章的学习。

1.1 库仑定律

描述真空中两个静止点电荷间相互作用力的定律，称为库仑定律，它是由实验结果概括得到的，可用矢量形式表示为

$$\mathbf{F}_q = \frac{q'q\mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = -\mathbf{F}_{q'} \quad (1.1-1)$$

式中， q 和 q' 是两个点电荷的电量，单位为库仑(C)； R 是 q' 与 q 间的距离，单位为米(m)，而 $\mathbf{a}_R$ 是从 q' 指向 q 的单位矢量； $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 是真空中介电常数； $\mathbf{F}_q$ 是 q' 对 q 的作用力， $\mathbf{F}_{q'}$ 是 q 对 q' 的作用力，两者满足牛顿第三定律。

为了应用方便，将 q' 和 q 的位置用图1.1-1所示的坐标表示之。于是式(1.1-1)可改写为

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = \frac{qq'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1-2)$$

其中 $\mathbf{r}'$ 是从原点到 q' 所在点 P' 的矢径（即点 P' 的位置矢）； $\mathbf{r}$ 是 q 所在点 P 的位置矢。以后均以 $\mathbf{r}$ （或 $\mathbf{r}'$ ）表示空间一点的位置，用 $f(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 分别表示 $\mathbf{r}$ 的标量函数和矢量函数。

因为 $\mathbf{F}_q$ 是 q' 作用于 q 的力， q' 是此力的源，故把点 $\mathbf{r}'$ 称为源点，而受力的 q 所在点 $\mathbf{r}$ 则称为观察点（或场点）。今后当需要区分这两类点时，用带撇号的坐标表示源点，用不带撇号的坐标表示场点。

如果空间同时存在两个以上的点电荷，实验证明，两点电荷间的作用力并不受其余点电荷的影响。所以点电荷 q 受到点电荷系的作用力是

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q'_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} \quad (1.1-3)$$

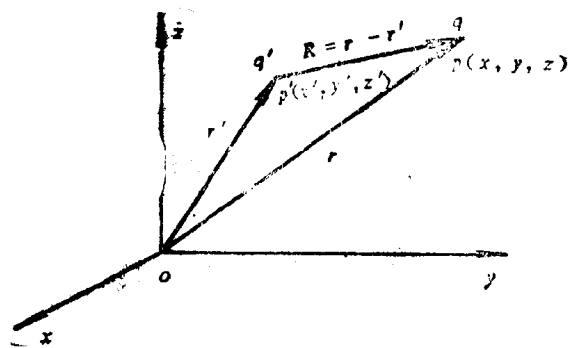


图1.1-1 点电荷的位置矢

这就是力的迭加原理。式中 q_i' 是位于 r_i' 上的电荷量。

库仑定律只能直接用于点电荷。所谓点电荷,是指当带电体的尺寸远小于它们彼此间的距离时,将电荷集中于一点而得出的数学模型。如果上述条件不满足,就不能把带电体当作点电荷,而应认为电荷连续分布于一定区域内,称为分布电荷。为了定量描述电荷的分布情况,需要引入电荷密度的概念。

在电荷分布的区域 V 内,取体积元 ΔV ,如果其中电量为 Δq ,则定义

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (1.1-4)$$

为体电荷密度,单位为库仑/米³(C/m³)。

如果电荷分布区域是厚度为 h 的薄层,且在宏观尺度下 h 很小,则可认为电荷分布在几何曲面上($h \rightarrow 0$)。如果在该曲面上取面积元 ΔS ,其上电量为 Δq ,则定义

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (1.1-5)$$

为面电荷密度,单位为库仑/米²(C/m²)。 Δq 实际上分布于体积元 $\Delta V = h\Delta S$ 内,即 $\Delta q = \rho h\Delta S$,因此面电荷密度是

$$\rho_s = \lim_{h \rightarrow 0} \rho h \quad (1.1-6)$$

显然,当把带电薄层看成面电荷时,其体电荷密度为无限大。

如果电荷分布在细长的区域中,且其横截面 S 很小时,可忽略其横向尺寸而认电荷分布在线上,称为线电荷。如果在线上取线元 Δl ,其中电量为 Δq ,则定义

$$\rho_l(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (1.1-7)$$

为线电荷密度,单位为库仑/米(C/m)。类似于点电荷,面电荷和线电荷都是在特殊情况下,将分布于一定体积中的电荷加以理想化而引入的概念。

现在利用上面引入的电荷密度来求分布电荷对点电荷的作用力。以体电荷为例,在电荷分布区域 V 中,点 $\mathbf{r}'$ 处的体积元 dV' 内的电荷为

$$dq' = \rho(\mathbf{r}') dV'$$

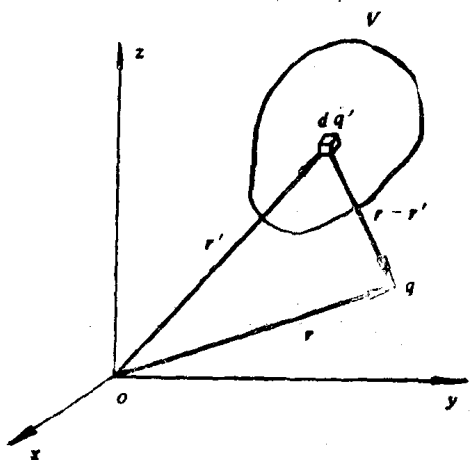


图1.1-2 体电荷中的电荷元

由图1.1-2可知, dq' 可看成点电荷,并可用式(1.1-2)求它对点电荷 q 的作用力。再由迭加原理,可得 V 中所有电荷对 q 的作用力为

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (1.1-8)$$

至于面电荷或线电荷对 q 的作用力,只需要将上式中的 $\rho(\mathbf{r}') dV'$ 分别换成 $\rho_s(\mathbf{r}') ds'$ 及 $\rho_l(\mathbf{r}') dl'$,并在电荷分布的面或线上进行积分即得。故可以将分布电荷对 q 的作用力统一表示为

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{电荷分布区域}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq' \quad (1.1-9)$$

其中

$$dq' = \begin{cases} \rho(\mathbf{r}') dV' & (\text{对于体电荷}) \\ \rho_s(\mathbf{r}') ds' & (\text{对于面电荷}) \\ \rho_l(\mathbf{r}') dl' & (\text{对于线电荷}) \end{cases} \quad (1.1-10)$$

1.2 δ 函数

对于点电荷，如果也象分布电荷那样，用电荷密度来描述它，就要用 δ 函数。 δ 函数亦称狄拉克函数，定义为

$$\left. \begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \\ &= 0 \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}') \\ \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV &= \begin{cases} 1 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 内}) \\ 0 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 外}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-1)$$

由此可知， $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 上为无限大。同时由上式不难得到

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}') & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 内}) \\ 0 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 外}) \end{cases} \quad (1.2-2)$$

这是因为，被积函数除 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 外，其余地方都是零，在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 上， $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}')$ 可提到积分号外，故有

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = f(\mathbf{r}') \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = f(\mathbf{r}')$$

这样，对 $\mathbf{r}'$ 处的点电荷 q ，就可用 δ 函数表示其密度为

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.2-3)$$

而在包含 $\mathbf{r}'$ 的任意体积 V 的总电荷是

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \int_V q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = q$$

同样可用

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i) \quad (1.2-4)$$

来描述 n 个点电荷的电荷分布，其中 $\mathbf{r}_i$ 是 q_i 的矢径。

δ 函数是很有用的数学工具。现证明

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.2-5)$$

因为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{-1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{3(x-x')^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{-1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{3(y-y')^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{-1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{3(z-z')^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}$$

将上式相加便有

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{-3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} = 0 \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}') \quad (1.2-6)$$

此外, 直接计算表明

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (1.2-7)$$

式中 ∇' 表示对带撇号坐标的运算。利用式(1.2-7), 可将式(1.2-6)改写成

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}') \quad (1.2-8)$$

有了上式, 由 δ 函数定义可知, 只要证明

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV = - \int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV = -4\pi$$

就证明了式(1.2-5)。其中 V 是包含 $\mathbf{r}'$ 的任意体积。由散度定理得

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV = \oint_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S}$$

为了方便, 取 V 为以 $\mathbf{r}'$ 为球心, a 为半径的球体, 这样, 面积分中的 $d\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ 平行, 且有 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=a$ 。因此

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV &= - \oint_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_S \frac{1}{a^2} dS \\ &= - \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = -4\pi \end{aligned}$$

这就是要证明的。

将上式和式(1.2-8)结合起来, 可以写为

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & (\mathbf{r}' \text{ 在 } S \text{ 内}) \\ 0 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } S \text{ 外}) \end{cases} \quad (1.2-9)$$

其中 S 是任意闭曲面。

: 4 :

1.3 电场强度

将某些离散的或连续分布的电荷对 q 的作用力，看成是这些电荷在其周围空间产生的电场对 q 的作用，即可引入电场这一概念。电场是一种特殊形态的物质。

我们用电场强度 E 来描述电场，并将场中点 r 处的电场强度 $E(r)$ ，定义为位于该点的单位正试探电荷所受的力。因此，在点 r 上点电荷 q 所受的力为

$$F_e(r) = qE(r) \quad (1.3-1)$$

E 的单位是牛顿/库仑 (N/C)。为了避免因试探电荷的引入而影响原来的场分布，必须令试探电荷的电量趋于零。

比较式 (1.1-2) 和 (1.3-1)，立即得到点 r' 上的点电荷 q' 、在点 r 上的电场强度是

$$E(r) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{r-r'}{|r-r'|^3} \quad (1.3-2)$$

同理， n 个点电荷及分布电荷的电场强度分别为

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q'_i \frac{r-r'_i}{|r-r'_i|^3} \quad (1.3-3)$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{电荷分布区域}} \frac{r-r'}{|r-r'|^3} dq' \quad (1.3-4)$$

式中 dq' 由式 (1.1-10) 给出。

在求分布电荷的电场强度时，积分是在电荷分布区域中对带撇号的坐标进行计算的，此时 r 当作常矢，所得结果是 r 的函数。下面举例说明之。

例. 求无限大带电平面所产生的电场。设面电荷密度为常数 ρ_s 。

解：取坐标系如图 1.3-1，使带电平面与 $z=0$ 平面相重合。由于电荷分布均匀， E 与 x, y 无关，故可将场点选在 z 轴上。由图可见，

$$\begin{aligned} r &= z a_z \\ r' &= x' a_x + y' a_y = r' \cos \theta' a_x \\ &\quad + r' \sin \theta' a_y \\ dS' &= r' dr' d\theta' \\ r - r' &= z a_z - r' \cos \theta' a_x \\ &\quad - r' \sin \theta' a_y \\ |r - r'| &= (r'^2 + z^2)^{1/2} \end{aligned}$$

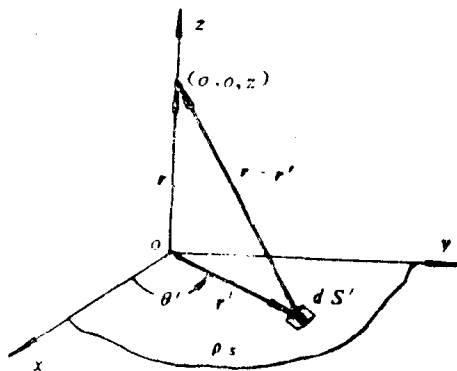


图 1.3-1 平面电荷的电场

将以上关系式代入式 (1.3-4)，得到

$$E(r) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{z a_z - r' \cos \theta' a_x - r' \sin \theta' a_y}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' d\theta' dr'$$

因为 $\cos \theta'$ 和 $\sin \theta'$ 在 $0 \sim 2\pi$ 区间内积分为零, 故上式中 $E(r)$ 只有 z 分量, 即

$$E(r) = \pm \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_z \quad (1.3-5a)$$

式中, $z > 0$, 取“+”号, $z < 0$, 取“-”号。也可以将上式改写为

$$E(r) = \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0 |z|} a_z \quad (1.3-5b)$$

为了形象地表示电场分布, 常引入电力线的概念。电力线上每点的切线方向与该点电场强度矢量的方向相同, 场中某点的电力线密度等于该点的电场强度值。在电力线的任一点上取一线元矢量 $d\mathbf{l}$, 由于它与该点 $\mathbf{E}$ 平行, 故有

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0 \quad (1.3-6)$$

因此, 在正交曲线坐标系中, 电力线方程为

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3} \quad (1.3-7)$$

式中, $q_i (i=1, 2, 3)$ 是曲线坐标, h_i 是拉梅系数, E_i 是电场分量。

静电场是个矢量场。根据矢量分析, 可以用矢量场的散度和旋度来表示场的特性。如果已知任一矢量场的散度和旋度, 则由亥姆霍兹定理*, 此场即可完全确定。所以下面我们从场矢量的散度和旋度入手来讨论静电场。

1.4 高斯定理

在讨论高斯定理之前, 先引入立体角的概念。

1.4.1 立体角

立体角是由过一点的射线, 旋转一周扫出的锥面所限定的空间。如果它是由过点 o' 的射线, 沿给定有向曲面 S 的边缘绕行一周所得, 则称之为 S 对点 o' 所张的立体角。立体角度量与平面角类似: 以其顶点 o' 为球心, 以 r 为半径作球面, 若立体角的锥面在球面上截下的面积为 S , 则此立体角的大小是

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (1.4-1)$$

视曲面 S 正方向与射线正方向的不同, 立体角可正可负。为了直接从任一有向曲面 S 计算其对点 o' 的立体角, 可先在 S 上的 r 处取一面积元 dS , 它对点 o' 所张的立体角为 $d\Omega$, 如图



图1.4-1 立体角元

1.4-1所示。再设从点 o' 到点 r 的矢径为 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, 如果角 $\langle d\mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle = \theta$ 为锐角, 则 dS 在 $\mathbf{R}$ 方向的分量 dS' 为正; 如果 θ 为钝角, 则 dS' 为负。因此, 按照立体角定义有

*参看M.Javid and P.M.Brown, "Field Analysis and Electromagnetics" Chapter 5, McGRAW-HILL, 1963.

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{R^2} = \frac{d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

故 S 对点 o' 所张的立体角是

$$\Omega = \int_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.4-2)$$

如果 S 是个封闭面（按惯例，其外侧为正侧），则有

$$\Omega = \oint_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

由式(1.2-9)得到

$$\Omega = \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & (\mathbf{r}' \text{ 在 } S \text{ 内}) \\ 0 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } S \text{ 外}) \end{cases} \quad (1.4-3)$$

即任意封闭曲面 S 对其中任一点所张的立体角为 4π ；对位于其外部的点所张的立体角为零。

1.4.2 高斯定理

为了证明高斯定理，先考虑点电荷的电场穿过任意封闭曲面 S 的通量。按矢量场通量的定义及式(1.3-2)和(1.4-3)，有

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \begin{cases} q/\epsilon_0 & (q \text{ 在 } S \text{ 内}) \\ 0 & (q \text{ 在 } S \text{ 外}) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4-4)$$

上式是单个点电荷的高斯定理。对于点电荷系或分布电荷，由迭加原理可得高斯定理为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.4-5)$$

式中， Q 为 S 中的净电荷。因此，高斯定理可陈述为：真空中穿出任意封闭曲面的电场强度通量，等于该封闭面内的净电荷量与 ϵ_0 之比。

如果 S 所包围的是密度为 ρ 的体电荷，则式(1.4-5)可写成

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.4-6)$$

其中 V 是 S 所包围的体积。利用散度定理，式(1.4-6)可化成

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

由于 V 是任意的，故上式成立时必有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4-7)$$

这是高斯定理的微分形式。由此可见，电场强度 $\mathbf{E}$ 在任一点的散度，等于该点的电荷密度与 ϵ_0 之比。它反映了静电场的一个重要特性：静电场是个有源场，电荷是场源。

高斯定理可直接用来计算某些对称分布电荷所产生的场强值。此时应能找出一个封闭曲面 S （高斯面），使 S 上处处 $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$ ，且 E 值相同；或 S 的一部分 S' 上满足上述条件，另一部分 S'' 上 $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$ 。因此有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES \text{ (或 } ES') = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

由上式即可求得 E 。

例，在半径为 a 的球体内，充满着电荷密度为 $\rho = \rho(r)$ 的体电荷，求球内外的场强 $\mathbf{E}$ 。

解：由电荷分布的对称性可知， $\mathbf{E} = a_r E_r(r)$ ，在半径为 r 的球面上 E_r 为常数。以此球面为高斯面，则有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E_r(r) = Q_i / \epsilon_0$$

式中

$$Q_i = \int_{V(r)} \rho(r') dV'$$

而 $V(r)$ 表示半径为 r 的球体积。

在求球外的场强时，显然 Q_i 是半径为 a 的球体中的总电荷 Q ，求球内（ $r < a$ ）的场强时，

$$\begin{aligned} Q_i &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \\ &= 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \end{aligned}$$

故有

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r \geq a) \\ \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' & (r \leq a) \end{cases} \quad (1.4-8)$$

1.5 静电场的旋度 电位

1.5.1 静电场的无旋性

注意到1.3节中，点电荷及分布电荷的场强表示式（1.3-2）~（1.3-4）内均含有因子

$(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3$, 利用式 (1.2-7), 可以将它们改写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{q'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \quad (1.5-1a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \quad (1.5-1b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \quad (1.5-1c)$$

在后面两个方程中, 因求和及积分是对带撇号坐标进行的, 故把算子 ∇ 移到求和及积分号之外。

式 (1.5-1) 表明, $\mathbf{E}$ 等于一标量位函数的负梯度。由于标量位函数梯度的旋度恒为零, 所以有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.5-2)$$

即静电场是无旋场 (保守场)。

1.5.2 电位

如上所述, 对标量位函数进行梯度运算可得到电场强度 $\mathbf{E}$ 。显然, 处理标量位函数比直接处理矢量场函数方便, 因此定义标量电位 φ 为

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (1.5-3)$$

φ 的单位为伏(V), 从而电场强度的单位为伏/米(V/m), 这是最常用的。

比较式 (1.5-1) 和式 (1.5-3) 可见, 点电荷 q' 在点 $\mathbf{r}$ 上产生的电位为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1.5-4)$$

而分布电荷的电位则是

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1.5-5)$$

式中 dq' 由式 (1.1-10) 确定, 积分在电荷分布的区域内进行。

其实, 由式 (1.5-1) 得到式 (1.5-4) 和 (1.5-5) 的过程中, 还应考虑积分常数问题。常数的梯度恒为零, 故在式 (1.5-4) 和 (1.5-5) 中附加一常数并不影响电场强度 $\mathbf{E}$ 。为简单计, 取此积分常数为零。

至此, 我们已可以由电荷分布求 φ , 再用式 (1.5-3) 求 $\mathbf{E}$ 。下面再导出 $\mathbf{E}$ 和 φ 间另一个有用的关系式: 由 $\mathbf{E}$ 求 φ 。

考虑 $\mathbf{E}$ 沿某一路径从点 $\mathbf{r}_1$ 到点 $\mathbf{r}_2$ 的线积分

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}$$

但因

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi$$

所以

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{r_1}^{r_2} d\varphi = - [\varphi(r_2) - \varphi(r_1)] \quad (1.5-6)$$

由此可见, $\mathbf{E}$ 在两点间的线积分与路径无关, 只取决于起点和终点的电位, 这是静电场为保守场的另一种表达形式。通常把此线积分称为点 r_1 与点 r_2 间的电位差或电压 U_{12} , 即

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) \quad (1.5-7)$$

显然, U_{12} 与确定 φ 时可能出现的常数无关。如果选定某点 r_0 的电位为零 (点 r_0 称为参考点), 则点 r 与参考点间的电位差, 即为点 r 处的电位

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5-8)$$

当电荷分布在有限区域中时, 选无限远处为参考点较为方便, 此时

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5-9)$$

若将点电荷的电场强度公式 (1.3-2) 代入上式, 便得到式 (1.5-4); 利用迭加原理, 可得到式 (1.5-5)。所以该两式表示参考点选在无限远时的电位。在该两式中附加不同的常数, 只表明选用了不同的参考点。

如果式 (1.5-6) 的积分是沿闭合路径进行的, 则有

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.5-10)$$

应用斯托克斯定理, 由上式可得到式 (1.5-2)。事实上, 它们和式 (1.5-3) 都是静电场为无旋场 (保守场或位场) 的等效描述。

式 (1.5-6) 所表明的物理意义是: 将试探电荷 q 从点 r_1 移到点 r_2 时, 电场力所做的功

$$A = q \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q [\varphi(r_1) - \varphi(r_2)]$$

与路径无关 (或电场力沿闭合路径所做的功为零)。场力做功是以能量消耗为代价的, 这种能量称为电荷 q 在静电场中的电位能。场力所做的功只能度量电位能之差。但如以点 r_0 为电位及电位能的参考点, 则 q 在点 r 处的电位能为

$$W_*(r) = q \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q\varphi(r) \quad (1.5-11)$$

电位能的单位为焦耳 (J)。上式表明, 电位能等于 q 从点 r 移至点 r_0 时电场力所做的功, 也等于 q 从点 r_0 移至点 r 时外力 $-q\mathbf{E}$ 所做的功。这样, $\varphi(r) = W_*(r)/q$ 就等于单位正点电荷在点 r 处的电位能。

静电场中 $\varphi(r) = \text{常数}$ 的曲面称为等位面。因为任何标量位的梯度恒垂直于其等位面, 且指向标量位的变化率最大的方向, 所以, 从 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 可知, 电力线垂直于等位面, 且