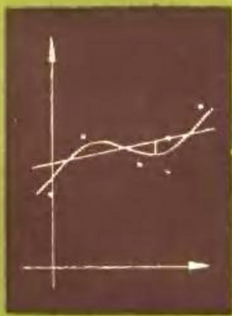
测绘新技术小丛书



崔希璋
陶本藻
刘大杰

平差、滤波与配置

测绘出版社

平差、滤波与配置

崔希璋　陶本藻　刘大杰

测绘出版社

平差、滤波与配置

崔希璋　陶本藻　刘大杰

●

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

●

开本　787×1092　1/32·印张 $2^{7}/_{8}$·字数 64 千字

1982年1月第一版·1982年1月第一次印刷

印数1—5,000册·定价 0.32 元

统一书号：15039·新 208

前　言

测量平差的理论，近一、二十年来有了较快的发展，为了普及有关这方面的知识，按照测绘出版社出一套测绘新技术普及读物的规划，我们编写了这本小册子。编写的重点是介绍为学习现代平差方法所必要的一些基础知识以及这些方法的基本原理。限于小册子的篇幅，内容的叙述不可能深透，但仍比较注意实际的计算。

本册内容包括：预备知识，协方差及其传播律，最小二乘平差，滤波、推估与配置。

编者

1980 年 7 月

出 版 说 明

为适应实现“四化”需要，测绘单位广大技术人员和干部迫切希望了解测绘新技术发展情况及其基本知识，为此，我们组织出版这套《测绘新技术小丛书》。

本套小丛书是入门性质的科普读物，适合于具有一定测绘知识的业务人员和业务管理干部阅读。

目　　录

第一章 预备知识

在以后各章的叙述中，需要一些矩阵代数和数理统计的基础知识。考虑到我们已在《矩阵在测量平差中的应用》[5]和《数理统计浅说》[6]两书中介绍了有关知识，故本章的内容只是作一些补充。

§1—1 矩阵的迹

设有 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，它的主对角线元素之和，定义为矩阵的迹，并用符号 $\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹，即

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad . \tag{1-1}$$

不论方阵 A 的阶数如何，它的迹总是一个数。

例如

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -5\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=3+4+1=8,$$

$$\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}8 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}=13 \quad .$$

当 A 为 1×1 阶即一个数时，A 的迹等于它本身。例如

$$\mathrm{tr}(4)=4,$$

$$\mathrm{tr}(p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2)=\mathrm{tr}(V^TPV)=V^TPV,$$

式中

$$V=(v_1v_2\cdots v_n)^T,\quad P=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & p_2 & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots p_n \end{pmatrix}.$$

矩阵迹的运算常用到以下几个性质：

（1）方阵A转置的迹等于方阵A本身的迹，即

$$\operatorname{tr}(A^T)=\operatorname{tr}(A)\ . \tag{1-2}$$

例[1-1]．

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^T)=2\ .$$

（2）方阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$之和的迹等于A与B的迹之和，即

$$\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)\ . \tag{1-3}$$

例[1-2]．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{tr}(A)=a_{11}+a_{22}=\Sigma a_{ii},$$

$$\operatorname{tr}(B)=b_{11}+b_{22}=\Sigma b_{ii},$$

$$\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}\Sigma a_{ii}+\Sigma b_{ii}\ .$$

（3）常数c与方阵A之积的迹等于c与A的迹之积，即

$$\operatorname{tr}(cA)=c\operatorname{tr}(A)\ . \tag{1-4}$$

例[1-3]．

$$\operatorname{tr}(cA)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix}=ca_{11}+ca_{22}$$

$$=c(a_{11}+a_{22})=c\,\mathrm{tr}(A)\ .$$

（4）矩阵$\underset{nm}{A}$与$\underset{mn}{B}$之积的迹等于矩阵B与A之积的迹，即

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)\ . \tag{1-5}$$

例[1-4]．

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB)&=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})\\&\quad+(a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}),\\ \mathrm{tr}(BA)&=(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{13}a_{31})\\&\quad+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+b_{23}a_{32}),\end{aligned}$$

可见两者相等。

（5）矩阵$\underset{nm}{A^T}$与$\underset{mn}{B}$之积的迹等于矩阵A与B^T之积的迹，

即
$$\mathrm{tr}(A^TB)=\mathrm{tr}(AB^T)\ . \tag{1-6}$$

例[1-5]．

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^TB)&=(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21})+(a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22})\\&\quad+(a_{13}b_{13}+a_{23}b_{23}),\\ \mathrm{tr}(AB^T)&=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13})\\&\quad+(a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}),\end{aligned}$$

可见两者相等。

§1—2　函数对矩阵的导数

在[5]中我们已阐述了矩阵对一个变量的导数和列矩阵

对列矩阵的导数规则，本节再补充说明函数对矩阵的导数规则。

设F是以$n\times m$阶矩阵X的元素x_{ij}为自变量的函数，则定义函数F对矩阵X的导数为如下的$n\times m$阶矩阵：

$$\frac{dF}{dX}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_{11}} & \frac{\partial F}{\partial x_{12}} & \cdots\cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{1m}}\\ \frac{\partial F}{\partial x_{21}} & \frac{\partial F}{\partial x_{22}} & \cdots\cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{2m}}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots\\ \frac{\partial F}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial F}{\partial x_{n2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{nm}}\end{pmatrix}, \tag{1-7}$$

简记为

$$\frac{dF}{dX}=\left(\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}\right).$$

导数矩阵与自变量矩阵X有相同的行列数，它的元素就是函数对自变量相应元素的导数。

根据上述定义，很容易得到下列求导规则：

（1）若c为常数，则有

$$\frac{dc}{d\underset{nm}{X}}=\underset{nm}{O}, \tag{1-8}$$

式中O表示$n\times m$阶零矩阵，即常数c的导数矩阵为零矩阵。

（2）若$F=y+z$，则有

$$\frac{dF}{d\underset{nm}{X}}=\frac{dy}{d\underset{nm}{X}}+\frac{dz}{d\underset{nm}{X}}, \tag{1-9}$$

即两个函数y与z之和的导数，等于这两个函数y和z分别对矩阵X导数之和。

（3）若$F=c\,y$，则有

$$\frac{dF}{\underset{n\,m}{dX}}=c\,\frac{dy}{\underset{n\,m}{dX}}, \tag{1-10}$$

即常数c与函数y乘积的导数，等于常数c乘以函数y对矩阵X的导数。

（4）若$F=y\,z$，则有

$$\frac{dF}{\underset{n\,m}{dX}}=\frac{dy}{\underset{n\,m}{dX}}\,z+y\,\frac{dz}{\underset{n\,m}{dX}}, \tag{1-11}$$

即两个函数y与z乘积的导数，等于第一个函数的导数乘以第二个函数与第一个函数乘以第二个函数的导数之和。由于y和z是纯量函数，所以上式中的乘积$y\,z$是可交换的。

例[1-6]．已知

$$y=3x_{11}^2+x_{12}^2+4x_{23}^3,$$
$$z=8x_{22}^4+3x_{23}^2,$$
$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix},$$

求$y+z$及$y\,z$对X的导数。

解：

$$\frac{d(y+z)}{dX}=\frac{dy}{dX}+\frac{dz}{dX}=\begin{pmatrix} 6x_{11} & 2x_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 12x_{23}^2 \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32x_{22}^3 & 6x_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x_{11} & 2x_{12} & 0 \\ 0 & 32x_{22}^3 & 12x_{23}^2+6x_{23} \end{pmatrix},$$

$$\frac{d(yz)}{dX}=\frac{dy}{dX}\,z+y\,\frac{dz}{dX}$$
$$=\begin{pmatrix} 6x_{11} & 2x_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 12x_{23}^2 \end{pmatrix}z+y\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32x_{22}^3 & 6x_{23} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6x_{11}z & 2x_{12}z & 0 \\ 0 & 32x_{22}^3y & 12x_{23}^3z+6x_{23}y \end{pmatrix}.$$

例[1-7]． 设

$$\begin{aligned} F= & x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{1m}^2+ \\ & +x_{21}^2+x_{22}^2+\cdots+x_{2m}^2+ \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & +x_{n1}^2+x_{n2}^2+\cdots \quad x_{nm}^2 , \end{aligned}$$

求F对$\underset{nm}{X}$的导数$\dfrac{dF}{dX}$．

解：因为

$$\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}=2x_{ij} \quad (i=1,2,\cdots n;\ j=1,2,\cdots m) ,$$

所以

$$\frac{dF}{dX}=2\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\cdots x_{1m} \\ x_{21} & x_{22}\cdots x_{2m} \\ \cdots \\ x_{n1} & x_{n2}\cdots x_{nm} \end{pmatrix}=2X.$$

因为

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(XX^T)= & x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{1m}^2+ \\ & +x_{21}^2+x_{22}^2+\cdots+x_{2m}^2+ \\ & \cdots\cdots \\ & +x_{n1}^2+x_{n2}^2+\cdots+x_{nm}^2 , \end{aligned}$$

故有下列求导公式。

（5）设$F=\operatorname{tr}(XX^T)$，则有

$$\frac{dF}{dX}=\frac{d\operatorname{tr}(XX^T)}{dX}=2\underset{nm}{X} . \tag{1-12}$$

例 [1-8]．设$B=(b_{ij})$ 为$m\times n$阶常数矩阵，求$F=$

$\mathrm{tr}(BX)$ 对 $\underset{nm}{X}$ 的导数。

解：因为

$$\mathrm{tr}(BX)=\sum_{i=1}^{n} b_{1i}x_{i1}+\sum_{i=1}^{n} b_{2i}x_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{n} b_{mi}x_{im}\ ,$$

所以

$$\frac{dF}{dX}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \cdots & & & \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=B^T\ .$$

顾及矩阵迹的运算规则(1-2)和(1-5)，则有如下求导公式。

（6）设　$F=\mathrm{tr}(\underset{mn}{B}\underset{nm}{X})=\mathrm{tr}(X^TB^T)$，则有

$$\frac{d\,\mathrm{tr}(BX)}{dX}=\frac{d\,\mathrm{tr}(X^TB^T)}{dX}=\frac{d\,\mathrm{tr}(XB)}{dX}$$

$$=\underset{nm}{B^T}\ . \tag{1-13}$$

例[1-9]． 已知

$$\underset{23}{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix},\quad \underset{22}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

求　$F=\mathrm{tr}(X^TAX)$　对 X 的导数。

解：

$$X^TAX=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ x_{13} & x_{23} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22} & a_{11}x_{13}+a_{12}x_{23} \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22} & a_{21}x_{13}+a_{22}x_{23} \end{pmatrix}$$

$$F=\mathrm{tr}(X^TAX)=(a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21})x_{11}+(a_{21}x_{11}+$$
$$+a_{22}x_{21})x_{21}+(a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22})x_{12}$$

$$+(a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22})x_{22}+(a_{11}x_{13}+a_{12}x_{23})x_{13}+(a_{21}x_{13}+a_{22}x_{23})x_{23},$$

按导数定义式（1-7）得

$$\frac{dF}{\underset{2\,3}{dX}}=\frac{d\,\mathrm{tr}(X^TAX)}{dX}$$

$$=\begin{pmatrix} 2a_{11}x_{11}+(a_{12}+a_{21})x_{21} & 2a_{11}x_{12}+(a_{12}+a_{21})x_{22} & 2a_{11}x_{13}+(a_{12}+a_{21})x_{23} \\ (a_{12}+a_{21})x_{11}+2a_{22}x_{21} & (a_{12}+a_{21})x_{12}+2a_{22}x_{22} & (a_{12}+a_{21})x_{13}+2a_{22}x_{23} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

$$=(A+A^T)X\ .$$

一般，有如下求导公式。

（7）设 $F=\mathrm{tr}(\underset{mn}{X^T}\underset{nn}{A}\underset{nm}{X})$，则有

$$\frac{d\,\mathrm{tr}(X^TAX)}{\underset{n\,m}{dX}}=(\underset{nn}{A}+\underset{nn}{A^T})\underset{nm}{X}\ , \tag{1-14}$$

由于向量是行矩阵或列矩阵，所以当自变量 X 为向量时，上述求导公式也是适用的。

§1—3　矩阵反演公式

在推导滤波、配置公式时，常用到一个矩阵恒等式，即所谓矩阵反演公式。本节给出它的证明。

设 A 是 n 阶非奇异方阵，即 A 的行列式 $|A|$ 不等于零，它是一个可逆阵，其逆为 A^{-1}，再设有任意的两个 $n\times m$ 阶矩阵 B 和 C，则存在下列恒等式：

$$(A+BC^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(E+C^TA^{-1}B)^{-1}C^TA^{-1}. \tag{1-15}$$

式中$(A+BC^T)$与$(E+C^TA^{-1}B)$均为非奇异阵，即它们的逆存在，E是单位矩阵。

现推证如下。令

$$D=A+BC^T,$$

将此式两边左乘以D^{-1}得

$$D^{-1}D=D^{-1}(A+BC^T),$$

或

$$E=D^{-1}A+D^{-1}BC^T.$$

用A^{-1}右乘上式得

$$A^{-1}=D^{-1}+D^{-1}BC^TA^{-1},$$

用B右乘上式得

$$A^{-1}B=D^{-1}B(E+C^TA^{-1}B),$$

用$(E+C^TA^{-1}B)^{-1}$右乘上式得

$$A^{-1}B(E+C^TA^{-1}B)^{-1}=D^{-1}B,$$

用C^TA^{-1}右乘上式得

$$A^{-1}B(E+C^TA^{-1}B)^{-1}C^TA^{-1}=D^{-1}BC^TA^{-1}$$

或

$$A^{-1}B(E+C^TA^{-1}B)^{-1}C^TA^{-1}=A^{-1}-D^{-1}.$$

顾及$D=A+BC^T$，上式就是（1-15）式，于是得证。

特殊地，令

$$\underset{nn}{A}=\underset{nn}{P^{-1}},\quad \underset{nm}{B}=\underset{nm}{H^T}\underset{mm}{R^{-1}},\quad \underset{mn}{C^T}=\underset{mn}{H},$$

则由(1-15)式可得下列矩阵恒等式：

$$(P^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}=P-PH^T(R+HPH^T)^{-1}HP. \tag{1-16}$$

在运用(1-16)式时，注意P、R、$(P^{-1}+H^TR^{-1}H)$及$(R+HPH^T)$的逆必须存在。

恒等式(1-15)、(1-16)通常称为矩阵反演公式，它常用来简化求逆计算。

将（1-16）式两边右乘H^TR^{-1}得

$$
\begin{aligned}
&(P^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1} \\
&=PH^T(R^{-1}-(R+HPH^T)^{-1}HPH^TR^{-1}) \\
&=PH^T(R+HPH^T)^{-1}((R+HPH^T)R^{-1}-HPH^TR^{-1}) \\
&=PH^T(R+HPH^T)^{-1}(E+HPH^TR^{-1}-HPH^TR^{-1}),
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&(P^{-1}+H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1} \\
&=PH^T(R+HPH^T)^{-1} \ . \qquad (1\text{-}17)
\end{aligned}
$$

这也是一个常用的矩阵恒等式。

§1—4 数学期望和方差的性质

随机变量的数学期望就是所有可能取值的概率平均值，简称均值，它有如下性质：

（1）常数c的数学期望等于它本身，即

$$E(c)=c \ . \qquad (1\text{-}18)$$

例[1-10]. 求随机变量ξ数学期望$E(\xi)$的数学期望。

解：因ξ的$E(\xi)$为一常数，故按（1-18）式有

$$E\{E(\xi)\}=E(\xi) \ .$$

（2）常数c与ξ之积的数学期望等于c与ξ的数学期望之积，即

$$E(c\xi)=cE(\xi) \ . \qquad (1\text{-}19)$$

（3）n个随机变量ξ_1，ξ_2，$\cdots\xi_n$之和的数学期望，等于各随机变量数学期望之和，即

$$E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=E(\xi_1)+E(\xi_2)+\cdots+E(\xi_n) \ . \qquad (1\text{-}20)$$

例[1-11]. 已知观测值L加上真误差Δ等于被观测量的真值X，求L的数学期望。

解：
$$X = L + \Delta,$$
按（1-20）式得
$$E(X) = E(L) + E(\Delta),$$
因为真误差的数学期望等于零，即$E(\Delta) = 0$，真值X是一常数，故$E(X) = X$。由上式得
$$E(L) = X, \tag{1-21}$$
亦即观测值的数学期望等于被观测量的真值。

（4）随机变量的线性函数
$$F = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i$$
的数学期望为
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i\right) = a_1E(\xi_1) + a_2E(\xi_2) + \cdots + a_nE(\xi_n) . \tag{1-22}$$

例[1-12]. 已知对同一量的观测值L_1，L_2，$\cdots L_n$的数学期望均为X，即$E(L_1) = E(L_2) = \cdots = E(L_n) = X$，求算术平均值
$$x = \frac{1}{n}(L_1 + L_2 + \cdots L_n)$$
的数学期望。

解：按（1-22）式，并顾及（1-21）式由上式得
$$E(x) = \frac{1}{n}E(L_1) + \frac{1}{n}E(L_2) + \cdots + \frac{1}{n}E(L_n)$$
$$= \frac{1}{n}X + \frac{1}{n}X + \cdots + \frac{1}{n}X = X, \tag{1-23}$$