物理中的数学

E. 鲁滨 主编

科学出版社

物理中的数学

E. 鲁滨 主编
何育赞 等译
田方增
吴新谋 校

科学出版社
1981

内 容 简 介

本书是联合国教科文组织为了满足物理的科研和教学对于现代数学的需要组织了七个国家的数学家编写而成的．本书介绍了理论物理中用到的现代数学各个分支的概念和方法，取材范围广泛，叙述简明扼要．内容包括复变函数、分布论、外微分形式、常微分方程、偏微分方程、积分方程、数值逼近、最优化、概率论和量子力学．

读者对象为高等学校物理系教师和研究生以及有关方面的研究人员．

É. Roubine (Editor)

MATHEMATICS APPLIED TO PHYSICS

Springer-Verlag, 1970

物理中的数学

É. 鲁 滨 主编

何育赞 等译

田方增
吴新谋 校

责任编辑 刘嘉善

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年7月第一版 开本：850×1168 1/32

1981年7月第一次印刷 印张：19 3/4

印数：0001—12,720 字数：518,000

统一书号：13031·1579

本社书号：2170·13—1

定价： 3.60 元

序

无疑,当代科学教学的改进是需要由所有的国家、在所有的分支学科中而且在所有的水平上施行的基本任务. 因而联合国教科文组织依照它的使命正在采取行动，在所选择的特殊重要的分支中(例如,有些分支可能期望在一个固定的工作周期后会有显著变化；有些分支，国际的行动比一国的努力可能更会产生满意的结果)提供帮助,并建议所要遵循的方向.

为了理解这个问题，联合国教科文组织首先与联盟际科学教学委员会协作并且安排了1964年在达喀尔举行的关于科学教学及经济发展的大会. 大会成员仔细检查了不同科学之间的关系，而且同意作为一项优先的措施推荐为了满足物理学者需要的数学教学的大学教学大纲的准备计划. 现代数学本应成为物理学者的一个特别有用的工具，但是来自各种困难的障碍直至今日还阻止着大量的物理学者从这些新的可能性中得到帮助.

国际数学教学委员会和国际物理教学委员会(国际纯粹及应用物理学联盟)帮助联合国教科文组织选择一个协调者,他是一个数学家同时又是物理学家和与大学水平上这两学科的教学有关问题方面的专家: 结果选定了巴黎理学院教授 Élie Roubine 先生. 联合国教科文组织希望而且能够号召世界各个部分的专家，而这本书的十章就在七个不同的国家中写成了. 我们选择出这些作者,是考虑到他们对这项计划的热忱,他们的个人声望和他们所代表的学派的生命力与重要性.

这项著作的目的、它的筹办、它的标准和要求的总的统一性,逐步地落实下来了,这是艰巨努力的结果. 协调者安排了一些讨论、会议及不同作者间观点的交换. 考虑到它的课题,涉及两个最发达的科学,有巨大的范围,本书是相当简洁的. 它的意图是面对

第三轮的学生，就是在数学及物理学方面已有好的基础的大学生。因而它可以为物理学教授们使用，用来刷新或增加他们的知识，使他们的教学现代化或有助于他们的研究工作。

联合国教科文组织把本书列在它的丛书《基本科学的教学》中出版，这丛书已收进了1968年发表的“A Survey of the Teaching of Physics at Universities”，1968年发行的“New Trends in Physics Teaching” vol 1 和数学、化学及生物学的类似出版物。

联合国教科文组织愿向对本书起过积极作用的三个国际委员会、协调者及作者们表示感谢. 在这里应提一下，各个不同的作品仅反映它们的作者的个人观点。

前 言

由我来介绍《物理中的数学》一书，我感到十分荣幸. 我的第一个愉快的任务就是感谢曾经帮助把这个企图引到成功的结果的那些人.

所谈到的这个工作的基本特征在于，它是国际合作的产物. 物理学者需要跟上数学的发展，甚至也要跟上那些还没有直接应用的数学部门的发展. 可是数学家不会自发地撰写一些著作来满足这个愿望：这问题与大学里跨学科的教学有密切联系. 联合国教科文组织已经鼓舞了解决这个问题的意愿，这正是这个组织的功劳.

要决定数学的什么门类对物理学者和工程师最“有用”，是困难的. 一个数学分支的有用程度，不同时期有所不同，有时还按时尚而变化. 例如，二十年前符号运算和松弛法风行一时；今天流行的时尚是布尔代数、图论或组合数学.

众所周知，某些数学理论起源于物理学和技术. 例如，调和分析、谱理论、偏微分方程和信息论. 而在另一些情况，则是物理学采用而且普及了一些已有的数学理论，这些理论在首次出现之后相当长时期才证明是有用的，例如矩阵、张量、旋量等等. 今天，化学正使用代数拓扑；编码技术正使用伽罗华域.

上述几点注记解释了设想出这个著作的路线和它的相当经典的面貌. 对于它要面对的读者来说，各章标题有一个习见的格调，可是它的内容不是学校教科书的内容，更不是通俗读物的内容. 题材范围很宽，因而需要比较简练的风格. 这部著作事实上在许多论点上都代表了最新情况的叙述.

本书以属于纯分析的三章开始，其目的在于向物理学者及工程师描述（或使之了解）使用它的方法.

第一章提出复变函数理论的基本内容．二十年前，这是在大学数学教学的枢轴，而它在今天仍有重要应用．因此，我想这个经典课题的一章不会是多余的．Bochum 大学数学研究所 F. Sommer 教授已为使用者写出这个理论的一个很好的总结，它没有失掉什么有效用的东西．

下面两章的用意是另一样的．它们涉及两个方法，其中一个虽然是由来已久的，但看来未曾得到物理学者应有的注意．

分布理论，二十年前就由 Laurent Schwartz 给它或多或少确定的形式，现在已经提供了一个富有成果的通向现代泛函分析的途径．不幸，看来多数物理学者和工程师都没有受到过专门训练，还不能系统地把它应用于处理不连续性、导数或收敛性，而这些正是它能起突出作用的领域．这里卷积所起的中心作用在于它是所有线性物理学表述的基础，其中主要的工具是傅里叶变换，它的效果由于有了分布理论而大大增加．阿姆斯特丹大学 E. M. de Jager 教授揭示出这个理论的一些重要方面．

依利诺斯大学 G. A. Deschamps 教授曾经研究外运算并且强调过它有可能有多种多样应用． 这里我们握有非常优美的表达方式，而依传统的方式陈述 Stokes 定理应是不再容许的了．力学工程师、光学专家、关心相对论的物理学者及电子学专家将能很好地利用它．

本书一半以上是用于微分方程、偏微分方程、积分方程、数值分析和最优化． 这几部分的作者都是在各自的特殊领域内，对这些科目做出过决定性的贡献的．

微分方程一章是苏联科学院院士 A. N. Tihonov 教授、莫斯科大学 A. B. Vasiléva 教授和 V. M. Volosov 教授写的．这个科目是苏联学派赢得声誉的许多科目之一． 对于固有值问题、稳定性问题或非线性振荡理论只需要提一下以指出让使用者满意的前景展望．

纽约柯朗研究所 F. John 教授是偏微分方程理论卓越的专家．他负责处理这个科目和积分方程的章节．这些科目一直有其

根本重要性．读者在这里将看到这个科目的一个优异的阐述．

数值分析是上述方法的自然而本质的补充．采用了计算机，它取得了新的形式．巴黎大学 J. L. Lions 教授用一优美方式处理这个科目并且授与它一个活动范围，它可能使得期待着少量常用程序的读者感到困难．

诸变分方法一直是极有用的工具．它们在下一章中讨论．苏联科学院通讯院士 N. Moisseev 教授及莫斯科大学 V. Tikhomirov 教授(他们写关于规划及最优控制的部分)说明了现在流行的课题——最优化．

下面两章用于更加特殊的分支．牛津 Merton 学院 D. J. A. Welsh 博士处理概率，并且特别处理在许多应用中常遇到的过程：Markov 过程、更新过程、分支过程和扩散过程，当然，也讨论了基本的调和分析，关于它在估计及预测方面的应用作了几点说明．作者引入了信息论作为结束．

最后，东京大学 T. Yamanouchi 教授发表了这位量子物理专家的观点．用群论和谱理论表示的这个优美的数学形式，其实用上的重要性是令人惊叹不已的．而且这一理论之所以有可观的发展，正是由于物理学者对它有兴趣．

在某些内容的定稿和翻译工作中，出现了某些问题．全国科学研究中心的工程师 Nissen 先生及巴黎理学院助理主任 (Maître-Assistant) Lemaire 先生曾提供有价值的帮助，而我愿特别感谢东京 Meisei 大学教授 Sékiné，当他作为副教授在巴黎大学期间，在起草最后一章中，他给予了合作．

如此产生的书已经卓越的专家写出了．可是它不单纯是个别的贡献所成的集合；它是真正有组织的工作的结果．参加合作的作者们曾经会面，一起征询意见并讨论每一章的内容．他们应得到很大的尊敬；至于说到我，与他们在一起工作既很荣幸又很愉快．最后我要感谢联合国教科文组织秘书处，他们最好的顾问，他们的熟练的指引使重大的看不到的障碍避免了，困难克服了．

É. 鲁 滨

目　　录

1. 复变函数

F. Sommer[1)]

§1. 预　　篇

1.1　全纯函数. Cauchy 积分定理

这里我们将概述复变函数论在物理问题中的应用所依据的某些基本事实.

令 C 表复数域 $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. 其元素 z 与一平面上的点 (x, y) 一一对应起来，这个平面称为复平面. 在复平面上加进无穷远点（或理想点）∞，对于复变函数问题是方便的，于是得到紧致平面 $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. $\bar{\mathbf{C}}$ 同胚于球面 S^2.

令 $G \subset \mathbf{C}$ 为一域，且令 $f: G \to \mathbf{C}$ 为定义于 G 的复值函数. 若复导数 $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (f(z + \Delta z) - f(z))/\Delta z$ 对每一点 $z \in G$ 皆存在，则称函数 f 在 G 内全纯. 我们将 f 写成它的实部和虚部之和 $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$. 现在 f 是全纯的，当且仅当 ϕ_x, ϕ_y, ψ_x 和 ψ_y 在 G 内存在、连续且满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\phi_x = \psi_y, \quad \phi_y = -\psi_x, \tag{1.1}$$

此时我们有

$$\begin{aligned} f'(z) &= \phi_x(x, y) + i\psi_x(x, y) \\ &= \frac{1}{i}(\phi_y(x, y) + i\psi_y(x, y)). \end{aligned} \tag{1.2}$$

除 Cauchy-Riemann 方程之外，复变函数论的另一基本结果是

Cauchy 积分定理　若 f 是单连通域 G 内的全纯函数，则沿

---

1) 与 Bochum 大学数学研究所 H. J. Reiffen 合作.

G 内从 z_1 至 z_2 的途径 C 上的积分 $\int_C f(z)\,dz$ 与途径 C 的选择无关.

只须假设 C 是紧致的且分段光滑,即 C 有一参数表示式:

$$z(t)=u(t)+iv(t),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$
$$z_1=z(t_1),\quad z_2=z(t_2),$$

其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在区域 $[t_1, t_2]$ 上连续且分段连续可微. 于是积分可写成 Riemann 积分

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &=\int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt\\ &=\int_{t_1}^{t_2}\left[\phi(u(t), v(t))\frac{du}{dt}-\phi(u(t), v(t))\frac{dv}{dt}\right]dt\\ &\quad+i\int_{t_1}^{t_2}\left[\phi(u(t), v(t))\frac{du}{dt}+\phi(u(t), v(t))\frac{dv}{dt}\right]dt.\end{aligned}$$

我们证明下面的等价命题,就可验证 Cauchy 积分定理:

命 C 为单连通域 G 内之闭途径,且令 f 为 G 内的全纯函数,则 $\int_C f(z)dz=0$.

由此,对于任意域可得下列结果:

a) 令 f 为域 G 内的全纯函数,且令 C_1 和 C_2 为 G 内从 z_1 至 z_2 的两途径,彼此能连续形变而保其端点固定,则有

$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz.$$

b) 给定 G 内两闭途径 C_1 与 C_2, 它们能互相形变且保持定向,则 $\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz$.

c) 令 C 为 G 内一闭途径, 它能连续形变为一点 $z_0\in G$, 则 $\int_C f(z)dz=0$.

注 在情形 a) 和 b), 途径 C_1 和 C_2 称为同伦,在情形 c), 途径 C 称为同伦于零. 于是积分只依赖于同伦类, 即依赖于有等价关系 (C_1 同伦于 C_2) 的类.

对于不一定是单连通域的情形,我们有如下的结果:

令域G之边界为有限多个简单闭途径 C_ν, $\nu=0,1,\cdots,n$, 所组成．并设 $C_1\cdots, C_n$ 包含在 C_0的内部．又令 f 在G内全纯而且在 $G\ \cup\bigcup\limits_{\nu=0}^{n} C_\nu$ 上连续．则有

$$\int_{C_0} f(z)\,dz=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{C_\nu} f(z)dz\,, \tag{1.3}$$

其中 C_ν, $\nu=0,1,\cdots n$ 为正定向.

这一定理的证明的办法是,分割G为有限多个单连通域(参看图 1)，用 Cauchy 积分定理和一个近似手续对这些单连通域证明

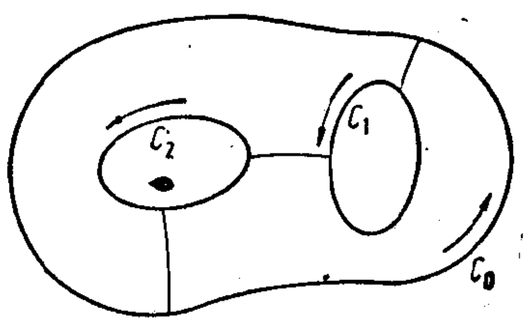

图 1

这一论断.

注 定向途径 C_0, $-C_1$, $\cdots$, $-C_n$ 在代数拓扑的意义下组成G的正定向边界 ∂G:

$$\partial G=C_0+\sum_{\nu=1}^{n}(-C_\nu).$$

于是上述结果的另一叙述是: 令 f 为G内的全纯函数而且在 $G\cup\partial G$ 上连续,则 $\int_{\partial G} f(z)dz=0$.

一个定向途径,可能是由若干不相交的途径所组成的,若它成为一域的定向边界,则称它是同调于零.若两定向途径 C_1和 C_2是同调的,即若 C_1-C_2 同调于零,又设 f 在G内全纯且于 $G\cup(C_1-C_2)$ 上连续,则有 $\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz$, 其中$G$是以 C_1-C_2 为边界的域.

由 Cauchy 积分定理得到

Cauchy 积分公式 令 G 为一单连通域，C 为 G 内一正定向简单闭途径，C 为域 $G_0 \subset G$ 之边界. 又设 f 为 G 内之全纯函数，则对每一 $z \notin G$，积分 $\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ 存在，并且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{当 } z \in G_0, \\ 0, & \text{当 } z \notin G_0 \cup C. \end{cases} \tag{1.4}$$

下述命题成立：令 G 为一域，C 为一途径. 于 $G \times C$ 上有定义的连续的复值函数 $f(z, \zeta)$，并且对于固定的 $\zeta \in C$，它在 G 内全纯. 又设 $f_z(z, \zeta)$ 于 $G \times C$ 连续，则

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta)d\zeta$$

于 G 内全纯，并且有

$$F'(z) = \int_C f_z(z, \zeta)d\zeta. \tag{1.5}$$

重复应用此定理于 Cauchy 第一积分公式，在具有 Cauchy 第一积分公式的同样假设下，就得到对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 的一般 Cauchy 积分公式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \begin{cases} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z), & \text{当 } z \in G_0, \\ 0, & \text{当 } z \notin G_0 \cup C_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

因为对每一点 $z \in G$ 周围，都有包含 z 点在其内的一简单闭曲线 $C \subset G$，于是得到：于 G 内全纯的函数 f，在 G 内具有各阶导数.

Cauchy 第一积分公式蕴含着

Taylor 定理 令 G 为一域，$z_0 \in G$ 并且 $D = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset G$. 又设 f 为 G 内的全纯函数，则对每一 $z \in D$ 有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n. \tag{1.7}$$

于是在 G 内的全纯函数 f，在每一点 $z_0 \in G$ 有一幂级数展式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$，它在围绕 z_0 点且含于 G 内的最大圆 D 内收敛且等于 f. 由公式 (1.7) 得到，展式的系数 a_n 是

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.8}$$

反之，每一幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，在圆 $D=\{z \mid |z-z_0|<r\}$ 内收敛，并在其收敛圆内表一全纯函数 $f(z)$，这是由于实的或复的幂级数具有各阶导数，并且这些导数均能由"逐项微分"来计算，于是有

$$f^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)a_{n+\nu}(z-z_0)^{\nu}. \tag{1.9}$$

这蕴含 $f^{(n)}(z_0)=n!a_n$ 或等价地有 (1.8).

1.2 解析展拓. Riemann 曲面

上述关系式导致解析展拓理论，某些结果将在这里叙述之.

1. 令 f 和 g 为 G 内全纯函数，则下述命题是等价的：

a) 对每一 $z \in G$, $f(z)=g(z)$,

b) 在一点 $z_0 \in G$，对所有 $n=0,1,\cdots$, $f^{(n)}(z_0)=g^{(n)}(z_0)$,

c) 对于一点列 $z_1, z_2, \cdots$，其中 $z_\nu \neq z_0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu = z_0 \in G$，有 $f(z_\nu)=g(z_\nu)$. 命题 c) 蕴含非常数的全纯函数具有孤立零点. 若函数 f 在 z_0 点邻近的幂级数展式之系数 $a_0, a_1\cdots, a_{n-1}$ 为零，而 $a_n \neq 0$，则称 n 为 f 在 z_0 的零点的级. 此时在 z_0 点邻域 $f(z)$ 能写为如下形式：

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z), \quad g(z)\neq 0, \text{ 当 } |z-z_0|<\rho.$$

2. 令 f 在 G 内全纯，g 在 G' 内全纯. 若 $G\cap G' \neq \varnothing$，且对每一 $z\in G\cap G'$ 有 $f(z)=g(z)$，则在 $G\cup G'$ 恰有一全纯函数 h，使得对每一 $z\in G$ 有 $h(z)=f(z)$，对 $z\in G'$ 有 $h(z)=g(z)$. 函数 g 称为 f 到 G' 的全纯展拓.

3. 正像在实函数的情况一样，能够指出，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，当 $|z-z_0|<r$ 时收敛，当 $|z-z_0|>r$ 时发散，其中

$$r=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$