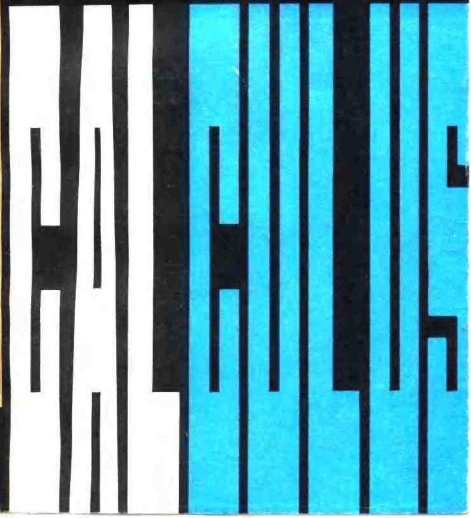
微积分 上

Robert Ellis Denny Gulick　潘鹄屏 译　杨慰祖 校



微积分

（上册）

〔美〕R·埃利斯　D·格里克　著

潘鹊屏　译　杨慰祖　校

江苏科学技术出版社

Robert Ellis   Denny Gulick

CALCULUS

with analytic geometry

本书根据：1978 by Harcourt Brace Jovanovich, Inc. 译出

微 积 分

（上册）

〔美〕R·埃利斯 D·格里克 著

潘鹤屏 译 杨慰祖 校

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：江苏新华印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 33.75 插页 2 字数 751,000

1987 年 6 月第 1 版 1987 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—3,400 册

书号：13197·237 定价：7.20 元

责任编辑 沈绍绪

序　言

本书包含了通常组成一部一元及多元微积分教程的全部题材。它适合在三个学期，或者四或五个季度内连续讲授，第一学期通常应包括预备性的一章(第一章)、极限和导数的三章(第二—四章)，以及关于积分的开头一章(第五章)、第二学期应讲授涉及积分的其余几章(第六—八章)，关于级数的一章(第九章)，关于圆锥曲线的一章(第十章)，以及有关向量和向量值函数引论的几章(第十一—十二章)的某一组合。第三学期将包括由多元函数的微积分直到格林定理、斯托克斯定理和散度定理这样最后几章。

虽然我们是按照我们认为在教法上最为有效的顺序来安排这些题材的，但教师们在选材上仍具有相当大的灵活性。第一章(其中包括了一节三角学，从而三角函数自始至终都可以用做例子)是预备性的，只要学生们的预备知识是充分的，便可以很快地一提而过。第九章实际上和后边的章节无关，从而可以单独拿出来放到适当的时候讲授，第十章可放到第四章以后的任何时候去学。最后，我们还有一个关于微分方程的附录(附录B)，供第二或第三学期的选修课选用。

只要有可能，我们总是凭借几何直观和直觉为诱导来引进概念和介绍结果，以便使学生能毫不勉强地接受后边严格叙述的一些定义和定理。在题材的展开中，我们使用了大批成功的例子和大约780条说明实例，以便做到明澈而严谨，又不至于因形式主义使读者不堪重负，为了同这一目标一致起见，

我们在教程的正文中证明了一元微积分的绝大多数定理，而把一些较难的证明纳入附录A。在多元微积分的诸章中，我们只证明了一些精选的有助于对材料理解的定理。

我们在各节之后都附有习题，并在每章末尾还附有供复习用的复习题，题目的总数不少于5500个。每一组题目均从纯粹是例行公事式的习题开始，供学生作为运用课文中提出的概念和方法的练习，接着便是一些应用题以及一些更富有挑战意味的题目（用星号标明）。作为通常那些来自物理及工程方面的题目的补充，我们追加了许多来自商业、经济、生物、化学、以及其他学科的问题，还增补了少量适合在计算器上求解的题目，为准确起见，每个题目都由两位作者和至少一个别的人完整地做过。单题和问答题（除了那些需要图形或较长解释的题之外）的答案均附在本书之后，而在附有解法的手册中则包括了所有题目的完备解法。

为了易于识别，在整本书中对于定义、定理、引理、推论以及重要公式的陈述，都以彩色加以强调，设法使之处于显著的地位。每一章中的全部定义和定理以及每一节中的例题和公式都是统一连续编号的。我们使用符号■通告一个证明的完结，而用□通告一个例题的求解过程的结束。

每章之末，给出了基本术语和措辞、基本公式和基本定理的一览表。在卷首的衬页上我们还汇集了许多重要的公式和结果，无论是为了进行复习还是为了以后学习时作参考，它们都是同学们的手头应该具有的。一些困难的术语和名字的读法也都在它们首次出现的那页上作为注释给出。

对于那些在编写本书的过程中以各种方式帮助过我们的人们，谨表示由衷的谢意。

罗伯特·埃利斯　　丹尼·格里克

致 读 者

当您开始学习微积分的时候，您会发现，它的许多概念和技巧都是您以前遇到过的。微积分广泛地使用了代数和平面几何，这两个数学分支您是早已熟悉的。然而，在这些之外新加的第三要素，亦即极限和极限过程的概念，对您来说也许是新鲜的。由极限概念产生的导数和积分这两个概念构成了整个微积分的核心。

导数可以被理解为变化率，这个解释具有许许多多的应用。例如，我们可以应用导数去求一运动物体(如火箭)的速度，或者确定一个函数的最大值和最小值，事实上，关于函数的特性导数为我们提供了如此之多的信息，致使我们描绘函数图形的工作在极大程度上得到简化。

由于导数的广泛应用，使得它在物理、工程、经济、生物这样一些学科中的重要性，并不亚于它在纯数学中的重要性。

积分的定义是由熟知的面积概念引出的。平面几何的方法虽然使我们能够计算种种多边形的面积，但对由圆以外的平面曲线所围成的平面区域，却不曾提供计算其面积的方法，借助于积分便能求出许多这类区域的面积。我们还要应用积分去计算体积、重心、曲线的弧长、功以及流体的静压力。

人们已发现导数和积分有多种多样的应用。选自本书例题及习题的下列条款，已足以表明，使用这些有力概念的领域是何等的变化多端！

咳嗽时气管的收缩	§4.3
绝缘顶楼地板的成本	§4.4
水作用在土填水坝上的力	§7.6
在一次手术期间需要的麻醉剂量	§8.5
化石、头骨或月球岩的年代	§8.5
行星的轨道	§12·6
火箭从地球引力场的逃逸速度	§12.6
虹的分析	§13.3
日用品生产中征税的影响	§13.3
由一载电电线产生的电场	§15.5

微积分中的一些基本概念，就其原始形态而言，可上溯至古希腊时代。然而，数学家们对于曲线的切线和平面区域的面积这类精湛技巧的发展，则仅仅是十六世纪和十七世纪初期的事，这些数学家以及他们的精湛技巧，为牛顿(1642—1727)和莱布尼兹(1646—1716)提供了活动舞台，鉴于牛顿和莱布尼兹集成了微积分的技巧并将其置于普遍的背景之下，因而人们通常便把微积分的"发明"归功于他们两个；此外，他们已经看出了求导数和求积分互为逆运算这一事实的重大意义。

在尔后的150年间，微积分一点一点地趋于成熟，大约到十九世纪中叶，它在数学上已变成近乎我们目前所看到的样子。因此，本书所提供的定义和定理，全是一个世纪之前就已为人们所通晓的，较新的乃是其极端多样化的应用、在整个书中我们试图使您熟悉的也正是这些。

罗伯特·埃利斯
丹　尼·格里克

译 者 的 话

我们热诚地向读者推荐由美国马里兰州立大学罗伯特·埃利斯和丹尼·格里克两位教授所编写的这本微积分教程。本书结构新颖而又严密，论证严谨而又注重直观，内容详略分明、重点突出，在美国评价极好，深受读者欢迎。许多叙述从例题的分析开始再引出结论，例题和习题众多而又应用广泛，这一切都使人有耳目为之一新的感觉。对于广大的非理科专业的大学、专科、电大、职大等各类学校的学生和数学教师来说，是一本很好的教材或者教学参考书。我们相信，教师会从本书受到许多有益的启示，学生则会感到阅读方便而且饶有兴味，特别是那些试图通过高等数学自学考试的同志们，将会发现它是一本特别宜于自学的教本，我们还相信，对于我国的非理科专业高等数学教材的编写，人们无疑会从本书受到有益的启示。

在你把本书略加浏览之后，就会发现我们上面的一番话并非溢美之词。

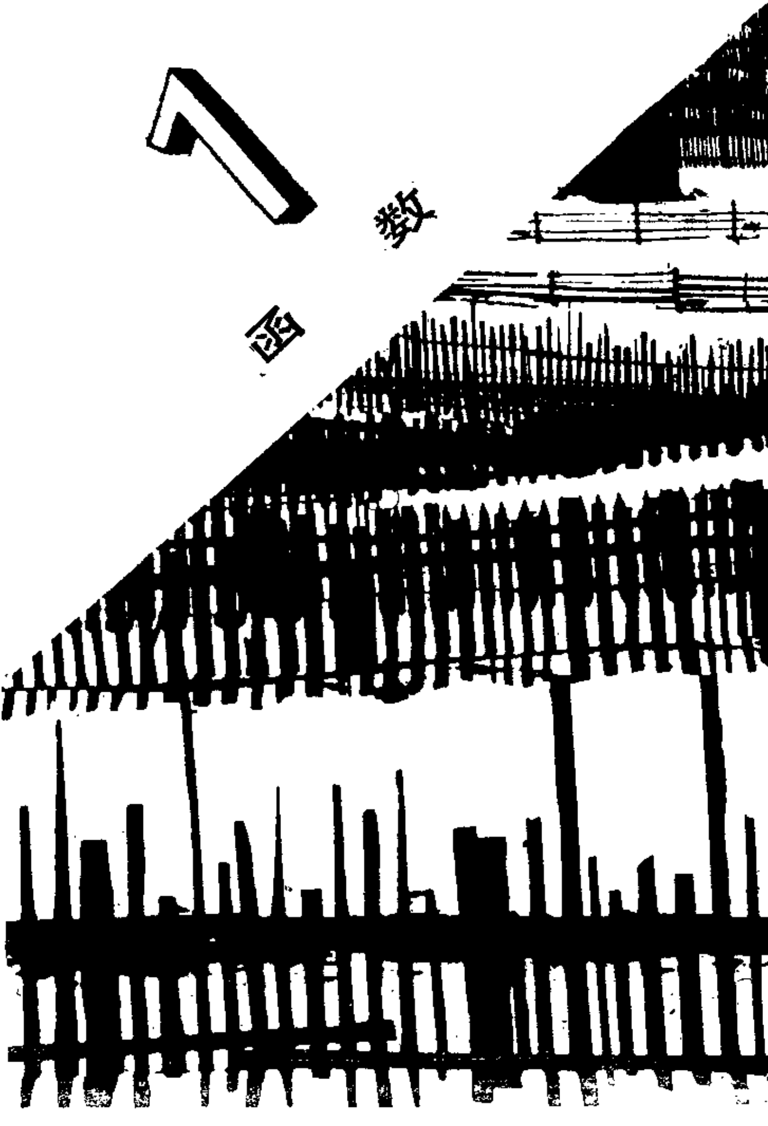
由于译者的水平和时间的仓促，文字的不当乃至错处就在所难免，这正是我们感到不安的地方，极盼指正，以期再版时得到更正。

在本书的翻译和出版过程中，我们得到了许多同志的关心和帮助，在此谨表衷心的谢意。

译　者

目　录

1 函数



在这一章，我们将复习实数的基本性质，介绍函数的概念，并讨论不同类型的函数，如果你对所给出的绝大多数的定义和概念都业已熟悉，那么建议你很快地读完第一章就着手学习第二章。

1.1 实 数

实数，它们的性质，以及它们间的关系，乃是微积分的基础。所以，我们从描述实数的某些重要性质开始。其中的许多性质也许是你已经熟悉的。

实数的类型与实数线

人们最熟悉的实数是整数：

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots$$

我们由整数导出有理数。它们是能写成形如$\frac{p}{q}$的实数，其中p和q都是整数并且$q\neq 0$。因此，$\frac{18}{37}$，-17，以及-1.41均为有理数。不是有理数的任一实数叫做无理数。π和$\sqrt{2}$即是无理数的例子.（参阅本节末习题第 58 题关于$\sqrt{2}$是无理数的证明。）

诸实数间有次序$<$。若a不等于b，则要么$a<b$要么$a>b$。例如，$5<7$而$-1>-2$。若a小于或者等于b，我们写作$a\leqslant b$。若a大于或者等于b，我们记为$a\geqslant b$。例如，对于任一非零整数x，$1\leqslant x^2$。若$a>0$，我们说a为正数，若$a<0$，则称a为负数。若$a\geqslant 0$，我们称a是非负数。

实数能以如下方式表示为水平直线上的点：如果$a<b$，

那么该线上对应于数a的值位于该线上对应于数b的点的左方(图1.1)。这样的一条直线叫做实数线或实线。我们把实数看作实线上的点，反过来又把实线上的点看作实数。因而我们说负数位于 0 的左方而正数位于 0 的右方。

在讨论数的集合时，我们有时采用符号∞表示“无穷”，而用 $-\infty$表示“负无穷”。这些符号并不代表实数，但如下文所示，我们将用它们来描述某些区间。

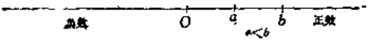


图 1.1 实 线

区间

微积分中频繁地出现一些被称为区间的实数集合。它们可分为九类：

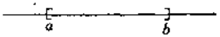
名 称	记 号	说 明
开区间	(a,b)	满足 $a<x<b$ 的所有 x
闭区间	$[a,b]$	满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有 x
半开区间	$(a,b]$	满足 $a<x\leqslant b$ 的所有 x
半开区间	$[a,b)$	满足 $a\leqslant x<b$ 的所有 x
开区间	(a,∞)	满足 $a<x$ 的所有 x
开区间	$(-\infty,a)$	满足 $x<a$ 的所有 x
闭区间	$[a,\infty)$	满足 $a\leqslant x$ 的所有 x
闭区间	$(-\infty,a]$	满足 $x\leqslant a$ 的所有 x
实 线	$(-\infty,\infty)$	所有实数

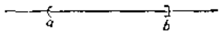
形如(a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，和$[a,b)$的区间是有界区间，而形如(a,∞)，$(-\infty,a)$，$[a,\infty)$，$(-\infty,a]$，和$(-\infty,+\infty)$

的区间为无界区间。图 1.2 列出了四类有界区间。

注意：(b,b)，$(b,b]$，以及$[b,b)$ 均不包含数。更一般地，若 $b\leqslant a$，(a,b)，$(a,b]$，和$[a,b)$便都不含有数。因此，每当我们写这些区间之一时，总是意味着作了 $a<b$ 的假设。同样，仅当 $a\leqslant b$ 时我们才写记号$[a,b]$。


开 区 间(a,b)


闭 区 间$[a,b]$


半开区间$(a,b]$

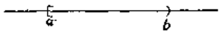

半开区间$[a,b)$

图 1.2

不等式和它们的性质

诸如 $a<b$，$a\leqslant b$，和 $a\geqslant b$ 这样一些命题叫做**不等式**。我们列出关于不等式 $a<b$ 和 $a>b$ 的几个基本定律。在下边，a,b,c,和 d 均被假设为实数。

三分法：对于给定的 a 和 b，或者$a<b$，或者 $a>b$，或者 $a=b$，且其中只能有一个成立。 (1)

可递性：若 $a<b$ 且 $b<c$，则 $a<c$。 (2)

可加性：若 $a<b$ 且 $c<d$，则 $a+c<b+d$。 (3)

正数的乘法：若 $a<b$ 且 $c>0$，则 $ac<bc$。 (4)

负数的乘法：若 $a<b$ 且 $c<0$，则$ac>bc$。 (5)

在定律(2)—(5)中，以$\leqslant$代替$<$并以$\geqslant$代替$>$，即得出关于不等式的四个新定律。我们将发现，它们也是有用的。

(1)中的“三分法”一词意味着一种三重划分。三分法指

出：任意两个数 a 和 b 恰好以（1）中列出的三种方式中的一种联系着。例如，给定两个数 3.1416 和 π，我们或有 $3.1416<\pi$，或有 $3.1416=\pi$，或有 $3.1416>\pi$。（实际上最后一种是正确的。）

为了记法简洁起见，有时可以把两个不等式合并起来。例如，如果 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c$，那么我们可以写成 $a\leqslant b\leqslant c$。

注意：对于乘法定律(4)和(5)必须悉心遵守。为了说明它们的应用，我们将举几个例题。在每个例子中，问题都是“关于 x 求解”，其含意为求出满足所给不等式的一切实数。

例1 关于 x 解不等式 $-x<-\frac{1}{3}$。

解 为了求满足

$$-x<-\frac{1}{3}$$

的 x 值，应用法则（5），我们以 -1 乘不等式的两边。于是有

$$-x(-1)>-\frac{1}{3}(-1)\text{，或 } x>\frac{1}{3}\text{。}$$

所以其解为开区间（$\frac{1}{3}$,∞）。□

例2 关于 x 解 $\frac{1}{x}<3$

解 数 $x=0$ 不能是一个解，因为 0 不能作除数。通过乘以 x，消去分母中的 x。对于正的 x，由（4）得出

$$1<3x \text{ 或 } \frac{1}{3}<x$$

所以（$\frac{1}{3}$，∞）是所给不等式的部分解。对于负的 x，由（5）得