JIFEN BIANHUAN

积分变换

上海交通大学应用数学系 编

工程数学丛书

上海交通大学出版社

·工程数学丛书·

积 分 变 换

上海交通大学应用数学系编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是工程数学丛书之一，主要介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换这两种积分变换的概念、性质及应用。内容包括：傅里叶积分公式、傅里叶变换及其性质、单位脉冲函数、卷积与卷积定理、拉普拉斯变换及其性质、拉普拉斯逆变换、像原函数的求法，以及用这两种变换来解微分方程和某些积分微分方程。本书配有经精选的习题，书末附有习题答案和常用函数的积分变换表。可供各类大专院校作为教材，供工程技术人员作为参考，也可供自学者选用。

积 分 变 换

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 787×1092毫米 1/32 印张 5.25 字数 116000

1988年7月第1版 1988年9月第1次印刷

印数：1—8200

ISBN7-313-00238-6/O1 科技书目：177—281

定价：0.90 元

序　言

目前，高等院校的工程数学课程，由于内容多、进度快，因此有些重要的内容不得不一带而过，或者删掉，尤其没有足够多的演题时间，从而使学生对课程内容的理解往往只浮于表面。为了弥补这些不足，编者吸取我校在工程数学教学中积累的有益经验，根据高等学校工科数学课程教学指导委员会（原工科数学教材编委会）的编写要求，针对工科院校的具体特点，编写了一套工程数学教材，并拟配以一册这套教材的习题解答，合称《工程数学丛书》。

丛书中的教材共有5册：《线性代数》、《复变函数》、《积分变换》、《概率论与数理统计初步》和《特殊函数与数学物理方程》。这套教材的特点是：内容丰富，说理清楚，重点突出，深浅得当，通俗易懂；对工程数学中的基本概念、基本理论和基本方法的叙述，力求深入浅出、清晰、准确；并配有大量典型例题和类型齐全的习题。本着循序渐进的原则，对全部内容由易到难，由浅入深地作了统筹安排，书中加有“*”号的内容可根据不同情况予以取舍。这对读者逐步地系统掌握工程数学的基本内容，进一步提高分析问题和解决问题的能力均有裨益。

由于上述特点，这套教材具有比较广泛的适用性。除了全日制高等院校以外，函授大学、电视大学、职工业余大学等都可用来作为教材，自学工程数学的广大读者也可选用，从事科研生产的工程师也可参考。

本套丛书主编袁公英，编委有张建元、贺才兴、武霞敏、吴登益、童品苗、陈茵、唐济楫等同志。《积分变换》由武霞敏

同志执笔编写。在全套教材编写过程中得到校、系领导的关心、帮助和我系广大教师的大力支持，编者在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，疏漏与不当之处在所难免，恳请读者和使用本套教材的教师批评指正。

编　者

于上海交通大学

1987年10月25日

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

《工程数学丛书》编委会

主编　袁公英

编委　张建元　贺才兴　武霞敏

吴登益　童品苗　陈　茵

唐济楫

《线性代数》	张建元编
《复变函数》	贺才兴编
《积分变换》	武霞敏编
《概率论与数理统计初步》	吴登益　童品苗编
《特殊函数与数学物理方程》	袁公英　陈　茵编
《工程数学丛书习题解答》	即出

目　　录

引　言

所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。具体地说，就是把某函数类 A 中的任意一个函数 $f(t)$，乘上一个确定的二元函数 $K(t, p)$，然后再计算其积分，即

$$F(p)=\int_a^b f(t)K(t,p)dt,$$

这样，便变成了另一个函数类 B 中的一个函数 $F(p)$。这里的积分域是确定的；$K(t,p)$ 也是一个确定的二元函数，称为积分变换的核。选取不同的积分域和核，就得到不同的积分变换。我们把 $f(t)$ 称为像原函数，把 $F(p)$ 称为 $f(t)$ 的像函数，在一定条件下，它们是一一对应的，并且变换是可逆的。本书介绍最常用的两种积分变换：傅里叶变换和拉普拉斯变换。

这两种积分变换可用来求常系数线性微分方程的解，其求解的方法和步骤大致如下：先将微积分的运算经变换转化为复数的代数运算，从而使微分方程变换成复数的代数方程；然后求出代数方程的解；再经过逆变换，就能得到原来微分方程的解。由于代数方程的求解要比相应的微分方程的求解简便得多，因此，计算就大为简化。不但如此，它们还可以用来解积分方程、偏微分方程等。所以这两种积分变换不仅在数学的许多分支中，而且在其他学科中，如在振动力学、电工学、无线电技术等领域中，都有着广泛的应用，它们已经成为这些学科领域中不可缺少的运算工具。有时也把这两种积分变换统称为运算微积。

第一章 傅里叶变换

我们从周期函数在区间$\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$上的傅里叶(Fourier)级数展开式出发，讨论当$T\to+\infty$时它的极限形式，从而得出非周期函数的傅里叶积分公式。然后在这基础上定义傅里叶变换，并阐述它的一些性质和简单的应用。

§1 傅里叶积分公式

在高等数学里，我们已经学过傅里叶级数(简称傅氏级数)。如果$f(t)$是以T为周期的周期函数，并且在$\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$上满足狄利希莱条件(简称狄氏条件)，则$f(t)$就可以展成傅氏级数。在$f(t)$的连续点$t$处，级数的三角形式为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{\frac{T}{2}}+b_n\sin\frac{n\pi t}{\frac{T}{2}}\right).$$

若令 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，则

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t), \tag{1}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,dt,\quad n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega t\,dt,\quad n=1,2,\cdots。\tag{2}$$

为了今后运用上的方便，还要把傅氏级数改写成复数形式。

一、傅氏级数的复数形式

把欧拉公式

$$\cos n\omega t=\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2},$$

$$\sin n\omega t=\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}=-i\,\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2}$$

代入（1）式，则得

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}-ib_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2}\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{in\omega t}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-in\omega t}\right]。\tag{3}$$

如果令

$$\frac{a_0}{2}=c_0,\qquad \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n,\qquad \frac{a_n+ib_n}{2}=d_n,$$

那末（3）式成为

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_ne^{in\omega t}+d_ne^{-in\omega t}),$$

其中

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt,$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos n\omega t - i\sin n\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt,$$

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos n\omega t + i\sin n\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{in\omega t}dt,$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$。

比较 c_n 与 d_n 的表达式，可知 $d_n = c_{-n}$，而 c_0 实际上只要在 c_n 的表达式中令 $n=0$ 即可求得（由此可见，令 $\frac{a_0}{2}=c_0$ 的目的，是使 c_0 的表达式可合并到 c_n 的表达式中去），这样 c_0、c_n、d_n 的表达式可合写成一个式子：

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}\,dt, \quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots。$$

而

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-in\omega\tau}\,d\tau\right]e^{in\omega t},$$

这就是傅氏级数的复数形式。

如果 $f(t)$ 是定义在$(-\infty,\ +\infty)$上的非周期函数，那末

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

自然不能用傅氏级数来表示。不过，任何一个非周期函数 $f(t)$，都可以看作是周期为 T 的函数当 $T\to+\infty$ 时的极限形式。为了说明这一点，我们作周期为 T 的函数 $f_T(t)$ 如下：它在 $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 内等于 $f(t)$，而在 $\left(-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right)$ 之外按周期 T 延拓出去（图 1-1）。容易看出，T 越大，$f_T(t)$ 与 $f(t)$ 的相等范围也越大，这表明当 $T\to+\infty$ 时，周期函数 $f_T(t)$ 便转化为非周期函数 $f(t)$。那末，对于一个非周期函数将可用怎样的形式

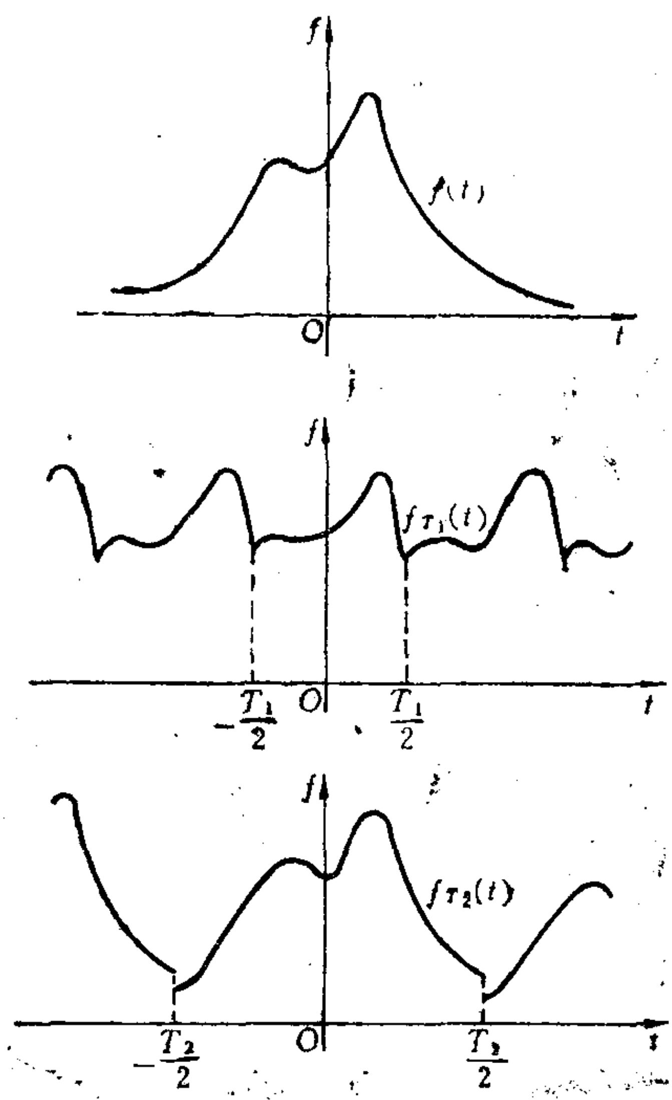

图 1-1

来表示呢？这就是下面所要讨论的问题。

二、傅里叶积分公式

1. 傅里叶积分存在定理

我们已经知道，周期为T的周期函数$f_T(t)$如果满足狄氏条件，则其傅氏级数展开式为

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}。$$

若令 $\omega_n=n\omega$，则

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t},$$

其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau,$$

即

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}。$$

既然非周期函数$f(t)$可看作周期函数$f_T(t)$当$T\to+\infty$时的极限，那末在上式中令$T\to+\infty$，所得到的极限就可以看作是$f(t)$的展开式，即

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}。\quad(4)$$

当n取一切整数时，ω_n所对应的离散点便均匀地分布在整个数轴上，如图1－2所示。若相邻两点的距离以$\Delta\omega$表示，即

$$\Delta\omega=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T}$$

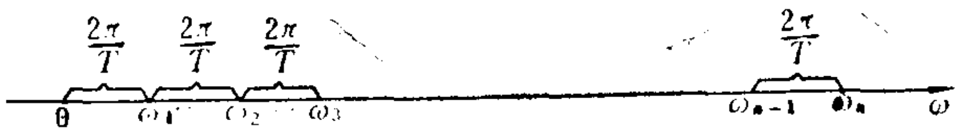

图 1-2

或
$$T=\frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

则当 $T\to+\infty$ 时，有 $\Delta\omega\to 0$。所以（4）式又可写为

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}\Delta\omega。$$

现在，我们从形式上来考察上式。记

$$\varphi(\omega_n)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau,$$

则

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega_n)e^{i\omega_n t}\Delta\omega。\tag{5}$$

在 $T\to+\infty$（即 $\Delta\omega\to 0$）的条件下，积分

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$$

的下限和上限分别变成 $-\infty$ 和 $+\infty$，$f_T(t)$ 变成 $f(t)$，同时，原来是分布在整个数轴上的离散变量 ω_n，现在变成了连续变量 ω。这样，上述积分在 $T\to+\infty$ 时就成为

$$\varphi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau。$$

再由定积分的定义，可把和式（5）中的求极限看成对 ω 的积分，于是

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega。$$

这就是非周期函数 $f(t)$ 的傅里叶积分公式（简称傅氏积分公式），而等号右端的积分式称为 $f(t)$ 的傅里叶积分（简称傅氏积分）。

以上只是从形式上来推导，其中忽略了使推导能够进行的一些限制条件，因此，我们要问：究竟在怎样的条件下，$f(t)$ 确实可用傅氏积分来表示呢？这有以下定理。

傅氏积分存在定理 若 $f(t)$ 在任何有限区间上满足狄氏条件，并且在（$-\infty$，$+\infty$）上绝对可积（即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 存在），则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\begin{cases} f(t), & \text{当 } t \text{ 为连续点，} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & \text{当 } t \text{ 为间断点。} \end{cases} \tag{6}$$

由于证明需要更多的数学知识，超出本书范围，在此就不证了。（6）式是函数 $f(t)$ 的傅氏积分公式的复数形式，利用

欧拉公式还可将它化成三角形式。

2. 傅氏积分公式的三角表示式

因为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau\right]d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\right. \\
&\quad \left.+if(\tau)\sin\omega(t-\tau)]d\tau\right\}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega \\
&\quad + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega,
\end{aligned}
$$

考虑到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

是ω的奇函数，积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

是ω的偶函数，所以$f(t)$还可写成

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau, \tag{7}$$

这就是$f(t)$的傅氏积分公式的三角表示式。

利用差角余弦公式，（7）式还可写成

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega t d\omega\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]\sin\omega t d\omega\right\}$$

$$=\int_0^{+\infty}[A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t]d\omega, \tag{8}$$

其中

$$\begin{cases} A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \\ B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau。\end{cases} \tag{9}$$

我们可以看到，傅氏积分（8）及其系数公式（9）与傅氏级数（1）及其系数公式（2）在形式上有相似之处。

当$f(t)$是偶函数或奇函数时，傅氏积分公式还可有特殊形式，下面分别叙述。

3. 余弦傅氏积分公式

当$f(t)$为偶函数时，(9)式的第一式中被积函数为偶函数，第二式中被积函数为奇函数，于是推得

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,$$

$$B(\omega)=0。$$

所以（8）式成为

$$f(t)=\int_0^{+\infty}A(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com