前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徼的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

結構動力學詳解

（目　　錄）

第二章　運動方程式之建立

2-1　決定圖 P2-1 所示系統的廣義物理性質 m^*，c^*，k^* 及廣義荷重 $p^*(t)$，它們全都是對應於位移座標 $Z(t)$ 而下定義的。
請把結果用已知的物理性質及尺寸來表示。

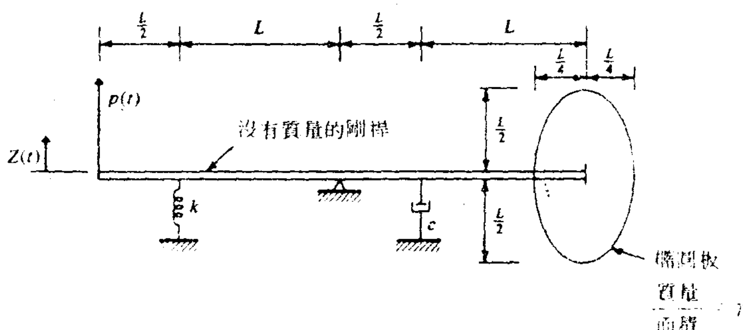
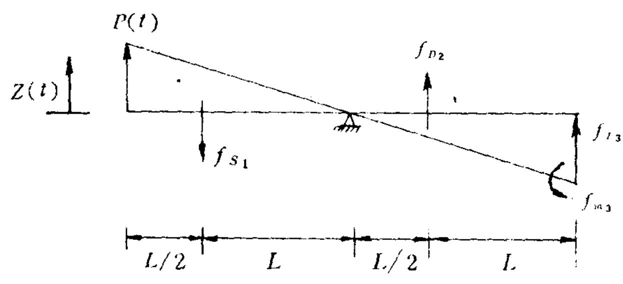


圖 P 2-1

解



$$f_{S_1}=\frac{2}{3}Zk$$

$$f_{D_2}=\frac{1}{3}\dot{Z}c$$

$$f_{I_3}=\ddot{Z}m=\ddot{Z}\left[\gamma\pi\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{8}\gamma L^2\ddot{Z}$$

$$f_{m_3}=\left(\frac{\ddot{Z}}{\frac{3}{2}L}\right)I_0=\frac{2\ddot{Z}}{3L}\left[\gamma\pi\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right]\left[\frac{(L/2)^2+L^2}{16}\right]$$

$$=\frac{5}{768}\gamma\pi L^3\ddot{Z}$$

運動方程：（虛功法）

$$\delta W=P\delta Z-f_{S_1}\cdot\frac{2\delta Z}{3}-f_{D2}\frac{\delta Z}{3}-f_{I_3}\delta Z-f_{m3}\frac{\delta Z}{\frac{3}{2}L}=0$$

$$\left[p(t)-\frac{2}{3}Zk\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{\dot{Z}}{3}c\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{\pi}{8}\gamma L^2\ddot{Z}-\left(\frac{5\ddot{Z}}{768}\gamma\pi L^3\right)\cdot\left(\frac{2}{3L}\right)\right]\delta Z=0$$

$$\delta Z\neq 0$$

$$\frac{4}{9}kZ+\frac{c}{9}\dot{Z}+\frac{149}{1152}\gamma\pi L^2\ddot{Z}=p(t)$$

$$\therefore k^*=\frac{4}{9}k\qquad c^*=\frac{c}{9}\qquad m^*=\frac{149}{1152}\gamma\pi L^2$$

$$p^*(t)=p(t)$$

$$k^*Z+c^*\dot{Z}+m^*\ddot{Z}=p^*(t)$$

2-2 針對圖 P2-2所示結構重解問題 2-1 。

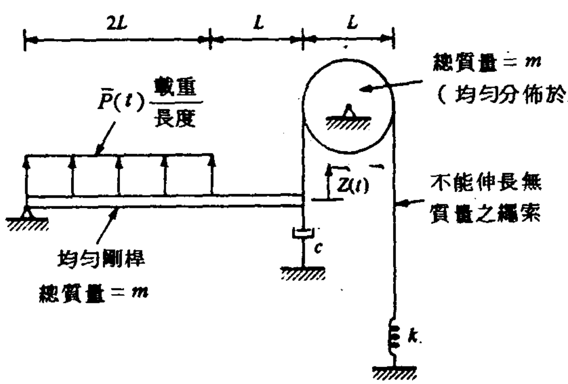
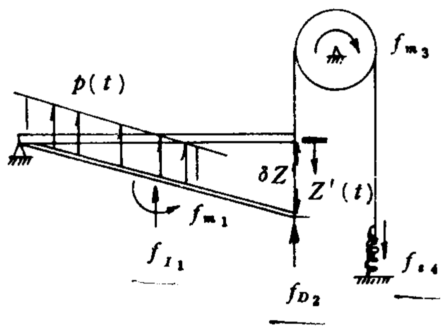


圖 P 2-2

解　設cable可受拉力，不受壓縮力。

亦即當 $Z(t)>0$ 時，cable鬆弛，彈簧不起作用。

當 $Z(t)<0$ 時，cable才拉緊，彈簧才受力。



$$f_{I_1}=\frac{\ddot{Z}'}{2}m=-\frac{\ddot{Z}}{2}m$$

$$f_{m_1}=\left(\frac{\ddot{Z}'}{3L}\right)\frac{(3L)^2}{12}=-\frac{\ddot{Z}}{4}mL$$

$$f_{D_2}=\dot{Z}'c=-\dot{Z}c$$

$$f_{m_3}=\left(\frac{\ddot{Z}'}{L/2}\right)\left(\frac{L^2}{8}\right)=-\frac{\ddot{Z}}{4}mL$$

$$f_{S_4}=Z'k=-Zk$$

虛功原理

$$\delta W=-\int_0^{2L}p(t)\left(\frac{x}{3L}\delta Z'\right)dx-f_{I_1}\frac{\delta Z'}{2}-f_{m_1}\frac{\delta Z'}{3L}-f_{D_2}\delta Z'$$

$$-f_{m_3}\frac{\delta Z'}{L/2}-f_{S_4}\delta Z'=0$$

$$\delta Z'\neq 0$$

$$\int_0^{2L}\bar{p}(t)\left(\frac{x}{3L}\right)dx+\frac{1}{2}f_{I_1}+\frac{1}{3L}f_{m_1}+f_{D_2}+\frac{2}{L}f_{m_3}+f_{S_4}$$

$$=0$$

$Z(t)<0$時：

$$\int_0^{2L}\bar{p}(t)\left(\frac{x}{3L}\right)dx+\frac{1}{2}\left(-\frac{\ddot{Z}}{2}m\right)+\frac{1}{3L}\left(-\frac{\ddot{Z}}{4}mL\right)+(-\dot{Z}c)$$

$$+\frac{2}{L}\left(-\frac{\ddot{Z}}{4}mL\right)+(-Zk)=0$$

$$\frac{5}{6}m\ddot{Z}+c\dot{Z}+kZ=\frac{2}{3}\bar{p}(t)L$$

$$m^*=\frac{5}{6}m \qquad c^*=c \qquad k^*=k \qquad p^*=\frac{2}{3}\bar{p}L$$

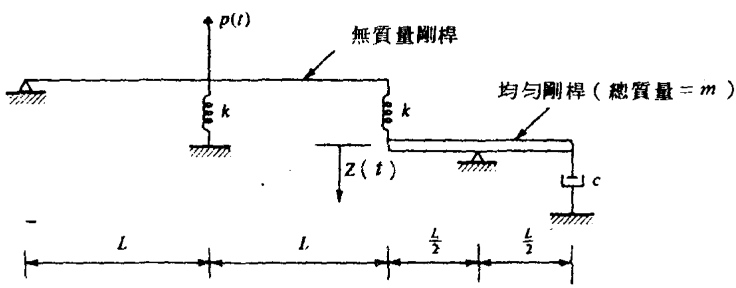
$$m^*\ddot{Z}+c^*\dot{Z}+k^*Z=p^*$$

$Z(t)>0$ 時，圓盤仍轉，$f_{m_3}\neq 0$，但彈簧力不再作用 $f_{s_4}=0$

亦即 $m^*Z+c^*Z=p^*$

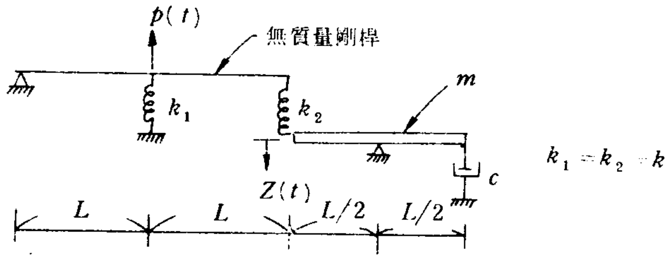
2-3 針對圖P2-3所示結構重解問題2-1。

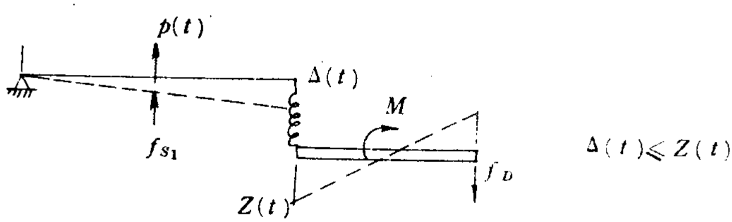
［提示：此系統祇有一度動力自由度（dynamic degree of freedom），原因是那些彈簧能完全控制兩剛桿之相對運動。］

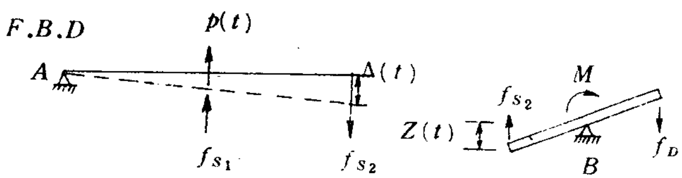


圖P 2-3

解







$$\Sigma M_A = 0$$

$$f_{s_2}(2L) = [\, f_{s_1} + p(t)\,]L$$

$$(Z - \Delta)k(2L) = \frac{\Delta}{2}kL + p(t)L$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{2}{5k}[\,2Zk - p(t)\,]$$

$$\delta\Delta = \frac{\partial\Delta}{\partial Z}\delta Z = \frac{4}{5}\delta Z$$

$$f_{s_1} = \frac{\Delta}{2}k = \frac{k}{2}\cdot\frac{2}{5k}[\,2Zk - p(t)\,] = \frac{1}{5}[\,2Zk - p(t)\,]$$

$$f_{s_2}=k(Z-\Delta)=k[Z-\frac{4}{5}Z+\frac{2p(t)}{5k}]=\frac{1}{5}Zk+\frac{2}{5}p(t)$$

$$=\frac{1}{5}[Zk+2p(t)]$$

$$f_D=c\dot{Z}$$

$$M=I_0\alpha=[\frac{1}{12}mL^2]\frac{\ddot{Z}}{L/2}=\frac{1}{6}mL\ddot{Z}$$

$$\delta W=-[f_{s_1}+p(t)]\frac{1}{2}\delta\Delta+f_{s_2}\delta\Delta-f_{s_2}\delta Z-M(\frac{2\delta Z}{L})$$

$$-f_D\delta Z$$

$$=0$$

$$\delta Z\neq 0$$

$$-\{\frac{1}{5}[2Zk-p(t)]+p(t)\}\frac{1}{2}\delta\Delta+\frac{1}{5}[Zk+2p(t)]\delta\Delta$$

$$-\frac{1}{5}[Zk+2p(t)]\delta Z-\frac{1}{6}mL\ddot{Z}(\frac{2\delta Z}{L})-(c\dot{Z})\delta Z=0$$

（式中$\delta\Delta=\frac{4}{5}\delta Z$）

化簡後 $\frac{1}{3}m\ddot{Z}+c\dot{Z}+\frac{1}{5}kZ=-\frac{2}{5}p(t)$

$$\frac{1}{3}m=m^*$$

$$c=c^*$$

$$\frac{1}{5}k=k^*$$

$$-\frac{2}{5}p(t)=p^*(t)$$

$$\Rightarrow m^*\ddot{Z}+c^*\dot{Z}+k^*Z=p^*(t)$$

2-4 圖 P2-4 的柱被當作單自由度（SDOF）系統處理，它產生位移後

的形狀由如下函數定義：

$$\psi(x)=\frac{v(x,t)}{Z(t)}=(\frac{x}{L})^2(\frac{3}{2}-\frac{x}{2L})$$

設每單位長度的均佈質量爲 $\bar{m}$，均佈剛性爲 EI，及均佈荷重爲 $\bar{p}(t)$，請算出廣義物理性質 m^*，k^* 及廣義荷重 $p^*(t)$。

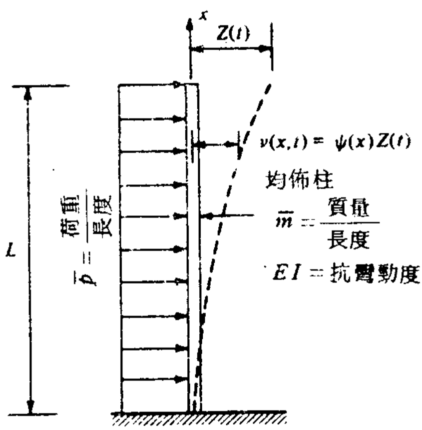


圖 P2-4

解　$$m^*=\int_0^L m(x)\psi^2dx=\int_0^L\bar{m}(\frac{x}{L})^4(\frac{3}{2}-\frac{x}{2L})^2dx$$

$$=\frac{\bar{m}}{4L^4}\int_0^L x^4(9-6\frac{x}{L}+\frac{x^2}{L^2})dx$$

$$=\frac{\bar{m}}{4L^4}[\frac{9}{5}x^5-\frac{x^6}{L}+\frac{x^7}{7L^2}]_0^L$$

$$=\frac{\bar{m}L^5}{4L^4}(\frac{9}{5}-1+\frac{1}{7})=\frac{33}{140}\bar{m}L$$

$$k^*=\int_0^L EI(\psi'')^2dx$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2L^2}(3x^2-\frac{x^3}{L})$$

$$\psi'(x)=\frac{1}{2L^2}(6x-3\frac{x^2}{L})=\frac{3}{2L^2}(2x-\frac{x^2}{L})$$

$$\psi''(x)=\frac{1}{2L^2}(6-6\frac{x}{L})=\frac{3}{L^2}(1-\frac{x}{L})$$

$$k^*=-\frac{9EIL}{L^4}\int_0^L(1-\frac{x}{L})^2d(1-\frac{x}{L})$$

$$=-\frac{9EI}{3L^3}[(1-\frac{x}{L})^3]_0^L=\frac{-3EI}{L^3}(0-1)$$

$$=\frac{3EI}{L^3}$$

$$p^*(t)=\int_0^L\bar{p}\psi(x)dx$$

$$=\int_0^L\frac{\bar{p}}{2L^2}(3x^2-\frac{x^3}{L})dx=\frac{\bar{p}}{2L^2}[x^3-\frac{x^4}{4L}]_0^L$$

$$=\frac{L^3\bar{p}}{2L^2}(1-\frac{1}{4})=\frac{\bar{p}L}{2}(\frac{3}{4})=\frac{3}{8}\bar{p}L$$

-5 (a)若有一朝下的荷重N作用於問題 2-4中的柱頂，請應用與問題 2-4 同樣的形狀函數 $\psi(x)$ 以算出其合成廣義勁度 $\bar{k}^*$。

(b)重解(a)部份，假設在柱上的軸向力沿柱長產生線性變化

$N(x)=N(1-x/L)$

解 (a) $$k_G^*=\int_0^L N[\psi'(x)]^2dx$$

$$=N\int_0^L\frac{9}{4L^4}(2x-\frac{x^2}{L})^2dx$$

$$=\frac{9N}{4L^4}\int_0^L(4x^2-4\frac{x^3}{L}+\frac{x^4}{L^2})dx$$

$$= \frac{9N}{4L^4}\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{L} + \frac{x^5}{5L^2}\right]_0^L = \frac{9NL^3}{4L^4}\left(\frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{9N}{4L}\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{6}{5}\frac{N}{L}$$

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^*$$

$$= \frac{3EI}{L^3} - \frac{6}{5}\frac{N}{L}$$

$N = N_{cr}$ 時 $\bar{k}^* = 0$　即 buckling condition

$$\bar{k}^* = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3EI}{L^3} = \frac{6}{5}\frac{N_{cr}}{L} \qquad N_{cr} = \frac{5}{2}\frac{EI}{L^2} \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{5EI}{2L^3N_{cr}}$$

$$\bar{k}^* = \frac{3EI}{L^3} - \frac{6}{5}\frac{N}{L} = \frac{3EI}{L^3} - \frac{6}{5}N \cdot \frac{5EI}{2L^3N_{cr}} = \frac{3EI}{L^3}\left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)$$

$$= k^*\left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)$$

(b) $$k_G^* = \int_0^L N\left(1 - \frac{x}{L}\right)[\psi'(x)]^2 dx$$

$$= N\int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{9}{4L^4}\left(2x - \frac{x^2}{L}\right)^2 dx$$

$$= \frac{9N}{4L^4}\int_0^L \left(4x^2 - 8\frac{x^3}{L} + 5\frac{x^4}{L^2} - \frac{x^5}{L^3}\right)dx$$

$$= \frac{9N}{4L^4}\left[\frac{4}{3}x^3 - 2\frac{x^4}{L} + \frac{x^5}{L^2} - \frac{1}{6}\frac{x^6}{L^3}\right]_0^L$$

$$= \frac{9NL^3}{4L^4}\left(\frac{4}{3} - 2 + 1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{9NL^3}{4L^4}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{N}{L}$$

buckling condition

$\bar{k}^* = 0 \qquad N = N_{cr}$

$$\frac{3EI}{L^3} = \frac{3}{8}\frac{N_{cr}}{L} \qquad \frac{1}{L} = \frac{8EI}{L^3N_{cr}}$$

$$\bar{k}^* = \frac{3EI}{L^3} - \frac{3}{8}N \cdot \frac{8EI}{L^3N_{cr}} = \frac{3EI}{L^3}\left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)$$

$$= k^*\left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)$$

2-6 假設圖 2 -7 的均勻板爲正方形，邊長 a ，四邊皆簡支承。

(a)若每單位面積的質量爲 γ 及其撓曲勁度爲 D ，請定出其廣義性質 m^* 及 k^* ，以中央位移座標 $Z(t)$ 表示之。假設位移函數爲

$$\psi(x, y) = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$$

(b)每單位面積的均佈外荷重爲 $\bar{p}(t)$ 。請根據(a)部份的位移函數來定出廣義荷重 $p^*(t)$ 。

解 (a) $\psi = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} = -\frac{\pi^2}{a^2}\psi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{a^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} = -\frac{\pi^2}{a^2}\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{\pi^2}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}$$

ν = 卜生比 (Poisson's ratio)

h = 板厚

用課本 P37.(Eq 2-44)，(Eq2-45)

$$m^* = \int_A \gamma(x, y)[\psi(x, y)]^2 dA$$

$$= \int_0^a\int_0^a \gamma\sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi y}{a}dx\,dy$$

$$= \gamma \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx \int_0^a \sin \frac{\pi y}{a} dy$$

$$= \gamma \left[\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx \right]^2$$

（因 x，y 只是一些 dummy variables）

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ [x]_0^a - \frac{a}{2\pi} \left[\sin \frac{2\pi x}{a} \right]_0^a \right\}$$

$$= \frac{a}{2}$$

$$m^* = \gamma \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\gamma a^2}{4}$$

$$k^* = D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] dA$$

$$= D \int_A \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 dA - 2D(1-\nu) \int_A \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) dA$$

$$\int_A \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 dA = \int_A \left(- \frac{\pi^2}{a^2} \psi - \frac{\pi^2}{a^2} \psi \right)^2 dA$$

$$= 4 \frac{\pi^4}{a^4} \int_A \psi^2 dA$$

$$= 4 \frac{\pi^4}{a^4} \left(\frac{a^2}{4} \right)$$

（仿 m^* 之積分）

$$= \frac{\pi^4}{a^2}$$

(b) $$\int_A \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dA = \int_A \left(- \frac{\pi^2}{a^2} \psi \right) \left(- \frac{\pi^2}{a^2} \psi \right) dA$$

$$= \frac{\pi^4}{a^4}\int_A \psi^2 dA = \frac{\pi^4}{a^4}\left(\frac{a^2}{4}\right)$$ （仿m^*積分）

$$= \frac{\pi^4}{4a^2}$$

$$\int_A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dA = \int_0^a \int_0^a \frac{\pi^2}{a^2} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{a} dx dy$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2}\int_0^a \cos\frac{\pi x}{a} dx \int_0^a \cos\frac{\pi y}{a} dy$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2}\left[\int_0^a \cos\frac{\pi x}{a} dx\right]^2$$ （因 x，y 只是一些 dummy variables）

$$= \frac{\pi^2}{a^2}\left\{\left[\frac{a}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}\right)\right]_0^a\right\}^2 = 0$$

$$k^* = D\frac{\pi^4}{a^2} - 2D(1-\nu)\frac{\pi^4}{4a^2}$$

$$= D\frac{\pi^4}{a^2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right] = \frac{D\pi^4}{2a^2}(1+\nu)$$

(b)用課本 P37（Eq2-46）

$$p^* = \int_A p(x,y)\psi(x,y) dA$$

$$= \int_0^a \int_0^a \bar{p} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} dx dy$$

$$= \bar{p}\int_0^a \sin\frac{\pi x}{a} dx \int_0^a \sin\frac{\pi y}{a} dy$$

$$= \bar{p}\left[\int_0^a \sin\frac{\pi x}{a} dx\right]^2$$ （因 x，y 只是一些 dummy variables）

$$= \bar{p}\left\{\left[-\frac{a}{\pi}\cos\frac{\pi x}{a}\right]_0^a\right\}^2$$

$$=\frac{a^2\bar{p}}{\pi^2}[-\cos\pi+1]^2=\frac{a^2\bar{p}}{\pi^2}(+1+1)^2$$

$$=\frac{4a^2\bar{p}}{\pi^2}$$

2-7 圖 P2-5 標示出一錐形混凝土煙囪的外徑、高度及材料性質。假設其壁均厚 8 in 且變形形狀為

$$\psi(x)=1-\cos\frac{\pi x}{2L}$$

請算廣義質量 m^* 及勁度 k^*。請用辛浦森（simpson）法則進行積分，亦即以柱頂，中央，柱底三處之積分函數值進行加權。例如

$$m^*\doteq\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

其中 $y_i=m_i\psi_i^2$ 為在第“ i ”點處所算出的值。

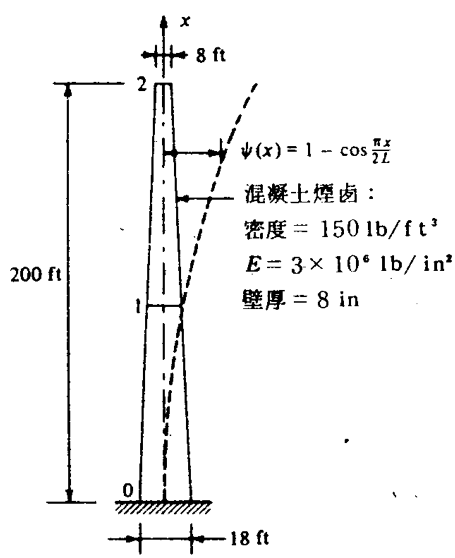


圖 P2-5