高等学校教学参考书

有限单元体法基础

冯攀华 编著

吉林人民出版社

高等学校教学参考书

有限单元体法基础

youxian danyuanti fa jichu

冯肇华　编著

吉 林 人 民 出 版 社

高等学校教学参考书
有限单元体法基础
冯肇华 编著
*
吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
浑江市印刷厂印刷

850×1168毫米32开本 9.5印张 插页2 222,000字
1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷
印数：1—3,890册
统一书号：13091·164 定价：1.80元

内 容 简 介

本书主要介绍有限单元体法的基本理论及其应用。全书以平面问题为重点，同时介绍了机械设计中常见的轴对称、三维空间问题。对等参数单元体也作了较详细的讨论。为了照顾不同读者的需要，书中还对矩阵运算、大规模线性代数方程组解法和弹性理论基础作了介绍。

本书可供从事机械和土建设计计算技术人员、大学高年级学生、研究生等学习和参考，也可作为“有限单元体法”短训班教材。

序　　言

为了使机器正常地工作，每一个零、部件都必须有足够的强度、刚度；为了满足这一要求，在设计时应进行应力分析。五十年代中期，随着大型快速电子计算机的迅速发展，在经典力学基础上发展起来了一种新的应力分析方法——有限单元体法。它能解决许多惯用力学方法难以解决的问题，快速、精确地对零、部件或整机进行详细地应力分析。有关有限单元体法的第一批论文发表于五十年代中期，到现在不过短短的二十余年，但它使得许多设计、计算方法发生了根本性的变革。从六十年代初开始，这一方法就被广泛的用于宇航、飞机、船舶、一般机械、巨型建筑、水工设施等设计计算中，近年来又被用于解决流体、电磁场等非应力分析问题，并取得了很好的成果。

近年来我国有关部门曾举办了各种形式的“有限单元体法”学习班。许多高等院校已为研究生和高年级学生开设了这门课程。作者曾在为吉林工业大学部分教师、长春第一汽车制造厂、险峰机床厂举办的讲座中讲授过“有限单元体法”。这本书就是以这三个讲座班的讲稿为基础编写而成的。为了顾及到具有不同文化程度的工程技术人员和大学生阅读，作者尽量用比较熟悉的语汇和方法来阐述“有限单元体法”的基本知识。

凡工科教学大纲未涉及到的内容在本书中均作了介绍。书中阐述某些理论和推导某些公式的方法与常见文献略有差异。有些地方本书所用方法可能要麻烦一些，这主要是为了使读者易于接受，并使全书前后处理方法统一，使读者能得到一个完整的概念。要想在这样一本书中包含有限单元体法的全部知识是不可能的。作者只希望读者在学完本书后能掌握有限单元体法的基本知

识，解决一些较简单的实际问题，并为今后进一步学习打下基础。

本书可供工程技术人员、研究生、大学生等学习与参考，也可作为“有限单元体法”短训班的教材。在编写时已考虑了不同需要，除第四章外，各章基本上是独立的。由于研究生已学过线性代数和弹性力学，因此用作研究生教材时可以删去一、二、十章。在用作短训班教材或自学时，可以在学完第四章后，根据情况选学以后的各章节。

作者在编写过程中虽然做了一些努力，但错误之处在所难免，望批评指正。

作者　　1983．1

目　　录

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

第二章 矩阵的基本知识

矩阵是有限单元法计算中的一个极为有效的工具。它可以使许多繁杂的公式变得极为简洁，并便于编制电子计算机程序。本章将给出有关矩阵的一些基本知识，其重点在矩阵运算方面。这些运算在以后各章中将用得很多。对于某些定理的证明，我们不详细叙述。

§2—1 矩阵定义

有限单元体法常需要计算含有数百个以上未知数的线性方程组。初等数学中常用的书写方法较为麻烦，有改进的必要。我们来看一个三元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{aligned}\right\} \tag{2—1}$$

不难看出，每一个方程中，未知量都是x_1，x_2，x_3，不同的仅是未知数前的系数及常数项。我们把它记为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{2—2}$$

(2—2) 中由$a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots a_{33}, x_1, x_2, x_3, b_1, b_2, b_3$构成的三个数表我们称之为矩阵。引入矩阵的概念，不仅在书写上简便，而且给运算、编制程序等许多方面带来很多好处。下面我们给出矩阵的定义。

矩阵定义 设有$m \times n$个数，$a_{ij}(i=1,2,\cdots\cdots m)$，$(j=1,2,\cdots\cdots n)$排成一个$m$行$n$列的矩形表格。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2—3)$$

则这个表格叫矩阵。表中任一项a_{ij}称为矩阵第i行j列的元素（横向为行，纵向为列）。a_{ij}第一个附码为行号，第二个为列号。

(2—3) 中共有m行n列$m \times n$个元素。

必须注意，矩阵和初等代数中的行列式完全不同。对于行列式，我们可以按照一定的规则去计算它的值，这是一个给定的数。而矩阵则是若干个数组成的数表。

矩阵常用方括号〔 〕来表示。可以把元素写在〔 〕内表示一个矩阵，如（2—3）右端所示，也可简记作〔A〕或用黑体字符$\boldsymbol{A}$表示，如（2—3）左端所示。

对行列式，我们仍用两条竖线表示，如：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (2—4)$$

下面我们给出几个常见的特殊矩阵的名称。

方阵 若矩阵的行数与列数相等，即$m=n$，数表成为一个正方形表格，称为方阵。设方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

要特别注意，不要把方阵与行列式相混。

由$\boldsymbol{A}$中元素按同样行列顺序构成的行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为与矩阵$\boldsymbol{A}$对应的行列式，或矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式，简记作$|\boldsymbol{A}|$或$det\boldsymbol{A}$。

$\boldsymbol{A}$ 中由右上角到右下角的对角线称为主对角线，而其上的元素称为主对角线元素，或主元素，即$a_{11},a_{22},\cdots\cdots a_{nn}$。

行矩阵　若矩阵仅有一行，即$m=1$，成为$[a_{11},a_{12},\cdots\cdots a_{1n}]$形，则称之为行矩阵。

列矩阵　若矩阵仅有一列，即$n=1$，矩阵成$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$的形式，则称为列矩阵，对于列矩阵，常用{　}代替[　]，写成$\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{Bmatrix}$

零矩阵 各元素全为零的矩阵称为零矩阵。

对称矩阵 设有方阵 A，其对称于主对角线的元素相等，即 $a_{ij}=a_{ji}$，称为对称矩阵。

对角矩阵 除主对角线元素外，其余元素均为零的方阵称为对角矩阵。例如：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

单位矩阵 若对角矩阵各主元素为1，则称为单位矩阵。例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上三角形矩阵与下三角形矩阵 若对角线下方各元素均为零，则此矩阵称为上三角形矩阵。若对角线上方诸元素为零，则称为下三角形矩阵。例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

为上三角形矩阵。而

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

为下三角形矩阵。

若上三角形矩阵主对角线元素均为1，则称为单位上三角形矩阵。如：