

高等学校教学参考书

有限单元体法基础

冯肇华 编著

吉林人民出版社

高等学校教学参考书

有限单元体法基础

youxian danyuanti fa jichu

冯肇华 编著

吉林人民出版社

高等学校教学参考书
有限单元体法基础
冯肇华 编著

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
浑江市印刷厂印刷

850×1168毫米32开本 9.5印张 插页2 222,000字
1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷
印数：1—3,890册
统一书号：13091·164 定价：1.80元

内 容 简 介

本书主要介绍有限单元体法的基本理论及其应用。全书以平面问题为重点，同时介绍了机械设计中常见的轴对称、三维空间问题。对等参数单元体也作了较详细的讨论。为了照顾不同读者的需要，书中还对矩阵运算、大规模线性代数方程组解法和弹性理论基础作了介绍。

本书可供从事机械和土建设计计算技术人员、大学高年级学生、研究生等学习和参考，也可作为“有限单元体法”短训班教材。

序 言

为了使机器正常地工作，每一个零、部件都必须有足够的强度、刚度；为了满足这一要求，在设计时应进行应力分析。五十年代中期，随着大型快速电子计算机的迅速发展，在经典力学基础上发展起来了一种新的应力分析方法——有限单元体法。它能解决许多惯用力学方法难以解决的问题，快速、精确地对零、部件或整机进行详细地应力分析。有关有限单元体法的第一批论文发表于五十年代中期，到现在不过短短的二十余年，但它使得许多设计、计算方法发生了根本性的变革。从六十年代初开始，这一方法就被广泛的用于宇航、飞机、船舶、一般机械、巨型建筑、水工设施等设计计算中，近年来又被用于解决流体、电磁场等非应力分析问题，并取得了很好的成果。

近年来我国有关部门曾举办了各种形式的“有限单元体法”学习班。许多高等院校已为研究生和高年级学生开设了这门课程。作者曾在为吉林工业大学部分教师、长春第一汽车制造厂、险峰机床厂举办的讲座中讲授过“有限单元体法”。这本书就是以这三个讲座班的讲稿为基础编写而成的。为了顾及到具有不同文化程度的工程技术人员和大学生阅读，作者尽量用比较熟悉的语汇和方法来阐述“有限单元体法”的基本知识。

凡工科教学大纲未涉及到的内容在本书中均作了介绍。书中阐述某些理论和推导某些公式的方法与常见文献略有差异。有些地方本书所用方法可能要麻烦一些，这主要是为了使读者易于接受，并使全书前后处理方法统一，使读者能得到一个完整的概念。要想在这样一本书中包含有限单元体法的全部知识是不可能的。作者只希望读者在学完本书后能掌握有限单元体法的基本知

识，解决一些较简单的实际问题，并为今后进一步学习打下基础。

本书可供工程技术人员、研究生、大学生等学习与参考，也可作为“有限单元体法”短训班的教材。在编写时已考虑了不同需要，除第四章外，各章基本上是独立的。由于研究生已学过线性代数和弹性力学，因此用作研究生教材时可以删去一、二、十章。在用作短训班教材或自学时，可以在学完第四章后，根据情况选学以后的各章节。

作者在编写过程中虽然做了一些努力，但错误之处在所难免，望批评指正。

作者 1983. 1

目 录

序

第一章 引言 (1)

第二章 矩阵的基本知识

§2—1 矩阵定义 (5)

§2—2 矩阵相等 (9)

§2—3 矩阵加减法 (10)

§2—4 矩阵与数相乘 (10)

§2—5 矩阵与矩阵相乘 (11)

§2—6 矩阵的转置 (17)

§2—7 逆矩阵 (18)

§2—8 矩阵的分块 (20)

§2—9 矩阵的微分和积分法 (22)

第三章 弹性力学的基本知识

§3—1 一点的应力状态 (24)

§3—2 应变与位移之间的关系 (26)

§3—3 应力与应变间的关系 (30)

§3—4 平衡微分方程 (32)

§3—5 应力的边界条件 (35)

§3—6 虚功原理 (37)

第四章、平面问题

§4—1 平面应力问题 (45)

§4—2 平面应变问题 (48)

§4—3 将零件划分为单元体 (51)

§4—4 单元体刚度分析 (55)

§4—5 由节点平衡组成整体刚度矩阵 (72)

§4—6	用虚功原理建立整体刚度矩阵	(79)
§4—7	整体刚度矩阵的特性	(83)
§4—8	形成外载荷列阵	(86)
§4—9	位移边界条件	(95)
§4—10	计算位移与应力	(98)
§4—11	解题方法小结	(99)
§4—12	解答的收敛性	(109)

第五章 实际计算中的若干问题

§5—1	力学模型	(111)
§5—2	单元体和节点的编号	(130)
§5—3	输出数据的整理	(139)
§5—4	如何判断计算结果是否正确	(146)

第六章 精度较高的平面单元体

§6—1	线性边缘位移矩形单元体	(148)
§6—2	线性应力假设矩形单元体	(160)
§6—3	六节点三角形单元体	(167)
§6—4	如何选择合适的单元体	(173)

第七章 轴对称问题

§7—1	轴对称问题中的应力与应变	(175)
§7—2	单元体刚度分析	(181)
§7—3	整体刚度矩阵	(192)
§7—4	外载荷列阵	(193)
§7—5	实例	(197)

第八章 三维问题

§8—1	单元体刚度分析	(202)
§8—2	整体刚度矩阵与外载荷列阵	(210)
§8—3	精度较高的单元体	(218)
§8—4	实例	(220)

第九章 等参数单元体

§9—1	曲线坐标	(223)
§9—2	四节点四边形平面等参数单元体	(232)
§9—3	精度更高的四边形平面等参数单元体	(241)
§9—4	八节点三维六面体等参数单元体	(247)
§9—5	二十节点三维六面体等参数单元体	(255)
§9—6	高斯积分	(258)

第十章 线性方程组解法

§10—1	高斯消去法	(266)
§10—2	乔列斯基方法	(271)
§10—3	平方根法	(281)
§10—4	LDL ^T 法	(284)
§10—5	三种分解法之间的关系	(286)
§10—6	简单迭代法与高斯—赛得尔方法	(288)
§10—7	超松弛法	(291)

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

第二章 矩阵的基本知识

矩阵是有限单元法计算中的一个极为有效的工具。它可以使许多繁杂的公式变得极为简洁，并便于编制电子计算机程序。本章将给出有关矩阵的一些基本知识，其重点在矩阵运算方面。这些运算在以后各章中将用得很多。对于某些定理的证明，我们不详细叙述。

§2—1 矩阵定义

有限单元体法常需要计算含有数百个以上未知数的线性方程组。初等数学中常用的书写方法较为麻烦，有改进的必要。我们来看一个三元线性方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

不难看出，每一个方程中，未知量都是 x_1, x_2, x_3 ，不同的仅是未知数前的系数及常数项。我们把它记为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

(2-2) 中由 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}, x_1, x_2, x_3, b_1, b_2, b_3$ 构成的三个数表我们称之为矩阵。引入矩阵的概念，不仅在书写上简便，而且给运算、编制程序等许多方面带来很多好处。下面我们给出矩阵的定义。

矩阵定义 设有 $m \times n$ 个数， $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m), (j=1, 2, \dots, n)$ 排成一个 m 行 n 列的矩形表格。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

则这个表格叫矩阵。表中任一项 a_{ij} 称为矩阵第 i 行 j 列的元素（横向为行，纵向为列）。 a_{ij} 第一个附码为行号，第二个为列号。

(2-3) 中共有 m 行 n 列 $m \times n$ 个元素。

必须注意，矩阵和初等代数中的行列式完全不同。对于行列式，我们可以按照一定的规则去计算它的值，这是一个给定的数。而矩阵则是若干个数组成的数表。

矩阵常用方括号 $[]$ 来表示。可以把元素写在 $[]$ 内表示一个矩阵，如 (2-3) 右端所示，也可简记作 $[A]$ 或用黑体字符 A 表示，如 (2-3) 左端所示。

对行列式，我们仍用两条竖线表示，如：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2-4)$$

下面我们给出几个常见的特殊矩阵的名称。

方阵 若矩阵的行数与列数相等，即 $m = n$ ，数表成为一个正方形表格，称为方阵。设方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

要特别注意，不要把方阵与行列式相混。

由 A 中元素按同样行列顺序构成的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为与矩阵 A 对应的行列式，或矩阵 A 的行列式，简记作 $|A|$ 或 $\det A$ 。

A 中由右上角到右下角的对角线称为主对角线，而其上的元素称为主对角线元素，或主元素，即 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 。

行矩阵 若矩阵仅有一行，即 $m=1$ ，成为 $[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]$ 形，则称之为行矩阵。

列矩阵 若矩阵仅有一列，即 $n=1$ ，矩阵成 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ 的形式，

则称为列矩阵，对于列矩阵，常用 $\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$ 代替 $[\]$ ，写成 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

零矩阵 各元素全为零的矩阵称为零矩阵。

对称矩阵 设有方阵 A ，其对称于主对角线的元素相等，即 $a_{ij} = a_{ji}$ ，称为对称矩阵。

对角矩阵 除主对角线元素外，其余元素均为零的方阵称为对角矩阵。例如：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

单位矩阵 若对角矩阵各主元素为 1，则称为单位矩阵。例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上三角形矩阵与下三角形矩阵 若对角线下方各元素均为零，则此矩阵称为上三角形矩阵。若对角线上方诸元素为零，则称为下三角形矩阵。例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

为上三角形矩阵。而

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

为下三角形矩阵。

若上三角形矩阵主对角线元素均为 1，则称为单位上三角形矩阵。如：