高等数学导论
学习辅导

GDSX

XUEXIFUDAO

中国科学技术大学
高等数学教研室编

中国科学技术大学出版社

高等数学导论
学习辅导

中国科学技术大学高等数学教研室 编

中国科学技术大学出版社

1994 · 合肥

（皖）新登字08号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学导论学习辅导/中国科学技术大学高等数学教研室 编．—合肥：中国科学技术大学出版社，1994年9月
ISBN 7-312-00531-4

Ⅰ 高等数学……
Ⅱ 中国科学……
Ⅲ ① 高等数学 ② 辅导 ③ 大学教学
Ⅳ O

中国科学技术大学出版社出版发行
（安徽省合肥市金寨路96号，230026）
安徽省金寨县印刷厂印刷
全国新华书店经销
*
开本：850×1168/32 印张：17.375 字数：450千
1994年9月第1版 1994年9月第1次印刷
印数 1—8000册
ISBN7-312-00531-4/O·137 定价：8.75元

内 容 简 介

本书是和中国科学技术大学出版社出版的《高等数学导论》相匹配的学习辅导书. 基本上按照《高等数学导论》的体例，逐节对应编写. 每节包括学习要点、解题方法和例题分析三部分，指出学习的重点和难点、基本概念与运算技巧，既有富于启发性的典型例题，又有难度较大的各种综合及应用例题. 是编者几十年来在中国科学技术大学从事高等数学教学、辅导工作的经验总结.

本书可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的学生、各种科技人员、函授学员及自学青年学习高等数学的辅导书，以及高等数学习题课的参考书，也可作为报考非数学专业硕士研究生的考生迎考的复习指南.

前　言

《高等数学导论》自1988年由中国科学技术大学出版社出版以来，不断有读者提出，希望对习题中较难的题目给予解答，这就是我们编写本书的出发点．因此，本书是《高等数学导论》（第二版）的配套辅导书，并基本上按照《导论》的章节逐一对应编写，指出每节的学习要点、重点和难点，以及有关基本概念和运算技巧，不仅有大量的问题解答及富于启发性的典型例题分析，而且还有一题多解的灵活性例题．

本书偏重于数学分析，题目论证严谨，着重于思路分析及应用，有的还从正反两方面进行论证，还有对错例的剖析．我们竭诚希望本书的出版对提高读者解题技巧、逻辑推理及解决实际问题的能力有一定的帮助．

同时，为了不影响读者的独立思考，对《导论》每章配置的习题、复习思考题及总复习题，绝大部分仍留给读者去完成．

参加本书编写的人员是：杨孝先（第四、八、十二章）、朱国诚（第五、十一章）、薛春华（第一、七章）、陈秋桂（第二、九、十章）、殷保群（第三、六章）．

由于我们的水平有限，本书可能有不少问题和错误，诚恳地希望得到读者的指正．

编　者

1994年1月于合肥

目　次

第一章　函数的极限

极限理论是高等数学的基础。本章从数列极限开始，然后引进函数的极限，由此自然地介绍函数的连续性。本章的解题方法也是学习高等数学的方法的基础。

第一节　数 列 极 限

学习要点

1．数列 $\{a_n\}$ 收敛的概念

设有数列 $\{a_n\}$ 及定数 a，若对任意给定的正数 ε，总存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，或称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限。记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a(n\to\infty)$。

2．收敛数列的重要性质

(1) 收敛数列有唯一的极限；

(2) 收敛的数列一定有界；

(3) 设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 收敛，则有：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$；

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)$；

(c) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$；

(d) 若 $a_n \leqslant b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

3．判别数列收敛的方法

(1) 利用数列收敛的定义；

(2) 夹逼定理：

设 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$；

(3) 单调有界数列一定收敛；

(4) 柯西(Cauchy)收敛准则：

数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$$

对一切自然数 p 成立。 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

解题方法

利用上面列举的定义以及各种性质、判别方法，证明数列收敛，并求出数列的极限。列举如下：

1．利用定义证明数列收敛

这就是所谓的“ε-N”方法。首先对任意给定的正数 ε(用“对 $\forall\ \varepsilon>0$”表示)，找出与 ε 有关的自然数 N，证明当 $n>N$ 时；$|a_n-a|<\varepsilon$ 确实成立。N 的找出，是依据不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 中 n 与 ε 的关系，解这个不等式有时是很麻烦的，为了解决这个困难，可以先将$|a_n-a|$放大成一个简单的含 n 的式子 $f(n)$（通常不含绝对值），使 $|a_n-a|<f(n)$，再令 $f(n)<\varepsilon$，由此解出所需的自然数 $N=N(\varepsilon)$。

2．利用已知的一些数列的极限，如$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 等，和极限的运算性质、夹逼定理来求出新的数列的极限

3．用定理“单调有界数列必收敛”判断数列的敛散性，并

求出极限

问题的关键在于：(1) 证明数列单调增(或减)；(2) 找出它的上(或下)界。方法有用前后项的差或商或用归纳法。

4. 利用数列的 Cauchy 收敛准则来判断数列的敛散性

Cauchy 准则 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 对任何自然数 p 都成立。

例题分析

1. 用“ε-N”方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$。

解题思路 先将 $\left|a_n-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{n}{5+3n}-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{5}{9n+15}$，去掉绝对值号。然后简化该式，放大成 $\dfrac{5}{9n+15}<\dfrac{5}{5n}=\dfrac{1}{n}$。当 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 时，$\left|a_n-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$ 成立。N 从简单不等式 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 中解出即可。

书写格式 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|=\frac{5}{9n+15}<\frac{5}{5n}=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

由极限的定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$。

从上述可以看到，上面的式子是找 N 的根据，我们称之为主线。对 $\forall\varepsilon>0$，N 就是从主线中找出的，而主线就是将 $|a_n-a|$ 适当地放大，使之成为含 n 的简单的式子，从而轻易地找出 N 与 ε 的关系。

注 (1) $|a_n-a|$ 可以放大，是因为对 $\forall\varepsilon>0$，只要找到 N，N 不是唯一的这一本质决定的。

(2) $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 是对 $\forall\varepsilon>0$ 都适用，主要是当 $\varepsilon>1$ 时，$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=0$，$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1=1$ 仍是自然数。所以一般也写作取自然数 $N>f(\varepsilon)$，使 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$。

(3) 以下解题时就不再象上述例题这样叙述，而是直截了当地用解题格式了。

2．用"ε-N"方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+8n}{2n^2+3n-4}=\frac{1}{2}$。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+1\right\}$，当 $n>N$时，有

$$\left|\frac{n^2+8n}{2n^2+3n-4}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{13n+4}{4n^2+6n-8}\right|$$

$$<\frac{16n}{4n^2}<\frac{4}{n}<\frac{4}{N}<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+8n}{2n^2+3n-4}=\frac{1}{2}$。

3．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，取 N 为大于 $\frac{1}{\varepsilon}$的自然数，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

成立，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。

4．求证 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}=1$。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，取 N 为大于 $\lg\frac{1}{\varepsilon}$ 的自然数，当 $n>N$ 时，

$$|0.99\cdots9-1|=\underbrace{0.00\cdots01}_{n\text{个}}=10^{-n}<10^{-N}<10^{-\lg\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon,$$

由此得 $\lim\limits_{n\to\infty} 0.99\cdots9 = 1$。

5. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arc\,tg} n = \frac{\pi}{2}$。

证 对 $\forall\varepsilon>0$，取自然数 $N>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$，当 $n>N$ 时，

$$\operatorname{arc\,tg} n>\operatorname{arc\,tg} N>\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]=\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

而

$$\left|\operatorname{arc\,tg} n-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} n<\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\varepsilon,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arc\,tg} n=\frac{\pi}{2}$ 得证。

6. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$，$a$ 为任意实常数。

证 a 是实常数，存在自然数 K，使 $|a|\leqslant K$。因而 $\frac{|a|}{K+1}<1$，$\frac{|a|}{K+2}<1$，…。

对 $\forall\varepsilon>0$，取自然数 $N=\max\left\{K,\left[\frac{|a|^{K+1}}{\varepsilon}\right]+1\right\}$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|}{1}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{K}\cdot\frac{|a|}{K+1}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n-1}\cdot\frac{|a|}{n}$$
$$\leqslant\frac{|a|^{K+1}}{n}<\frac{|a|^{K+1}}{N}<\varepsilon$$

成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$。

以上是对一个数列直接引用"ε-N"的方法。下面要介绍利用一个数列的极限去求出另一个与之有关的数列的极限。对任给的 $\varepsilon>0$，由已知收敛的级数所存在的"N"来寻找所要求的另一数列的"N"。

7. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin a$。

证 由于

$$|\sin a_n-\sin a|=2\left|\cos\frac{a_n+a}{2}\sin\frac{a_n-a}{2}\right|$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{a_n-a}{2}\right|\leqslant 2\cdot\frac{|a_n-a|}{2}=|a_n-a|,$$

要使$|\sin a_n-\sin a|<\varepsilon$，只要 $|a_n-a|<\varepsilon$。

于是有对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，因此存在自然数 N，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$，即

$$|\sin a_n-\sin a|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin a$ 得证。

8. 证明：数列$\{a_n\}$收敛于 a 的充分必要条件是它的奇数项及偶数项收敛于同一数 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Longleftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$及$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$。

证($\Longrightarrow$) 对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故存在自然数 N，当 $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$。于是取 $K=\left[\frac{N}{2}\right]+1$，当 $k>K$ 时，$2k>N$，$2k+1>N$，此时

$$|a_{2k+1}-a|<\varepsilon,\ |a_{2k}-a|<\varepsilon$$

同时成立，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$。

($\Longleftarrow$) 对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$，所以存在自然数$K_1$，当 $k>K_1$时，$|a_{2k+1}-a|<\varepsilon$。同理，因为 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$，存在自然数 K_2，当 $k>K_2$ 时，$|a_{2k}-a|<\varepsilon$。

取 $N=\max\{2K_1+1,2K_2\}$，当 $n>N$ 时，若 $n=2k+1$，$k>K_1$，若 $n=2k$，则 $k>K_2$，于是总满足

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

9．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$。但反之不一定成立，试举例说明之。但若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。试证之。

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < \varepsilon$，但 $||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$，所以有 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$。

反例：$a_n = (-1)^{n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在。

又因为 $|a_n - 0| = |a_n| = ||a_n| - 0|$，所以当 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 时，一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

10．从数列 $\{a_n\}$ 中任意挑出无限多项，按照原来序号的大小排成一个数列：

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为原数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列。

试证明：若 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则任一子数列 $\{a_{n_k}\}$ 也必收敛于 a；若 $\{a_n\}$ 有一个子数列发散，则 $\{a_n\}$ 必发散。又若 $\{a_n\}$ 有某个子数列收敛，则 $\{a_n\}$ 不一定收敛，试举例说明。

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

对 $\forall \varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < \varepsilon$。因为子数列 $\{a_{n_k}\}$ 有无穷多项，且 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$。故存在自然数 K，当 $k > K$ 时，$n_k > N$，因此 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$。亦即 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$。

若 $\{a_n\}$ 的一个子数列 $\{a_{n_k}\}$ 发散，而 $\{a_n\}$ 收敛，就与上述结论矛盾，因此必有 $\{a_n\}$ 发散。

反例：数列 $\{a_n = (-1)^{n-1}\}$ 是发散的，但它有收敛的子数列 $\{a_{2k-1} = 1\}$。

11．$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r < 1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

证 先取一定数 $\varepsilon_1>0$，使 $r+\varepsilon_1<1$，于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}(r+\varepsilon_1)^n=0$。

对 $\forall\varepsilon>0$，存在自然数 N_1，当 $n>N_1$ 时，$(r+\varepsilon_1)^n<\varepsilon$。

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$，故存在自然数 N_2，当 $n>N_2$ 时，$|\sqrt[n]{|a_n|}-r|<\varepsilon_1$，即

$$r-\varepsilon_1<\sqrt[n]{|a_n|}<r+\varepsilon_1.$$

立即得出

$$0<|a_n|<(r+\varepsilon_1)^n.$$

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，当 $n>N$ 时

$$|a_n-0|=|a_n|<(r+\varepsilon_1)^n<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

12．设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=1$。

证 要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=1$，只要对 $\forall\varepsilon>0$，找到自然数 N，使当 $n>N$ 时，$|e^{a_n}-1|<\varepsilon$。即

$$1-\varepsilon<e^{a_n}<1+\varepsilon.$$

不妨设 $0<\varepsilon<1$（否则对 $\forall\varepsilon>0$。取 $\varepsilon_1>0$，使 $\varepsilon_1<1$，且 $\varepsilon_1<\varepsilon$，当 $|e^{a_n}-1|<\varepsilon_1$ 时，自然有 $|e^{a_n}-1|<\varepsilon$），于是只要

$$\ln(1-\varepsilon)<a_n<\ln(1+\varepsilon). \tag{*}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故对 $\delta=\min\{|\ln(1-\varepsilon)|, \ln(1+\varepsilon)\}$，$\exists$自然数 N，当 $n>N$ 时，$|a_n|<\delta$，$-\delta<a_n<\delta$ 就满足上述不等式(*)。反推上去就有 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=1$。

注 （1）本题顺序叙述如下：

对 $\forall 0<\varepsilon<1$，取 $\delta=\min\{-\ln(1-\varepsilon), \ln(1+\varepsilon)\}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$得，$\exists$自然数$N$，当$n>N$时，$|a_n|<\delta=\min\{-\ln(1-\varepsilon), \ln(1+\varepsilon)\}$。即

$$\ln(1-\varepsilon)\leqslant-\delta<a_n<\delta\leqslant\ln(1+\varepsilon),$$

于是

$$1-\varepsilon<e^{\alpha_n}<1+\varepsilon,$$

即

$$|e^{\alpha_n}-1|<\varepsilon.$$

（2）由此题立即得出，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=e^a$.

13．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$，其中 k 为正整数.

证 由于 $a>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，根据收敛数列的性质，∃自然数 N_1，当 $n>N_1$ 时，$a_n>0$. 从而

$$\sqrt[k]{a_n^{k-1}}+\sqrt[k]{a_n^{k-2}a}+\cdots+\sqrt[k]{a_na^{k-2}}+\sqrt[k]{a^{k-1}}>\sqrt[k]{a^{k-1}}>0.$$

对 $\forall\varepsilon>0$，存在自然数 N_2，当 $n>N_2$ 时，$|a_n-a|<\sqrt[k]{a^{k-1}}\varepsilon$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，

$$\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt[k]{a_n^{k-1}}+\sqrt[k]{a_n^{k-2}a}+\cdots+\sqrt[k]{a_na^{k-2}}+\sqrt[k]{a^{k-1}}}$$

$$<\frac{\sqrt[k]{a^{k-1}}\,\varepsilon}{\sqrt[k]{a^{k-1}}}=\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$ 得证.

下面证明的一个例题的结论对许多极限题都有指导作用，其证明方法也是常用的，必须掌握.

14．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

证 对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故 ∃ N_1，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 固定 N_1，记 $M=|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$ 为定数. 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{n}=0$，于是 ∃$N_2$，当 $n>N_2$ 时，$\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有