



# 高等结构动力学

陆鑫森 编著

上海交通大学出版社

# 高等结构动力学

陆鑫森 编著

上海交通大学出版社

(沪)新登字 205 号

内 容 提 要

本书为普通结构动力学(如船体振动、机械振动、工程中的振动理论等)的后续和进展。并以在随机振动、非线性振动、结构静力学和流体力学方面有一定基础知识的研究生等读者为对象。

前三章主要介绍了结构系统离散化及计算动力响应的多种方法。第四章为系统的辨识与参数估计。五至七章讲述流体结构耦合分析。第八章为离岸结构的动力响应。

本书系统完整,物理概念清楚,理论联系实际。为力学专业及有关工程专业的研究生教材,亦可供有关专业的教师、工程技术人员和研究人员的参考。

高等结构动力学

|                                        |                   |
|----------------------------------------|-------------------|
| 出 版: 上海交通大学出版社<br>(上海市华山路1954号·200030) | 印 张: 14.5         |
| 发 行: 新华书店上海发行所                         | 字 数: 357,000      |
| 排 版: 上虞科技外文印刷厂                         | 版 次: 1992年12月 第1版 |
| 印 刷: 立信常熟印刷联营厂                         | 印 次: 1992年12月 第1次 |
| 开 本: 787×1092(毫米) 1/16                 | 印 数: 1—1,480      |
|                                        | 科 目: 284—295      |

ISBN 7-313-01134-2/TK

定 价: 4.10 元

# 前 言

随着电子计算机和测试技术的突飞猛进,近一二十年来结构动力学得到了很大的发展。主要表现在:① 数值分析方法取得巨大进展,许多过去根本无法计算的复杂的结构动力学问题现在大多能在计算机上方便地得到解答;② 数学模型的建立日臻完善,通过对实际结构或结构模型的实验研究和采用系统辨识、参数估计等理论与实验相结合的方法能使所建立的数学模型更符合实际情况;③ 结构动力分析已扩展至与周围介质的耦合分析,流体(包括气体和液体)与结构,土壤与结构的耦合分析已在工程中得到广泛的应用;④ 基于可靠性分析的结构动力优化设计和结构系统的主动控制等对提高工程结构的动力特性和经济性有重要作用的新方法、新技术的研究方兴未艾,可望在不远的将来取得显著的成果。不难看出,现代结构动力学所涉及的内容已远远超出传统结构动力学的范畴。为了使学能较系统地学到结构动力学的最新成就,上海交通大学船舶及海洋工程系自1982年起开设了“高等结构动力学”,作为结构力学专业研究生的必修课,54学时。本教材系根据这一教学要求编写的。书名沿用了课程名称,在结构动力学前冠以高等两字主要是用以区别大学本科的结构动力学,表明是结构动力学的后续或进展。一般的结构动力学教材主要是讲述一个自由度系统、多自由度系统和弹性体振动的基本理论和计算固有频率、固有振形和结构动力响应的一些常用的方法。本教材在编写时认为读者已学过这些传统的结构动力学的基础知识,尽管所学的课程的名称也许不是称为结构动力学,例如,船体振动学、机械振动等。并认为读者在随机振动、非线性振动、结构静力学和流体力学方面已有一定的基础。如果读者缺少这方面的基础知识,则在阅读有关章节时最好事先进修一下有关的内容。

本书除绪论外共有8章,第1章讲结构系统的离散化,讨论在空间域内将结构动力系统离散成有限自由度系统的方法:加权残量法、变分法、有限元法和边界元法等。考虑到读者已学过结构静力学和有限元法等课程,本章着重讨论结构系统的动力学问题。第2章讨论结构系统离散成多自由度系统后的动力响应计算。引入了用状态矢量表示的运动方程式。这对阐明有阻尼系统的模态分析理论、系统的辨识和控制以及动力响应的计算等均会带来许多方便之处。第3章讲述对大型复杂结构动力系统有重要意义的动力学结构法。第4章是系统辨识与参数估计,讲述结构动力学的“逆问题”,即通过测定结构系统的激励(输入)和响应(输出)来建立能反映该系统实际动力特性的数学模型。第5、6、7章讲述流体结构耦合分析,分别论述可不计流体分离和粘性的大体积结构的流体—结构耦合分析,结构在定常流场内的涡激振动、舞动和输液管振动以及结构在波浪中的动力分析。第8章是离岸结构的动力响应。对大型复杂的海洋平台结构的动力分析作了较全面、扼要的介绍。

迄今已有八届研究生用过这本教材的油印本,在此作者要感谢研究生们对本书所提出的宝贵意见,特别是刘勇辉博士和吴明康博士,他们在当研究生时和后来主讲这门课时曾仔细地阅读和校对了书稿,并给了我很多帮助。

本书初稿是1982年写就的,1985年修改过一次,此次出版又作了一些压缩和删节。希望

# 目 录

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 绪论                 | 1   |
| 第 1 章 结构系统的离散化     | 4   |
| § 1.1 部分离散化        | 4   |
| § 1.2 加权残量法        | 4   |
| § 1.3 变分法          | 12  |
| § 1.4 有限元法         | 19  |
| § 1.5 边界元法         | 21  |
| 第 2 章 结构系统的动力响应    | 28  |
| § 2.1 状态方程及其解      | 28  |
| § 2.2 模态分析法        | 32  |
| § 2.3 数值解法         | 46  |
| § 2.4 频域解法         | 52  |
| 第 3 章 动力子结构法       | 55  |
| § 3.1 引言           | 55  |
| § 3.2 固定界面法        | 55  |
| § 3.3 自由界面法        | 63  |
| § 3.4 与实验模态分析技术的结合 | 79  |
| § 3.5 Lanczos 坐标法  | 80  |
| § 3.6 主、从系统的耦合振动   | 84  |
| 第 4 章 振动系统的参数识别    | 83  |
| § 4.1 参数识别         | 88  |
| § 4.2 时域分析         | 89  |
| § 4.3 复模态理论        | 98  |
| § 4.4 频域分析         | 102 |
| 第 5 章 流体—结构耦合振动    | 115 |
| § 5.1 有限元法         | 115 |
| § 5.2 边界元法         | 136 |
| § 5.3 双渐近法         | 145 |
| 第 6 章 流致振动         | 155 |
| § 6.1 旋涡引起的振动      | 155 |
| § 6.2 跳跃振动         | 176 |
| § 6.3 输液管振动        | 185 |
| 第 7 章 波浪引起的振功      | 190 |

|              |                  |            |
|--------------|------------------|------------|
| § 7.1        | 波浪载荷             | 190        |
| § 7.2        | 固定的刚性柱体上的波浪力     | 192        |
| § 7.3        | 线内力的计算           | 196        |
| § 7.4        | 规则波作用下的振动        | 200        |
| § 7.5        | 波浪和潮流联合作用下的振动    | 205        |
| <b>第 8 章</b> | <b>离岸结构的动力响应</b> | <b>206</b> |
| § 8.1        | 结构的模型化           | 206        |
| § 8.2        | 数学模型             | 207        |
| § 8.3        | 确定性方法            | 214        |
| § 8.4        | 随机分析方法           | 216        |
| § 8.5        | 波浪流体力传递函数        | 218        |
| § 8.6        | 结构响应的统计评估        | 218        |
|              | 参考文献             | 221        |

# 绪 论

工程结构物在其营运中始终会受到各种动载荷的作用。随着科技的进步,现代结构的重量和刚度不断减小,使结构动力分析的问题日臻重要。而正是结构动力学的发展使现代工程结构能更好地满足使用要求,既经济又安全可靠。

现代结构动力学的内容可分为以下六个方面:

1. 外载荷分析;
2. 结构系统的动力响应;
3. 结构系统的辨识和参数估计;
4. 容许标准和可靠性分析;
5. 结构系统的控制;
6. 结构动力优化设计。

结构系统所受到的外载荷可分为确定性的和随机性的两大类。前者又可以分为周期性的和瞬态的。各种动力机械、旋转机械,例如螺旋桨等所产生的激励大多是周期性的;碰撞、冲击、爆炸冲击波等短时力或脉动力以及机器的启动和制动等引起的非周期性激励均属于瞬态的载荷。风载荷、波浪载荷和地震载荷等环境载荷以及车辆等在路面或轨面上运动所引起的载荷是随机性载荷的典型例子。当载荷是通过结构周围的介质作用到或传递给结构时,载荷的大小、分布,甚至性质均可受到结构响应(运动或振动)的影响,形成响应对载荷的反馈,此时需分析结构及其周围介质的耦合系统(有反馈的系统),例如:结构—流体,结构—土壤,结构—电磁场和结构—温度场等耦合系统。

求解结构系统在外载荷作用下的动力响应是结构动力学中研究得最多的部分。随着计算机和计算技术的进展,这部分的内容和功能近年来发展非常迅速,许多过去无法计算、必须依靠实验测定或只能极粗略估算的问题,现在已可按工程上的精度要求通过计算解决了。一般可利用现成的较为通用的计算机应用软件或按特殊要求开发专用的计算程序,但要使结构动力响应的计算获得预期的成功,对于工程技术人员来说,最重要的是要根据计算的目的和要求将实际的结构系统模型化,建立合适的数学模型。

如果把外载荷视作结构系统的输入,则响应就是结构系统的输出。经典的结构动力分析问题,就是对给定的结构系统求响应与激励(即输出与输入)的关系。此类问题亦称为结构动力学的正问题或分析部分。

与结构系统本身的物理特性有关的参数可定义为可控变量或设计变量。例如,质量、刚度、阻尼和几何形状等,改变可控变量会使结构系统的性态发生变化,从而改变系统输出与输入的关系。结构的状态变量和响应都是可控制的,故结构系统是一种可控系统。图1为结构系统激励、响应和控制的示意图。

结构动力学的综合问题就是按照设计要求确定可控变量或设计变量使结构系统达到预期的状态,即所谓直接综合,或者达到某最优的设计目标,即所谓最优综合或最优设计。

设系统的响应为  $r(s, t)$ , 系统所受的激励为  $F(r, s, t)$ , 其中自变量  $s \in S$  和  $t \in T$  分别为

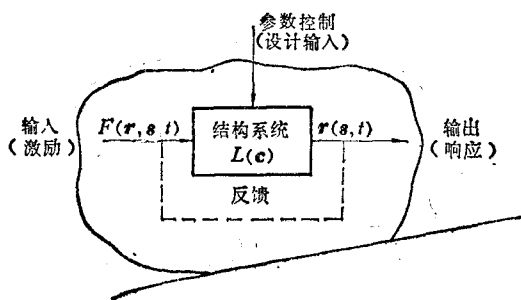


图1 结构系统输入—输出示意图

三维空间坐标矢量和时间，对于给定的结构系统在数学模型建立后，系统的输入和输出，即激励和响应的关系可表示为

$$L(c, s, t)[r(s, t)] = F(r, s, t) \quad (5)$$

式中： $L(c, s, t)$  为一数学算子矢量； $c(s, t)$  为控制参数矢量或设计矢量。

各种工程结构均有各自的结构响应的容许标准，此类标准有两方面的要求，一方面要保证结构在其使用期限内安全可靠不发生严重的损坏，另一方面要保证不引起危及人体健康以及

结构中各种仪表设备等正常营运的振动和噪声。制定这方面的标准涉及的面很广，不仅是一个工程技术问题，而且与国家的经济水平和经济政策有关。

结构系统的设计应满足按结构强度和各种营运要求制订的容许标准。这可用下列约束条件表示：

$$g(r, c) \geq b \quad (2)$$

其中也包含了设计矢量  $c$  可能受到的种种限制。结构动力优化设计就是要在满足约束条件式(2)的情况下选取  $c$  使某既定的目标函数最优化。

结构系统按其本身的特性可分为：

1.  $\begin{cases} \text{线性的——算子 } L \text{ 是线性的, 可用叠加原理;} \\ \text{非线性的——算子 } L \text{ 是非线性的, 不可用叠加原理。} \end{cases}$
2.  $\begin{cases} \text{无反馈的——激励 } F(s, t) \text{ 与响应 } r \text{ 无关, 称为“开环系统”;} \\ \text{有反馈的——激励 } F(r, s, t) \text{ 与响应 } r \text{ 有关, 称为“闭环系统”。} \end{cases}$
3.  $\begin{cases} \text{时变的——参数矢量 } c(s, t) \text{ 是时间 } t \text{ 的函数;} \\ \text{时不变的——参数矢量 } c(s) \text{ 与时间 } t \text{ 无关。} \end{cases}$

结构系统的数学模型可以有多种型式。例如，可采用微分方程和积分方程等型式，也可以将分布参数系统离散成集中参数系统，用差分法、有限元法和加权残量法等建立代数方程型的数学模型。在具体情况下可能某一种数学模型较其他型式的模型更合适更便于求解，数学模型一旦建立就可采用现代的计算技术对系统作分析或综合。显然，分析或综合的准确程度是与数学模型能否较真实地反映所模拟的结构系统的动力特征有关的。结构系统的模型化，数学模型的建立是结构动力学中十分关键的工作，合理的抽象和简化能更好地反映事物的本质，并使计算工作量和计算费用大大节省。

现代结构动力学的另一个十分重要的组成部分是结构系统的辨识和参数估计，即所谓结构动力学的逆问题或黑箱问题，即假设结构系统的响应  $r$  和激励  $F$  是已知的用实验方法测得，而对结构系统本身完全不清楚或知道得不完全，需根据测得的输入和输出求出合适的数学模型  $L(c)$  (系统辨识) 或系统的物理参数  $c$  (参数估计)，这对检验在设计和分析中所采用的数学模型和物理参数是否适当，显然是十分重要的。结构系统的阻尼参数通常无法用理论分析或简单的材料试验获得，必须用参数估计的方法求得。系统辨识和参数估计在结构系统的损伤检测和故障诊断方面的应用也已引起注意，这方面的研究工作正在积极进行之中。



# 第 1 章 结构系统的离散化

## § 1.1 部分离散化

结构系统的动力学问题通常可用偏微分方程描述并按给定的边界条件和初始条件求解,但实际上只有极少数很简单的结构系统如弦、欧拉梁等,才能用数学解析的方法求得‘精确解’。对于比较复杂一点的结构系统或边界形状不规则的结构,数学解析解是得不到的。为了能有效地应用现代最有力的计算工具——数字式电子计算机来求得具有足够精度的近似解,必须改变用偏微分方程建立的数学模型,使之成为只包含基本运算的代数方程的形式。为此,就要对在空间域和时间域上连续的结构动力系统离散化。

虽然对结构动力学的问题可以同时和时间域和空间域上进行离散化,但较为方便的是采用‘部分离散化’,即‘半离散化’的方法,在空间域中先行离散化,将偏微分方程式离散成一组常微分方程,然后再对此常微分方程组在时域内进行离散化,或者直接采用解析解。

本章将讨论结构系统在空间域内的离散技术,在时间域内离散化问题将在第 2 章中讨论。

## § 1.2 加权残量法

加权残量法是一种将未知函数在其定义域内用基函数展开的求解微分方程式的近似方法。对于几何形状规则的不太复杂的结构系统,这是一种比较方便和有效的、将连续介质系统离散成有限自由度系统的方法。

### 1. 微分方程边值问题的加权残量近似法

讨论满足下列微分方程式和边界条件的结构系统的离散化问题

$$L[r(s,t)] = F(s,t) \quad \text{在空间域 } S \text{ 内} \quad (1.2.1)$$

$$g[r(s,t)] = h(t) \quad \text{在边界 } B \text{ 上} \quad (1.2.2)$$

式中:  $r(s,t)$  为响应函数;  $F(s,t)$  为激励函数;  $h(t)$  为边界上的给定函数;  $L$  和  $g$  为数学算子;  $s \in S, t \in T$  分别为空间和时间坐标。

设  $r(s,t)$  可近似地用一组独立的基函数  $N_j(s) (j=1,2,\dots)$  表示,即

$$r(s,t) \cong \tilde{r}(s,t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(s) \quad (1.2.3)$$

式中:  $q_j(t)$  是待定参数,与空间坐标  $s$  无关,可视为广义坐标;  $N_j(s)$  是一完备的函数族,当基函数的数目  $n \rightarrow \infty, \tilde{r}(s,t) \rightarrow r(s,t)$ 。

显然,有限个基函数所表示的近似值  $\tilde{r}$  不满足微分方程和边界条件。将  $\tilde{r}(s,t)$  代入式 (1.2.1) 和式 (1.2.2),则在空间域  $S$  上和边界  $B$  上会分别有残量  $R_s$  和  $R_B$ ,且有

$$R_s = L[\tilde{r}] - F \quad (1.2.4)$$

$$R_B = g[\tilde{r}] - h \quad (1.2.5)$$

式中  $R_S$  和  $R_B$  均为空间坐标  $s$  的函数, 分别表征在  $S$  域上和边界  $B$  上的误差量。加权残量法就是用一组权函数  $w_i(s)$  使误差量  $R_S$  和  $R_B$  在  $S$  内和  $B$  上加权平均值等于零, 即

$$\int_S w_i R_S ds + \int_B \bar{w}_i R_B dB = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.6)$$

边界上的权函数  $\bar{w}_i(s)$  和空间域内的权函数  $w_i(s)$  可以独立地选取。

对基函数  $N_j(s)$  的完备性的要求, 即保证  $n \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{r} \rightarrow r$  的要求, 现在可表示成当  $n \rightarrow \infty$ , 对所有的  $i$ , 式(1.2.6)均成立。实际上, 这就保证了在所有  $S$  和  $B$  上,  $R_S \rightarrow 0$  和  $R_B \rightarrow 0$ , 在  $N_j(s)$ ,  $w_i(s)$  和  $\bar{w}_i(s)$  选定的情况下, 式(1.2.6)是一组广义坐标  $q_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 的常微分方程组。如果  $L$  和  $g$  为线性算子, 则此为一线性常微分方程组; 如果  $L$  和  $g$  不是线性的, 即系统是非线性的, 则此为一非线性常微分方程组。这样, 连续系统就离散成  $n$  个自由度系统。

**例题 1.1** 试将两端刚性固定的 Euler 梁的自由振动离散成多自由度系统的振动(图 1.1)。

设不均匀变断面梁的剖面惯性矩为  $I(y)$ , 材料的杨氏弹性模量为  $E$ , 单位长度质量为  $m(y)$ , 长度为  $l$ , 则其无阻尼自由振动微分方程式为

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ EI(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + m(y) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.7)$$

两端刚性固定的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } y = 0 \quad v(0, t) = \frac{\partial v(0, t)}{\partial y} = 0 \\ \text{当 } y = l \quad v(l, t) = \frac{\partial v(l, t)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

由式(1.2.6)即得

$$M\ddot{q} + Kq = 0$$

其中, 刚度矩阵  $K$  的第  $i, j$  元为

$$\begin{aligned} k_{ij} = \int_l w_i(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ EI(y) \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right] dy + \bar{w}_i(0) N_j(0) \\ + \bar{w}_i(l) N_j(l) + \bar{w}_i(0) \frac{\partial N_j(0)}{\partial y} + \bar{w}_i(l) \frac{\partial N_j(l)}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

质量矩阵  $M$  的第  $i, j$  元为

$$m_{ij} = \int_l w_i(y) m(y) N_j(y) dy \quad (1.2.10)$$

在实际应用加权残量法时, 常常选用满足边界条件的基函数, 在这种情况下,  $R_B = 0$ , 因而式(1.2.6)中第二个积分等于零, 故有

$$\int_S w_i R_S ds = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.11)$$

通常, 对于具有线性边界条件的系统( $g$  是线性算子)其近似解可写为

$$\tilde{r}(s, t) = r_b(s, t) + \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(s) \quad (1.2.12)$$

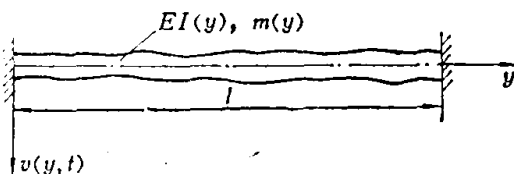


图 1.1 变断面梁的横向振动

式中,函数  $r_b(s,t)$  和基函数  $N_j(s)$  应满足

$$\left. \begin{aligned} g[r_b(s,t)] &= h(t) \\ g[N_j(s)q_j(t)] &= 0 \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned} \right\} \quad (1.2.13)$$

这样,近似解  $\tilde{r}(s,t)$  就对所有广义坐标  $q_j(t)$  均满足边界条件式 (1.2.2), 其函数  $N_j(s)$  亦称为形状函数或试验函数。为使离散系统方程式 (1.2.11) 之积分成立,  $N_j(s)$  在  $S$  域内应满足一定的连续条件, 即应使算子  $L$  中  $\tilde{r}(s,t)$  对空间坐标  $s$  的各阶导数存在或积分有界。

对于线性振动系统,算子  $L$  可由三部分组成,即

$$L = L_K + L_C D + L_M D^2 \quad (1.2.14)$$

式中:  $L_K, L_C$  和  $L_M$  为仅含对空间坐标  $s$  偏导的算子,  $D$  为对时间  $t$  的一次偏导算子,  $D = \partial/\partial t, D^2 = \partial^2/\partial t^2$ , 因而残量

$$\begin{aligned} R_s &= L \left[ r_b + \sum_{j=1}^n q_j N_j \right] - F \\ &= L[r_b] + L \left[ \sum_{j=1}^n q_j N_j \right] - F \\ &= \sum_{j=1}^n \{ q_j L_K[N_j] + \dot{q}_j L_C[N_j] + \ddot{q}_j L_M[N_j] \} \\ &\quad + L_K[r_b] + L_C[\dot{r}_b] + L_M[\ddot{r}_b] - F \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

将上式代入式 (1.2.11), 得

$$M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (1.2.16)$$

式中:  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  和  $\ddot{\mathbf{q}}$  分别为广义坐标、速度和加速度矢量。质量矩阵  $M$ , 阻尼矩阵  $C$  和刚度矩阵  $K$  的第  $i, j$  个元分别为

$$\left. \begin{aligned} m_{i,j} &= \int_S w_i L_M[N_j] ds \\ c_{i,j} &= \int_S w_i L_C[N_j] ds \\ k_{i,j} &= \int_S w_i L_K[N_j] ds \end{aligned} \right\} \quad (1.2.17)$$

广义力矢量  $\mathbf{f}$  的第  $i$  元为

$$f_i = \int_S w_i (F - L_K[r_b] - L_C[\dot{r}_b] - L_M[\ddot{r}_b]) ds \quad (1.2.18)$$

在一般情况下,  $M, C, K$  均为满矩阵, 而且是不对称的。

**例题 1.2** 试将具有内、外线性阻尼的两端简支梁的强迫振动离散成多自由度系统的振动(图 1.2)。

具有内、外线性阻尼的 Euler 梁的横向振动微分方程式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ EI(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_s(y) I(y) \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} \right. \\ \left. + c(y) \frac{\partial v}{\partial y} + m(y) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = F(y, t) \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

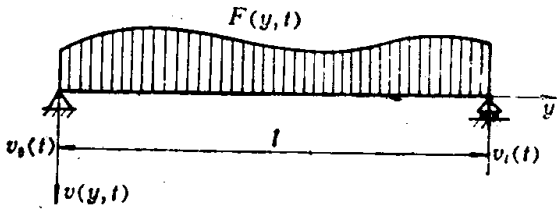


图 1.2 简支梁的强迫振动

式中:  $E$  为杨氏模量;  $I(y)$  为剖面惯性矩;  $c_s(y)$  和  $c(y)$  分别为内、外阻尼系数;  $m(y)$  为单位长度质量;  $F(y, t)$  为分布的动载荷, 边界条件为

$$\begin{aligned} \text{当 } y=0, \quad v(0,t) &= v_0(t), \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \\ \text{当 } y=l, \quad v(l,t) &= v_l(t), \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{y=l} = 0 \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

取满足边界条件式(1.2.20)的  $v_b(y,t)$  和  $N_i(y)$  为

$$\begin{aligned} v_b(y,t) &= v_0(t)[1 - (y/l)] + v_l(t)(y/l) \\ N_i(y) &= \sin(j\pi y/l) \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

从微分方程式(1.2.19)可知

$$\left. \begin{aligned} L_K &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ EI(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[ \quad \right] \\ L_C &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ c_s(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] + c(y) \right\} \left[ \quad \right] \\ L_M &= m(y) \left[ \quad \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.2.22)$$

再取权函数

$$w_i = \sin(i\pi y/l) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.2.23)$$

将式(1.2.21)、式(1.2.22)和式(1.2.23)代入式(1.2.17)和式(1.2.18)即得方程式(1.2.16)的  $M$ 、 $K$ 、 $C$  和  $f$  阵, 它们的元可分别表示为

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_l \sin \frac{i\pi y}{l} m(y) \sin \frac{j\pi y}{l} dy \\ c_{ij} &= \int_l \sin \frac{i\pi y}{l} \left\{ c(y) \sin \frac{j\pi y}{l} - \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ c_s(y) I(y) \sin \frac{j\pi y}{l} \right] \right\} dy \\ k_{ij} &= - \int_l \sin \frac{i\pi y}{l} \cdot \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ EI(y) \sin \frac{j\pi y}{l} \right] dy \\ f_i &= \int_l \sin \frac{i\pi y}{l} F(y,t) dy - \int_l \sin \frac{i\pi y}{l} c(y) \\ &\quad \left[ \dot{v}_0(t) \left[ 1 - \frac{y}{l} \right] + \dot{v}_l(t) \frac{y}{l} \right] dy \\ &\quad - \int_l \sin \frac{i\pi y}{l} m(y) \left[ \ddot{v}_0(t) \left[ 1 - \frac{y}{l} \right] + \dot{v}_l(t) \frac{y}{l} \right] dy \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

## 2. 加权残量法的“弱形式” Weak Form 和自然边界

加权残量式(1.2.6)中第一项的积分式中包含微分算子  $L$ , 用分部积分法(Green 公式)将式(1.2.6)化为

$$\begin{aligned} &\int_S L_w[w_i] \cdot L_r[\tilde{r}] ds + \int_B w_i L_B[\tilde{r}] dB \\ &- \int_S w_i F ds + \int_B \bar{w}_i g[\tilde{r}] dB - \int_B \bar{w}_i h dB = 0 \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

式中,  $L_w$ 、 $L_r$  和  $L_B$  为微分算子, 它们的微分阶数均比原来的算子  $L$  低, 这样, 在选取  $\tilde{r}$  的形状函数(试验函数)时, 对这些函数的连续性阶数的要求就可以降低些。但对权函数, 因为出现了  $L_w$  算子, 其连续性的要求就提高了。式(1.2.26)称为加权残量法的弱形式表达式对于某些边界条件, 在适当选取边界积分中的权函数  $\bar{w}_i$  后可使上式中含  $g[r]$  和  $L_B[r]$  的边界积分消除

掉,或部分地消除掉,此类边界条件亦称为自然边界条件。

**例题 1.3** 悬臂梁的自由振动离散化(图 1.3)。

用弱形式的加权残量表达式将不均匀变断面悬臂 Euler 梁的自由振动方程式和边界条件离散化。

Euler 梁自由振动微分方程式与例题 1.1 中相同,见式(1.2.7),悬臂梁的边界条件为

$$\text{当 } y=0, v(0,t) = \frac{\partial v(0,t)}{\partial y} = 0$$

$$\text{当 } y=l, EI(l) \frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} EI(l) \frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2.27)$$

按式(1.2.6)得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left( \int_0^l w_i \frac{\partial^2}{\partial y^2} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} dy + \bar{w}_{i0} N_j \Big|_0 + \bar{w}_{i1} \frac{\partial N_j}{\partial y} \Big|_0 \right. \\ & \quad \left. + \bar{w}_{i2} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \Big|_l + \bar{w}_{i3} \frac{\partial}{\partial y} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \Big|_l \right) q_j \\ & \quad + \sum_{j=1}^n \left( \int_0^l w_i m N_j dy \right) \ddot{q}_j = 0 \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

对上式中第一个积分作两次分部积分,即

$$\begin{aligned} \int_0^l w_i \frac{\partial^2}{\partial y^2} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} dy &= \left[ w_i \frac{\partial}{\partial y} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right]_0^l - \left[ \frac{\partial w_i}{\partial y} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right]_0^l \\ & \quad + \int_0^l \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} dy \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

若取

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{i3} &= -w_i(l) \\ \bar{w}_{i2} &= \frac{\partial w_i}{\partial y} \Big|_l \end{aligned} \right\} \quad (1.2.30)$$

则式(1.2.28)中自由端( $y=l$ 处)的动力边界条件项就消去了,这样,如果形状函数  $N_j(y)$  和函数  $w_i(y)$  均取得满足几何边界条件,即

$$\left. \begin{aligned} N_j(0) &= \frac{\partial N_j}{\partial y} \Big|_0 = 0 & j=1,2,\dots,n \\ w_i(0) &= \frac{\partial w_i}{\partial y} \Big|_0 = 0 & i=1,2,\dots,n \end{aligned} \right\} \quad (1.2.31)$$

则将式(1.2.29)代入式(1.2.28)后得

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0 \quad (1.2.32)$$

其质量阵  $\mathbf{M}$  和刚度阵  $\mathbf{K}$  的第  $i, j$  元分别为

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_0^l w_i m N_j dy \\ k_{ij} &= \int_0^l \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} dy \end{aligned} \right\} \quad (1.2.33)$$

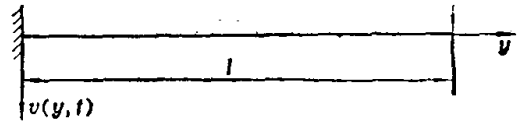


图 1.3 悬臂梁自由振动

### 3. Galerkin 法

权函数的取法不同可形成各种不同的近似方法,著名的 Galerkin 法实际上就是一种把权函数取得与基函数相同的加权残量法。按 Galerkin 法取

$$w_i(s) = N_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.34)$$

并使之满足所有的边界条件,则线性系统离散化后的质量阵  $\mathbf{M}$ , 阻尼阵  $\mathbf{C}$  和刚度阵  $\mathbf{K}$  的第  $i, j$  元为(参看式(1.2.17))

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_S N_i L_M[N_j] ds \\ c_{ij} &= \int_S N_i L_C[N_j] ds \\ k_{ij} &= \int_S N_i L_K[N_j] ds \end{aligned} \right\} \quad (1.2.35)$$

例题 1.2 中所用的方法就是 Galerkin 法,见式 (1.2.24)。如果采用弱形式的加权残量法表达式,则用 Galerkin 法对系统内、外阻尼的 Euler 梁振动系统离散化后,  $m_{ij}, c_{ij}, k_{ij}$  为

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_l N_i m N_j dy \\ c_{ij} &= \int_l N_i c N_j dy + \int_l \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} c_i I \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} dy \\ k_{ij} &= \int_l \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} EI \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} dy \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

不难看出,此时  $\mathbf{M}, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  均为对称矩阵。

### 4. 配点法

这种方法取 Dirac  $\delta$  函数作为权函数。

$$w_i(s) = \delta(s - s_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.37)$$

式中,  $s_i$  是所选定的要配置的点的坐标。用这种方法对线性振动系统离散化后,  $m_{ij}, c_{ij}$  和  $k_{ij}$  分别为(参见式((1.2.17))

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_S \delta(s - s_i) L_M[N_j(s)] ds = L_M[N_j(s_i)] \\ c_{ij} &= \int_S \delta(s - s_i) L_C[N_j(s)] ds = L_C[N_j(s_i)] \\ k_{ij} &= \int_S \delta(s - s_i) L_K[N_j(s)] ds = L_K[N_j(s_i)] \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

力矢量  $\mathbf{f}$  的元为(见式(1.2.18))

$$\begin{aligned} f_i &= \int_S \delta(s - s_i) \{ F(s, t) - L_K[r_b(s, t)] - L_C[\dot{r}_b(s, t)] - L_M[\ddot{r}_b(s, t)] \} ds \\ &= F(s_i, t) - L_K[r_b(s_i, t)] - L_C[\dot{r}_b(s_i, t)] - L_M[\ddot{r}_b(s_i, t)] \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

这种方法实际上是保证在所有的配置点  $s_i$  上满足微分方程式。同样,也可在边界上设配置点使边界条件也满足,由上式可以看出此法的优点是配置点的选取很灵活,在计算  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  和  $\mathbf{f}$  时毋需对  $S$  求积,但  $\mathbf{M}, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  是非对称的。

### 5. 子域配置法

将空间域  $S$  划分成若干个子域  $S_i$ , 即

$$S = \sum_{i=1}^n s_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.40)$$

并取权函数

$$w_i(s) = \begin{cases} 1 & S \in s_i \\ 0 & S \notin s_i \end{cases} \quad (1.2.41)$$

用此种权函数的加权残量法称为子域配置法。对于线性振动系统,由式(1.2.17)和式(1.2.18)可得

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_{s_i} L_M[N_j] ds_i & i &= 1, 2, \dots, n \\ c_{ij} &= \int_{s_i} L_C[N_j] ds_i & j &= 1, 2, \dots, n \\ k_{ij} &= \int_{s_i} L_K[N_j] ds_i \\ f_{ij} &= \int_{s_i} (F - L_K[r_b] - L_C[r_b]) ds_i \end{aligned} \right\} \quad (1.2.42)$$

这种方法实际上就是在各子域  $s_i$  上残量平均等于零,将子域划分得越多、越小就越接近于各处都满足微分方程式。可以说这是配点法的一种拓广。

#### 6. 最小二乘法

这是一种变分法与加权残量法相结合的方法。定义残量  $R$  的乘方和为误差函数或目标函数  $E$ ,即

$$E = \int_s R^2(Q) ds \quad (1.2.43)$$

式中

$$Q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T \quad (1.2.44)$$

为广义坐标矢量,按下列使目标函数  $E$  极小的条件可把连续系统离散化,即

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.45)$$

或

$$\int_s \frac{\partial R}{\partial q_i} R(Q) ds = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.46)$$

可见,这种方法实际上就是取权函数

$$w_i = \frac{\partial R}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.47)$$

**例题 1.4** Euler 梁无阻尼自由振动的离散化问题。

梁自由振动微分方程式为

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} EI(y) \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} + m(y) \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.48)$$

其解为

$$v(y, t) = \varphi(y) \sin \lambda t \quad (1.2.49)$$

式中,  $\lambda$  为固有振动频率。

将上式代入微分方程得