SSDQ

算术大全

主编 张静庵
审订 綦佐华
编著 张静庵 朱长龄 冯俊民

河南人民出版社

责任编辑　温　光

算 术 大 全

主编　张静庵

审订　秦佐华

编著　张静庵　朱长龄　冯俊民

河南人民出版社出版

河南新乡地区印刷厂印刷

河南省新华书店发行

850×1168毫米32开本　18.625印张　429千字

1983年3月第1版　1983年3月第1次印刷

印数：1—— 68,000册

统一书号 7105·302　　定价2.17元

前　　言

人们学习数学，大都是从学习“算术”开始的。“算术”是启蒙教育的重要内容，更是学习数学的基础。“算术”这门科学和人们的日常生活、生产及各项工作有着极为密切的关系，接触它的人最多而且最广泛。

初学“算术”的人，总认为它无非是加、减、乘、除，比较简单；但经过一段深入学习，人们往往会遇到不少的困难，甚至感到许多问题无从下手。诚然，在整个数学“大厦”中，“算术”是它的基础；但是，这些看起来似乎是比较简单的基础内容，却包含着较深的哲理。实际上，即使一些从事算术教学的人，对“算术”中的某些重要概念和基本运算也往往有许多模糊之处。因此，在目前的中小学数学教学中很有必要对“算术”的一些理论问题和解题方法深入探讨和研究。为了满足社会上对于算术学习和教学的需要，我们编写了这本《算术大全》。

本书是一本比较全面系统的“算术”工具书。它的内容包括：算术概观、自然数、整数四则、整数的整除性、量的计量、分数、小数、百分法、比和比例、近似计算等十章，其中比较详尽地阐述了算术的基本概念、定义、定理、法则、公式及有关算术史的一些常识；对于某些重要的定理、法则、公式，本书也作了一般性的数学证明；在本书的第一章和第六章中，还介绍了非十进数的概念和运算，在第四章中，则对数论中的基础知识加以

介绍；此外本书还配置有大量的典型例题和习题，习题之后附有详细的解答。本书可供广大中小学数学教师、师范院校学生和算术爱好者阅读、参考。

由于本书中不少例题和习题选自我国古算书和外国教科书，因此，其中某些内容、单位、术语等可能与我国的现实情况有所不符，希望读者在阅读本书时对此加以注意。

本书成稿后，承蒙秦佐华老师认真审阅，并提出不少可贵的意见；河南省数学研究所韩文法所长在百忙中为本书作序，在此一并表示衷心地感谢！

《算术大全》的"全"是相对而言的；虽然我们的主观愿望是想求"全"，但由于我们水平所限，管见所及，如有遗误，诚挚希望专家和读者批评指正。

编　者

1982年7月

序

众所周知，在科学数学化的今天，搞好数学教学有着特别重要意义。数学教学的任务，在于要加强基础知识的教学，努力提高教学质量，这是四化建设赋予我们的时代使命；而“算术”是数学的基础，牢固地掌握好这些知识，是一个带根本性的问题。《算术大全》正是在这种思想指导下出版的。它系统地阐述了算术的基础知识，别具风格，作为教学参考或课外读物，都不失为一册好书；所附各类习题深入浅出、精练实用，渗透着现代数学的思想观点，富有启发性，如能将这些习题一一演算，必将收到事半功倍之效。

在《算术大全》的第一章里，一开始就把集合、基数、序数以及非十进位制的记数法作了介绍，这些都是和现代数学紧密相关的问题。应当说，这是一种很好的尝试，任何传统的算术读物都没有作到这一点；把算术知识和高等数学连系起来，无疑有利于读者思想方法上的锻炼。

第二章讲的自然数列是一个重要问题，往往可以碰到一些学生，学过自然数后，还不知道零是不是自然数。

在第三章里，也解答了不少疑难问题，如整除性质、四则运算的顺序、零为什么不能作除数等都是富有启发性的基本知识；在这里作者汇集到的不少经典问题，确是难能可贵的。

第四章讲到质数，具有特色，其中介绍了目前我们所知道的

最大质数是 $2^{19937}-1$，当然这需要用计算机来论证。质数是无穷多的，但人们迄今只知道它的一少部分，所以质数分布问题吸引着不少数学工作者在向它攀登。

五、六两章主要介绍分数运算和小数运算，教好学好这些内容是数学教学的重要任务之一。对于这一部分内容，《算术大全》在概念引入、混合运算上都一反过去的写法，独具特色，引人入胜。

在第八章中详尽地讲述了比和比例，层次清晰、概念准确，可以澄清学生在学习上的一些模糊不清概念；函数知识的初步介绍，会给读者向数学的高一阶段学习作好准备。

第十章“近似计算”的内容很丰富，这些基础知识在生活、生产各方面都有广泛的使用价值。

《算术大全》作者张静庵同志是具有丰富经验的数学教师，他从事数学教学工作几十年，对算术有深入的研究。由于在各种科学数学化的今天，数学教学有着特别重要的意义，所以我不揣冒昧地写了以上这些话。

韩文法

1982年8月20日

目　录

第一章

算术概观

§1 算术和算术研究的对象

算术是关于数以及它们的运算的科学.

从算术的定义出发，不仅自然数及分数的理论属于算术，而且关于正数及负数，无理数及复数等的理论也应该属于算术.此外，就是级数、排列、组合等的理论也应该包括在算术的范畴内.

关于数的以下的七种运算：加、减、乘、除、乘方、开方、求对数，以及关于这些运算的性质的研究都是算术的内容.

在小学数学中，算术的内容要少得多，它仅包括自然数和分数及四种基本运算（加、减、乘、除）的理论.

算术源流古远，早在公元前一千多年以前，算术已在巴比伦和埃及得到了很好的发展.算术之所以产生得比较早和发展得比较快，是因为它最接近实际，应用极其广泛.算术知识不但是人们生活、工作中必不可少的常识，也是人们进一步学习高深的自然科学和社会科学的基础；尤其研究算术应用题，更是培养人们逻辑思维能力的一种基本训练.

§2 集合的基本概念

一、集合的意义和它的表示方法

“集合论”作为纯数学的一个分支，是近百年来才发展起来的，它的创始人是德国著名数学家康托尔（1845—1918）。1874年康托尔发表了一篇《关于实代数数所组成的集合的一个性质》的论文，这篇论文是研究现代集合论的第一篇论文。

什么叫“集合”呢？要给它下一个严格的定义是很困难的。虽然，近百年来不少数学家致力于这项工作，但目前仍无取得理想成果。为了不使数学基础发生动摇，对集合论中的公理系统的承认是必要的。凭人们的生活经验而言，集合几乎是不言自明的原始概念，它是指具有某种共同特性的“东西”集在一起，所以称之为“集合”。例如，全体中国人就是一个集合。所有的自然数也构成一个集合。我们再看几个例子：① 1，2，3，4；② 某班所有的少先队员；③ 大于3而小于8的数。它们分别是有限的几个数，有限的几十个人和无穷多的数组成的整体。象这样，把具有某种属性的一些事物（对象）看做一个整体，便形成一个集合。集合里的各个事物叫做集合的一个元素。如①中的1，2，3，4每个数都是这个集合的一个元素。但必须指出的是，在描述集合的意义时提到的“某种属性必须是确定的，否则组不成集合。如“三个数”就组不成集合，因为不知道是怎样的三个数。

一个确定的数也可以构成一个集合，集合的元素就是这个数；同样，一本确定的书也能构成一个集合，集合的元素就是这本书。

在特殊情形下，一个集合可以没有元素。这种没有元素的集合叫空集合，简称空集。空集用符号ϕ（希腊字母，汉语拼音念fǎi）表示。

我们通常用拉丁文大写字母A、B、M、N、P等表示集合，读成集合A，集合P等。通常用拉丁文小写字母表示集合中的元素。如果a是集合P的一个元素，就记为$a\in P$，读成“a属于集合P”；如果a不是集合P的元素，记作$a\overline{\in}P$（或$a\notin P$），读成“a不属于P”。等等。

表示集合的方法，常用的有“穷举法”、“描述法”和“图示法”。

（1） 把集合的所有元素都一一列举出来，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫作“穷举法”（或“列举法”）。

（2）把描述集合中元素的公共属性（或规律）的语言，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫做“描述法”。

例如，由数1，2，3，4组成的集合，可以表示为

$A=\{1, 2, 3, 4\}$；（穷举法）

或 $A=\{$所有小于5的正整数$\}$；（描述法）

或 $A=\{x : x$是小于5的正整数$\}$。（描述法）

（3） 用一个平面图形表示集合的方法叫做图示法，这个平面图形通常画成圆、椭圆或矩形。例如自然数集合N可表示为：

图1—1

如果一个集合里的元素的个数是有限的，那么这样的集合叫做“有限集合”，也叫“有穷集合”；如果一个集合里的元素的个数有无限多，那么这样的集合叫做“无限集合”，也叫“无穷集合”。

二、子集、交集、并集、补集（余集）

前边介绍了集合的概念，下面研究集合的关系和运算。

1. 子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么，集合A叫做集合B的子集，表示为

$$A \subseteq B \quad 或 \quad B \supseteq A,$$

读作“A包含于B”或“B包含A”。

对于任何一个集合P，因为它的任何一个元素都属于集合P，所以

$$P \subseteq P.$$

也就是说，任何一个集合都是它本身的子集。

真子集：如果A是B的子集，并且集合B中至少有一个元素不属于A，那么集合A就叫做集合B的真子集，记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A.$$

例如，自然数是正整数的子集，但不是正整数的真子集；而奇数才是正整数的真子集。

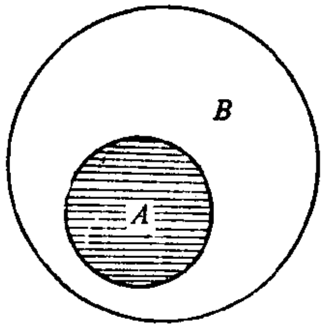

图1—2

集合B和它的真子集A之间的关系，可以用图1—2中的B和A的关系来表示，其中A、B两个圆分别表示集合A、B。

显然，子集与子集的关系具有传递性，即对于集合A、B、C，如果$A \subseteq B$，

$B \subseteq C$，那么$A \subseteq C$。

同样，对于集合A、B、C，如果$A \subset B$，$B \subset C$，那么$A \subset C$。

对于集合A、B，若A的所有元素都是B的元素，反之，B的所有元素也都是A的元素，那么集合A与集合B相等，记为

$$A=B,$$

读作"集合A等于集合B。"也就是说，如果$A \subseteq B$，$B \subseteq A$，则$A=B$。

例如，$A=\{1, 2, 3\}$　$B=\{3, 2, 1\}$则$A=B$或$B=A$。

我们规定，空集是任何集合的子集。也就是说，对于任何集合A，都有

$$\phi \subseteq A.$$

例如集合$\{a, b\}$的子集有：ϕ、$\{a\}$、$\{b\}$和$\{a,b\}$。显然集合$\{a, b\}$的真子集有：ϕ、$\{a\}$、$\{b\}$。

2.交集：看下面三个集合：

$$A=\{2, 3, 5, 7\};\ B=\{3, 5, 8, 10\};$$

$$C=\{3, 5\}.$$

很容易看出集合C的所有元素3和5是集合A的元素，也是集合B的元素，这时我们说集合C是集合A与B的交集，表示为

$$\{2, 3, 5, 7\} \cap \{3, 5, 8, 10\}=\{3, 5\}.$$

一般地，由同时属于集合A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的交集，表示为

$$A \cap B.$$

图1—3中的阴影部分，表示集合A与B的交集$A \cap B$。

由交集的定义不难看出，对于任何集合A，都有

$A\cap A=A$, $A\cap\phi=\phi$.

例1 已知A{和等于 7 的两数},$B=${积等于12的两数},求$A\cap B$.

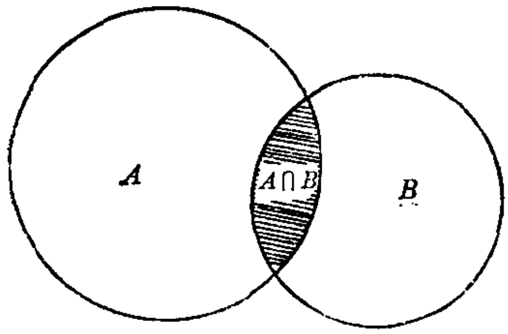

图1—3

解:集合A, B可分别写成

$A=\{(x,y):x+y=7\}$,

$B=\{(x,y):xy=12\}$.

$$\therefore\quad A\cap B=\{(x,y):\begin{cases}x+y=7\\xy=12\end{cases}\}=\{3,\ 4\}.$$

例2 在同一平面内有不重合的直线a和b,求$a\cap b$.

解:若a和b不平行,交点为M,则$a\cap b=M$(一个点).若a和b相平行,则$a\cap b=\phi$(空集).

3.并集:看下面三个集合:

$A=\{3,\ 5,\ 6,\ 8\}$; $B=\{4,\ 5,\ 7,\ 8\}$;

$C=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.

容易看出集合C的元素包含了集合A或B的一切元素,而且不含A、B以外的元素,这时,我们说集合C是集合A与B的并集,表示为

$$\{3,\ 5,\ 6,\ 8\}\cup\{4,\ 5,\ 7,\ 8\}=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}.$$

一般地说,由属于A或B的一切元素所组成的集合,叫做集合A与B的并集,表示为

$$A\cup B.$$

图1—4的阴影部分,表示集合A与B的并集$A\cup B$.

由并集定义可以知道,对于任何集合A,

$$A\cup A=A,\quad A\cup\phi=A.$$

例3 设$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

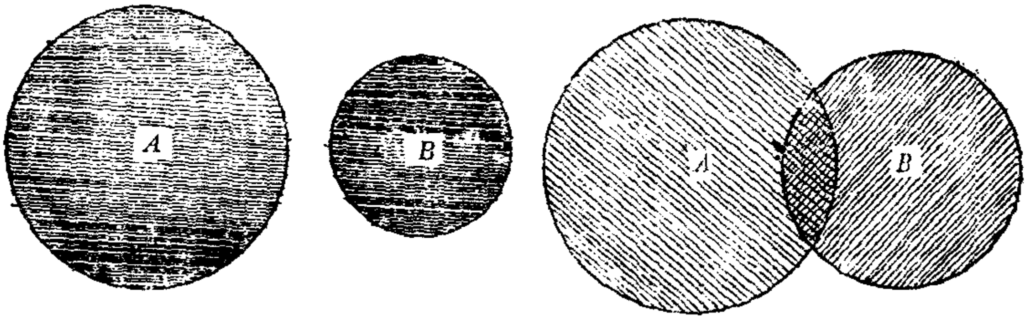

图 1—4

（1）求$A\cup B$，$A\cap B$。

（2）在____处填上适当的符号（$\supset$，$\subset$）：

$$A\cup B \_\_\_\_ A；A\cup B \_\_\_\_ B；A\cap B \_\_\_\_ A\cup B。$$

解：（1）$A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}\cup\{3, 4, 5, 6, 7\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$；

$A\cap B=\{1, 2, 3, 4\}\cap\{3, 4, 5, 6, 7\}=\{3, 4\}$。

（2）$A\cup B\supset A$；$A\cup B\supset B$；$A\cap B\subset A\cup B$。

4. 补集：如果集合A和集合B没有公共元素，A与B的并集是I，则在集合I里，A是B的补集，反之B也是A的补集，这时I相对A和B来说叫做全集。习惯上，A的补集记为$\overline{A}$，B的补集记为$\overline{B}$。

补集也可以这样来定义：已知全I集，$A\sqsubseteq I$（A是I的子集），由I中所有不属于A的元素组成的集合叫做集合A的补集，表示为$\overline{A}$。

图1—5中的矩形表示全集I，圆表示集合A，阴影部分表示集合A的补集$\overline{A}$。

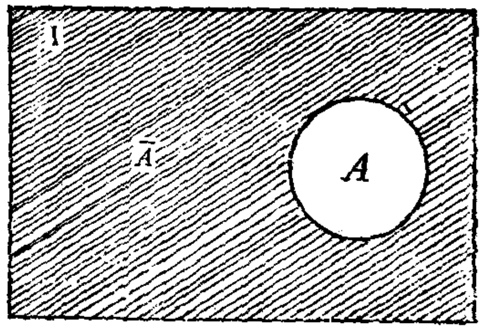

图 1—5

由补集的定义容易知道，对

于任何集合A，

$$A \cup \overline{A}=I, \quad A \cap \overline{A}=\phi.$$

例如，如果$I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A=\{1, 3, 5\}$，则$\overline{A}=\{2, 4, 6\}$.

例 4 设$I=\{$小于9的正整数$\}$，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$.求$\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A\cap B}$.

解：∵ $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \}$，

$A=\{1, 2,3\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，

∴ $\overline{A}=\{4, 5, 6, 7, 8\}$，$\overline{B}=\{1, 2, 7, 8\}$，

$A\cap B=\{3\}$， $\overline{A\cap B}=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

三、集合的势

两个集合中哪个集合的元素多，哪个集合的元素少？这对于两个有限集合，如两个班级学生多少，是很容易知道的。然而，如果两个集合都是无限集合，怎样比较它们的元素谁多谁少呢？例如，

自然数集$N=\{1, 2, 3, 4\cdots\cdots\}$，

正的偶数集$E^+=\{2, 4, 6\cdots\cdots\}$，

粗看起来，N的元素似乎比E^+的元素“多”，其实它们的元素一样“多”。这是为什么呢？让我们先研究一下，两个有限集合的元素是如何比较多少的。

设甲盒子装了若干红球，乙盒子装了若干白球，要比较哪一种球多，可以采用两种办法：

方法一：数一数．哪种球的数目大，就是哪种球多．但这种方法对无限集合行不通。