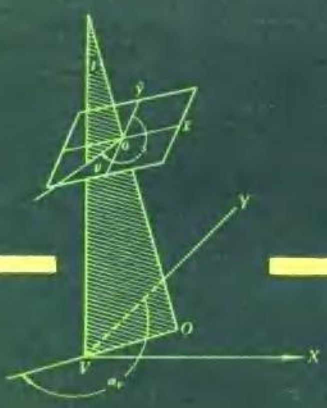
# 空中摄影测量解析法基础

周 卡




科学出版社

# 空中摄影测量
# 解析法基础

周　卡

科　学　出　版　社

1 9 7 5

# 内容简介

本书将空中摄影测量中有关的各基本问题，拿到严格的数学基础上来处理，作了比较全面的推导和论述.

作者在本书的第一、第二、第三章中，分别就平面解析几何，矢量及矩阵代数作了介绍；第四章重点论述了坐标系的选取；第五章介绍单张象片及象对的定向及交会；第六章论述航线网的平差及大量线性联立方程的有效解答.

本书可供空中摄影测量及空间探测有关的科研及作业人员参考；关于解答大量线性正有定方程组方面，又可供有关数值计算人员的参考.

书末附有比较全面的参考文献。


空中摄影测量解析法基础

周　卡

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1975年2月第一版　开本：787×1092　1/32
1975年2月第一次印刷　印张：9　插页：5
印数：0001　4,150　字数：203,000

统一书号：13031·256
本社书号：418·13—15

定价：1.05元

# 绪　言

作者写这本小册子的目的，是想把有关空中立体摄影测量的问题，拿到严格的数学基础上来处理．这样作，就需要一定程度的数学知识，尤其是立体解析几何、矢量、矩阵，还要部分的张量．作者在这里不打算将高等数学应用过多，但由于公式的推导和应用，以矩阵和矢量最为简便，而且最近十多年来，世界上有关这方面的文献和资料都是以矢量和矩阵来表达的，为使读者熟悉这些有关近代计算技术，故作者也就稍将矩阵和矢量的知识多介绍了一点，在公式推导方面，基本上也以矩阵和矢量为基础了．读者只要在本书的一、二、三章多化一点功夫，以下几章的阅读，就不会有困难．

过去有不少的人，对空中摄影测量的看法，都认为只有光学机械，才是比较可靠的办法，一提到数学计算，都皱起眉头，好象是一种徒劳无益的方法．由于电子计算机的出现，对繁重的数学计算提供了方便的解决办法，最近十多年来，世界各国的测量机构和自然资源的调查部门，无不采用这一先进技术，来提高空中摄影测量的效率和精度，大大缩短了工期，减少了劳动量，并大大地节省了作业费用．因而促进了空中摄影测量的理论和实践的高速发展．

目前的摄影测量技术，从空中到水下，更发展到宇宙探测，揭露出我们前所未知的自然事物的大量秘密，把我们的视界和观察能力，大大地扩充和加强了．

由于立体摄影机所处的位置的不同，可将立体摄影分为两大类：

（1）摄影机外方位元素已知的，那就是所谓的地面立体摄影，包括将摄影机设置在地面的，对空中运动物体的摄影，如人造卫星、火箭、导弹的追踪，空中爆炸和燃烧物体的分析，云层运动的记录等．摄影机设置在实验室内，对一切欲观察的实验对象，进行摄影分析和记录，如带电粒子在气泡室内的运动，X光对人体内部结构的观察和分析．

（2）摄影机外方位元素为未知的，如将摄影机安置在飞机上的，就是我们一般所说的航空摄影，专门用来测制地形图，布设地面上的工程施工和地面自然资源的调查．将摄影机设置在人造卫星或卫星实验站上，对宇宙空间、月球、金星、火星以及地面的摄影，在目前是探测宇宙空间唯一可行的方法，而且已用之于测制月面图了．

从最近的空中摄影方法的发展来看，它已不是一门为测量制图所独占的先进技术，而且已成了广大国民经济各部门，人类环境的研究以及科学实验中的观察和记录，都可利用的一种有效工具．

由于作者的业务水平不高，本书中错误的地方在所难免，希望读者提出批评指正．

周　卡

1973年11月　北京

# 目　录

# 第一章　平面解析几何的基本知识

## § 1.1　笛卡尔坐标系

笛卡尔坐标系，附有一唯一序列的成对实数，叫做笛卡尔坐标，横坐标 $x$ 及纵坐标 $y$；以相交于原点的有向线段（坐标轴）$ox$, $oy$ 为依据，将有限的欧几里得平面上的每一点 $P_i$ 表示成 $P_i\equiv(x_i, y_i)$，$i$ 为任何正整数. 过 $P$ 平行于 $oy$ 的直线交 $ox$ 于 $P'$；类似地，过 $P$ 平行于 $ox$ 的直线交 $oy$ 于 $P''$，有向距离 $OP'=x$（在 $x$ 轴的正方向上为正）及 $OP''=y$（在 $y$ 轴的正方向为正），即为 $P$ 点的笛卡尔坐标.

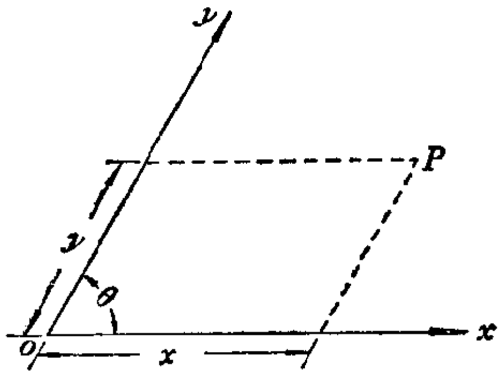


图 1.1　右手斜轴笛卡尔坐标系

在 $x$ 和 $y$ 轴上的单位长度，可以是相等的，也可以不相等. 在一般的斜轴坐标系中，二坐标轴间的夹角 $\measuredangle xoy=\theta$，可以在 0 到 180° 之间（右手坐标系），或在 0 与 −180° 之间（左手坐标系）.

## § 1.2　右手直角笛卡尔坐标系

在右手直角笛卡尔坐标系上，我们选取坐标轴的方向，以使得正的 $x$ 轴，反时针旋转 90° 与正的 $y$ 轴重合（图 1.2），于是 $P$ 点的坐标 $x$ 和 $y$ 各等于 $P$ 至 $y$ 轴和 $x$ 轴间的有向距.

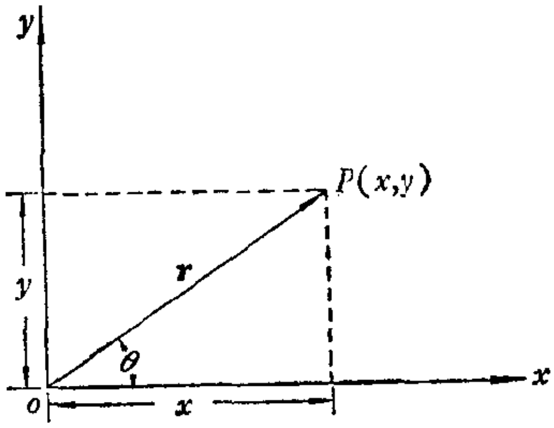



图 1.2　右手直角坐标系及极坐标系

除了特别指明的以外，所有笛卡尔坐标，以右手直角坐标为准，而以等尺度的单位长度来量 $x$ 和 $y$.

## § 1.3　以直角笛卡尔坐标为函数的基本关系

以直角笛卡尔坐标$(x, y)$为函数的，有下面的关系：

(i)　在点 $P_1(x_1, y_1)$与点 $P_2(x_2, y_2)$之间的距离

$$d=\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)\}^{1/2} \tag{1.1}$$

(ii)　在二有向线段之间的夹角 $\theta$，由

$$\cos\theta=\frac{(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)}{d_1d_2} \tag{1.2}$$

$$d_1=\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}^{1/2}$$

$$d_2=\{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2\}^{1/2}$$

给出，此处的$(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$，$(x_3, y_3)$ 及 $(x_4, y_4)$ 各为$P_1$，$P_2$，$P_3$ 及 $P_4$ 各点的坐标.

有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的方向余弦 $\cos\alpha_x$ 及 $\cos\alpha_y$ 为角度 $\alpha_x$ 和 $\alpha_y=90^\circ-\alpha_x$的余弦，

$$\cos\alpha_x=\frac{x_2-x_1}{+\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y)^2\}^{1/2}} \tag{1.3}$$

$$\cos\alpha_y=\frac{y_2-y_1}{+\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}^{1/2}} \tag{1.4}$$

(iii) 以 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 及 $P_3(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形的面积为

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\{(y_2-y_3)x_1+(y_3-y_1)x_2+(y_1-y_2)x_3\} \tag{1.5}$$

如果 $P_1P_2P_3$ 的周界是以反时针方向为正，沿三角形的内边行进的，上式为正。如果 $x_3=y_3=0$ 则

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1) \tag{1.6}$$

## § 1.4 坐标轴的平移

令 $x$ 及 $y$ 为任一点 $P$ 对于右手直角笛卡尔坐标系上的坐标。而此点在一个与 $x$, $y$ 轴平行，方向相同，原点在 $x$, $y$ 轴上的坐标 $x=x_0$, $y=y_0$ 的第二右手直角坐标系上的坐标为 $x'$ 和 $y'$。如果在此二坐标系上的坐标，均以同一尺度来量取的，则坐标 $x'$, $y'$ 对于 $x$ 和 $y$，有下面的变换关系

$$\left.\begin{aligned} &x'=x-x_0,\ y'=y-y_0 \\ \text{或者}\quad &x=x'+x_0,\ y=y'+y_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

上式也可有第二种解释。如果将 $x'$, $y'$ 考虑成相对于 $x$, $y$ 系上的坐标，则由 $x'$, $y'$ 定义的点，为对于点 $(x, y)$ 在 $x$ 轴方向上平移一有向量——$x_0$，在 $y$ 轴方向上平移一有向量——$y_0$。施用这种变换于一平面曲线上，可以用来指示整个曲线的平移。

## § 1.5 坐标轴的旋转

令$x$, $y$为任一点 $P$ 对于一右手直角坐标系的坐标；$x'$, $y'$为此点在另一直角坐标系上的坐标，原点相同，而 $x'$ 轴反时针方向旋转了一角度 $\theta$(图 1.3). 如果坐标 $x$, $y$ 和 $x'$, $y'$ 的单位都相同，则它们间存在着变换关系：

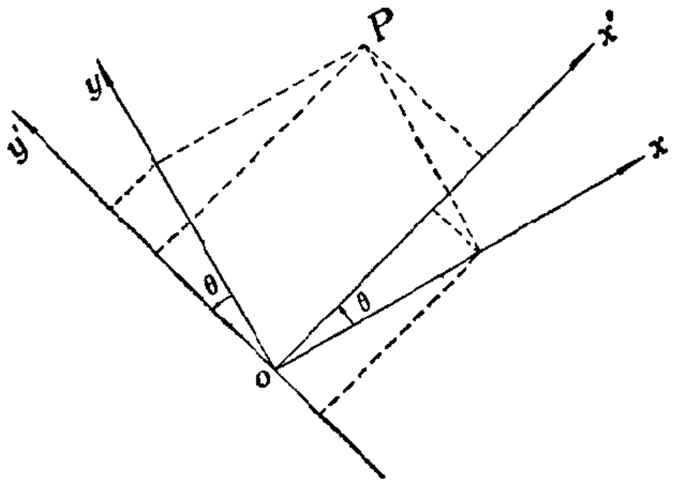



图 1.3 新旧坐标轴间的关系

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.8a}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.8b}$$

令

$$l_{11} = \cos(x', x) = \cos\theta$$

$$l_{12} = \cos(x', y) = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$$

$$l_{21} = \cos(y', x) = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta$$

$$l_{22} = \cos(y', y) = \cos\theta$$

于是(1.8a)式可写为

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_{11}x + l_{12}y \\ y' &= l_{21}x + l_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{1.8c}$$

或
$$\left.\begin{aligned}x&=l_{11}x'+l_{21}y'\\y&=l_{12}x'+l_{22}y'\end{aligned}\right\}\tag{1.8d}$$

上式的第二种解释，为一点 $(x', y')$ 的定义，绕原点 $o$ 对于点$(x, y)$旋转了一角度$(-\theta)$（图 1.4）。

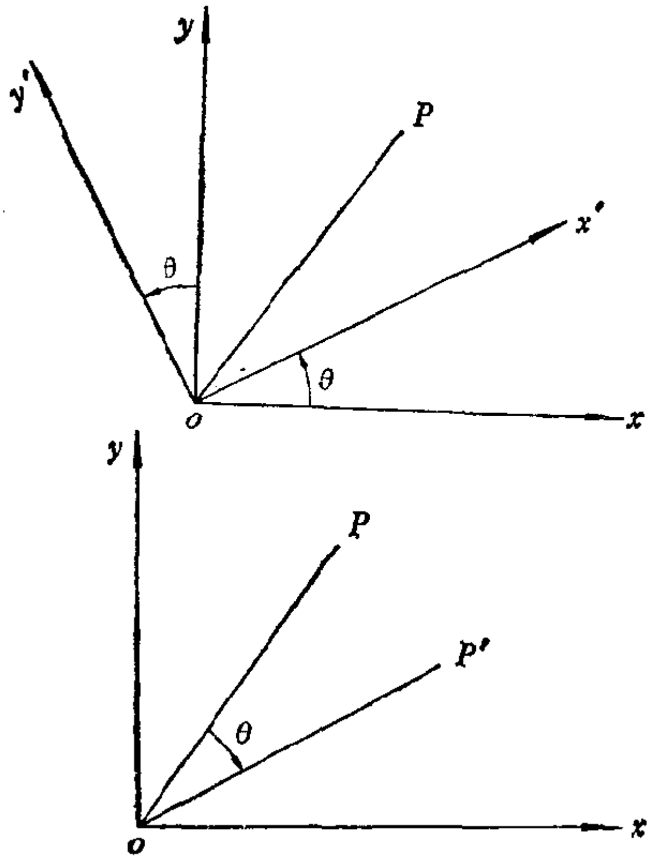



图 1.4　一点绕原点的旋转

## § 1.6　坐标轴的同时平移和旋转

如果上节中的 $x'$, $y'$ 系上的原点不与 $x$, $y$ 系上者相同，而在 $x$, $y$ 系上有坐标 $x_0$ 及 $y_0$,则变换方程为

$$\left.\begin{aligned}x'&=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta\\y'&=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{1.9a}$$

或
$$\left.\begin{aligned}x'&=l_{11}(x-x_0)+l_{12}(y-y_0)\\y'&=l_{21}(x-x_0)+l_{22}(y-y_0)\end{aligned}\right\}\tag{1.9b}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + l_{11}x' + l_{21}y' \\ y &= y_0 + l_{12}x' + l_{22}y' \end{aligned}\right\} \tag{1.9c}$$

如果全部坐标，都具有同一的单位，公式(1.9a)，(1.9b)及(1.9c)允许我们将任意二直角坐标系联系起来.

变换公式(1.9a)，(1.9b)及(1.9c)又可以理解为一点$(x', y')$对于点$(x, y)$平移和旋转的定义.

注意：变换公式(1.7)、(1.8a)，(1.8b)，(1.9a)及(1.9c)并不影响二点间的距离值[(1.1)式]，或由(1.2)式所给出的角度值. 构成欧几里得几何学的诸关系，并不受坐标系的平移和旋转的影响.

## §1.7 极 坐 标

在一平面极坐标系上，以一有向直线作极轴为准，对于平面上每一点 $P$，附以一成对的序列 $r$ 及 $\theta$（极坐标）. 于是平面上每一点都由此 $(r, \theta)$ 定之. $r$ 为该点位矢 的长，$\theta$ 为该位矢与 $ox$ 轴间的夹角.

$\theta$ 的正负是以位矢从 $ox$ 轴起反时针方向量的，或顺时针方向量的为准。

如果一极坐标系的极与极轴，和一右手直角坐标系的原点和 $x$ 轴各各重合，于是一点的极坐标$(r, \theta)$与其在直角坐标系上的$(x, y)$有下面的关系：

$$\left.\begin{aligned} x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \\ |r| = +\sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan y/x \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

以极坐标为函数，下面的诸关系成立：

(i) 二点$(r_1, \theta_1)$，$(r_2, \theta_2)$之间的距离 $d$ 为

$$d = +\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)} \tag{1.11}$$

(ii) 以$P_1(r_1, \theta_1)$，$P_2(r_2, \theta_2)$，$P_3(r_3, \theta_3)$为顶点的三角形

的面积 $s$ 为

$$s=\frac{1}{2}\{r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)+r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)+r_1r_3\sin(\theta_1-\theta_3)\} \tag{1.12}$$

如果三角形的周界 $P_1P_2P_3$，沿三角形的内部取反时针方向为正，则上式为正. 当 $r_3=0$，则

$$s=\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1) \tag{1.13}$$

## § 1.8 直　　线

在一已知的右手直角坐标系上，每一线性方程

$$a_1x+a_2y+a_3=0 \tag{1.14}$$

当 $a_1$, $a_2$ 不同时为 0 时，即代表一直线（图 1.5）. 反过来，在平面的一有限范围内的每一直线，都可以 (1.14) 式的一线性方程表之；特别是当 $a_3=0$ 时，直线通过原点.

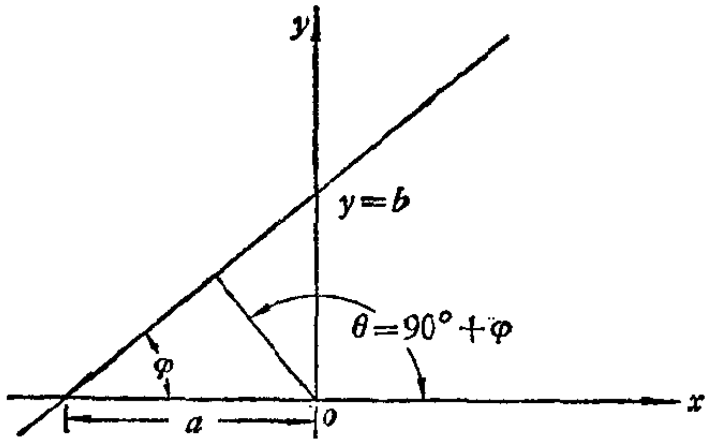



图 1.5　直线方程

令 $p$ 为由原点起至此直线的距离，$\theta$ 为正 $x$ 轴与该直线的法线间的角度，反时针方向量的为正，于是此直线有方程

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0 \tag{1.15}$$

如果一直线上有二点 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ 为已知，则此直线

的方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{1.16 a}$$

或

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{1.16 b}$$

以极坐标$(r, \varphi)$为函数，任一直线的方程为

$$r(a_1\cos\varphi+a_2\sin\varphi)+a_3=0 \tag{1.17}$$

或

$$r\cos(\varphi-\theta)=p \tag{1.18}$$

式中

$$p=a_3/(a_1^2+a_2^2)^{1/2}$$

$$\cos\theta=\frac{a_1}{(a_1^2+a_2^2)^{1/2}}, \qquad \sin\theta=\frac{a_2}{(a_1^2+a_2^2)^{1/2}}$$

## § 1.9 点 与 直 线

从直线至一点$(x_0, y_0)$的有向距离 $d$ 为

$$d=\frac{a_1x_0+a_2y_0+a_3}{(a_1^2+a_2^2)^{1/2}} \tag{1.19}$$

此地的$(a_1^2+a_2^2)^{1/2}$的符号，选择来与 $a_3$ 者相反。如果直线在$(x_0, y_0)$与原点之间，$d$ 为正。

三点$(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$ 及 $(x_3, y_3)$在一直线上时，只有而且仅仅只有

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{1.20}$$

才有可能。