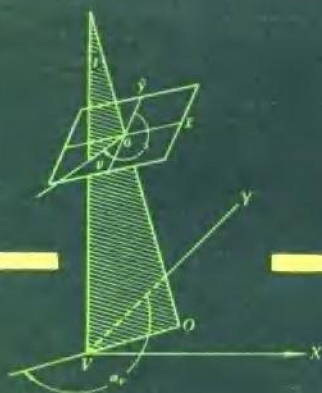


空中摄影测量 解析法基础

周 卡



科学出版社

空中摄影测量 解析法基础

周 卡

科 学 出 版 社

1 9 7 5

内 容 简 介

本书将空中摄影测量中有关的各基本问题，拿到严格的数学基础上来处理，作了比较全面的推导和论述。

作者在本书的第一、第二、第三章中，分别就平面解析几何，矢量及矩阵代数作了介绍；第四章重点论述了坐标系的选取；第五章介绍单张象片及象对的定向及交会；第六章论述航线网的平差及大量线性联立方程的有效解答。

本书可供空中摄影测量及空间探测有关的科研及作业人员参考，关于解答大量线性正有定方程组方面，又可供有关数值计算人员的参考。

书末附有比较全面的参考文献。

空中摄影测量解析法基础

周 卡

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1975年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1975年2月第一次印刷 印张：9 插页：5

印数：0001 4,150 字数：203,000

统一书号：13031·256

本社书号：418·13—15

定 价：1.05 元

绪 言

作者写这本小册子的目的,是想把有关空中立体摄影测量的问题,拿到严格的数学基础上来处理。这样作,就需要一定程度的数学知识,尤其是立体解析几何、矢量、矩阵,还要部分的张量。作者在这里不打算将高等数学应用过多,但由于公式的推导和应用,以矩阵和矢量最为简便,而且最近十多年来,世界上有关这方面的文献和资料都是以矢量和矩阵来表达的,为使读者熟悉这些有关近代计算技术,故作者也就稍将矩阵和矢量的知识多介绍了一点,在公式推导方面,基本上也以矩阵和矢量为基础了。读者只要在本书的一、二、三章多化一点功夫,以下几章的阅读,就不会有困难。

过去有不少的人,对空中摄影测量的看法,都认为只有光学机械,才是比较可靠的办法,一提到数学计算,都皱起眉头,好象是一种徒劳无益的方法。由于电子计算机的出现,对繁重的数学计算提供了方便的解决办法,最近十多年来,世界各国的测量机构和自然资源的调查部门,无不采用这一先进技术,来提高空中摄影测量的效率和精度,大大缩短了工期,减少了劳动量,并大大地节省了作业费用。因而促进了空中摄影测量的理论和实践的高速发展。

目前的摄影测量技术,从空中到水下,更发展到宇宙探测,揭露出我们前所未知的自然事物的大量秘密,把我们的视界和观察能力,大大地扩充和加强了。

由于立体摄影机所处的位置的不同,可将立体摄影分为两大类:

(1) 摄影机外方位元素已知的, 那就是所谓的地面立体摄影, 包括将摄影机设置在地面的, 对空中运动物体的摄影, 如人造卫星、火箭、导弹的追踪, 空中爆炸和燃烧物体的分析, 云层运动的记录等。摄影机设置在实验室内, 对一切欲观察的实验对象, 进行摄影分析和记录, 如带电粒子在气泡室内的运动, X光对人体内部结构的观察和分析。

(2) 摄影机外方位元素为未知的, 如将摄影机安置在飞机上的, 就是我们一般所说的航空摄影, 专门用来测制地形图, 布设地面上的工程施工和地面自然资源的调查。将摄影机设置在人造卫星或卫星实验站上, 对宇宙空间、月球、金星、火星以及地面的摄影, 在目前是探测宇宙空间唯一可行的方法, 而且已用之于测制月面图了。

从最近的空中摄影方法的发展来看, 它已不是一门为测量制图所独占的先进技术, 而且已成了广大国民经济各部门, 人类环境的研究以及科学实验中的观察和记录, 都可利用的一种有效工具。

由于作者的业务水平不高, 本书中错误的地方在所难免, 希望读者提出批评指正。

周 卡

1973年11月 北京

目 录

绪言	v
第一章 平面解析几何的基本知识	1
§ 1.1 笛卡尔坐标系	1
§ 1.2 右手直角笛卡尔坐标系	1
§ 1.3 以直角笛卡尔坐标为函数的基本关系	2
§ 1.4 坐标轴的平移	3
§ 1.5 坐标轴的旋转	4
§ 1.6 坐标轴的同时平移和旋转	5
§ 1.7 极坐标	6
§ 1.8 直线	7
§ 1.9 点与直线	8
第二章 矢量与立体解析几何关系	9
§ 2.1 空间的笛卡尔坐标系	9
§ 2.2 右手轴系	9
§ 2.3 圆柱及球面坐标系	10
§ 2.4 数量与矢量	11
§ 2.5 矢量加法	12
§ 2.6 数积 (内积, 无向积)	14
§ 2.7 位矢和以位矢为函数的基本关系	17
§ 2.8 有向线段的投影	18
§ 2.9 矢积 (外积)	19
§ 2.10 多矢积	22
§ 2.11 三矢量的逆系	25
§ 2.12 直角笛卡尔坐标轴的平移和旋转	28
§ 2.13 平面	31

§ 2.14	空间直线	32
§ 2.15	有关点、线和面的关系	34
§ 2.16	空间的旋转	38
参考文献		40
第三章 矩阵代数的基本知识		41
§ 3.1	小引	41
§ 3.2	矩阵的定义及类型	41
§ 3.3	矩阵的相等和加减	45
§ 3.4	矩阵的乘法	45
§ 3.5	倒置矩阵	49
§ 3.6	三角形矩阵及矩阵的分解	50
§ 3.7	逆矩阵	52
§ 3.8	矩阵的分裂	53
§ 3.9	借分块矩阵求逆	58
§ 3.10	矩阵的次幂	63
§ 3.11	特征根及特征矢量	64
§ 3.12	矩阵的相似变换	68
§ 3.13	矩阵的微分	70
§ 3.14	双线性式及二次式	72
§ 3.15	矩阵级数的极限及模	74
§ 3.16	线性方程的解	76
参考文献		89
第四章 摄影空间点、线、面、轴的解析关系		90
§ 4.1	确定象点空间关系的坐标系	90
§ 4.2	象片框标系上的坐标与由 κ, ω, t_x 所表示的对应系 (平移系)上的坐标间的微分关系	104
§ 4.3	象片框标系上的坐标与由 s, t, a_v 表示的对应系 (平移系)上的坐标间的微分关系	108
§ 4.4	摄影空间轴系的连续旋转	109
§ 4.5	以象片框标系上的坐标来表示地面坐标的关系	122

§ 4.6	摄影空间的特殊面和特殊线	125
§ 4.7	摄影空间任一线段的方向余弦	129
§ 4.8	以地面坐标表示象片框标系上的坐标的关系式	130
§ 4.9	象片锥体上各线段的关系	131
第五章	象片定向及交会	137
§ 5.1	小引	137
§ 5.2	观测数据的取得及必要的象片元素的计算	140
§ 5.3	地面锥体的构成及其计算	142
§ 5.4	航高 $Z_0(H)$ 的确定	147
§ 5.5	依据摄影站高程 $Z_0(H)$, 求倾角 t , 旋角 s 及主面 方位角 α_0	151
§ 5.6	摄影站 L 的坐标值 (X_0, Y_0, Z_0) 的直接解算	160
§ 5.7	航高 $Z_0(H)$ 的误差估计	162
§ 5.8	借象面锥体三顶角直接求解摄影站 L 的坐标 $(X_0,$ $Y_0, Z_0)$	166
§ 5.9	已知摄影站坐标 (X_0, Y_0, Z_0) 求解变换矩阵及外 方位元素	170
§ 5.10	利用地面坐标及象片框标坐标解算绝对定向六元素	175
§ 5.11	摄影基线的确定	178
§ 5.12	不依赖于象片角定向元素的空间交会	179
§ 5.13	利用二相邻象片上的象点在对应系上的坐标, 进 行空间交会	184
§ 5.14	交会点的误差影响	191
§ 5.15	第一、第二两象片上同名象点间的坐标关系	195
§ 5.16	三连续象片上同名象点坐标的过渡	202
§ 5.17	空间三线共面的条件	204
第六章	象对定向, 航线网的构成及平差	215
§ 6.1	小引	215
§ 6.2	象对连续定向的条件	218
§ 6.3	象对连续定向的角元素的解求	224

§ 6.4	根据地面二已知点的坐标, 求摄影站 L_2 的坐标及 在第一、第二两象片重迭区内各象点的坐标	235
§ 6.5	航线网的共线平差	237
§ 6.6	航线网共线平差的另一形式	240
§ 6.7	航线网的锥体平差	241
§ 6.8	航线网整体平差的又一形式	247
§ 6.9	航线网的逼近平差	250
§ 6.10	依最小二乘法作法方程	253
§ 6.11	法方程的有效解法	255
参考文献		275

第一章 平面解析几何的基本知识

§ 1.1 笛卡尔坐标系

笛卡尔坐标系,附有一唯一序列的成对实数,叫做笛卡尔坐标,横坐标 x 及纵坐标 y ;以相交于原点的有向线段(坐标轴) ox, oy 为依据,将有限的欧几里得平面上的每一点 P_i 表示成 $P_i \equiv (x_i, y_i)$, i 为任何正整数. 过 P 平行于 oy 的直线交 ox 于 P' ;类似地,过 P 平行于 ox 的直线交 oy 于 P'' ,有向距离 $OP' = x$ (在 x 轴的正方向上为正)及 $OP'' = y$ (在 y 轴的正方向为正),即为 P 点的笛卡尔坐标.

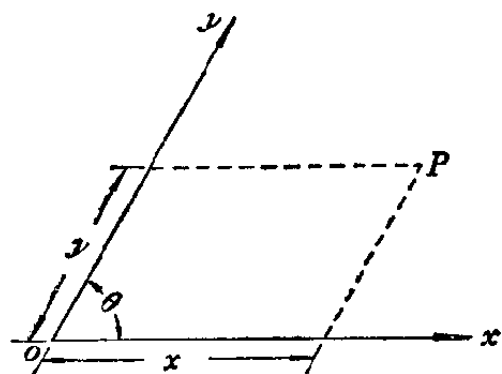


图 1.1 右手斜轴笛卡尔坐标系

在 x 和 y 轴上的单位长度,可以是相等的,也可以不相等. 在一般的斜轴坐标系中,二坐标轴间的夹角 $\angle xoy = \theta$, 可以在 0 到 180° 之间(右手坐标系),或在 0 与 -180° 之间(左手坐标系).

§ 1.2 右手直角笛卡尔坐标系

在右手直角笛卡尔坐标系上,我们选取坐标轴的方向,以使得正的 x 轴,反时针旋转 90° 与正的 y 轴重合(图 1.2), 于是 P 点的坐标 x 和 y 各等于 P 至 y 轴和 x 轴间的有向距.

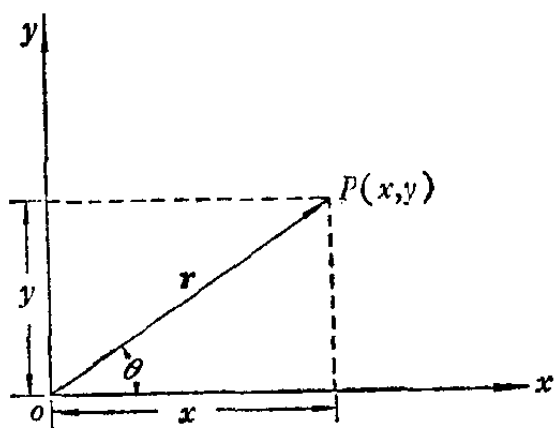


图 1.2 右手直角坐标系及极坐标系

除了特别指明的以外,所有笛卡尔坐标,以右手直角坐标为准,而以等尺度的单位长度来量 x 和 y 。

§ 1.3 以直角笛卡尔坐标为函数的基本关系

以直角笛卡尔坐标 (x, y) 为函数的,有下面的关系:

(i) 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离

$$d = \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}^{1/2} \quad (1.1)$$

(ii) 在二有向线段之间的夹角 θ , 由

$$\cos \theta = \frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3)}{d_1 d_2} \quad (1.2)$$

$$d_1 = \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}^{1/2}$$

$$d_2 = \{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2\}^{1/2}$$

给出,此处的 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 及 (x_4, y_4) 各为 P_1 , P_2 , P_3 及 P_4 各点的坐标。

有向线段 $\overline{P_1 P_2}$ 的方向余弦 $\cos \alpha_x$ 及 $\cos \alpha_y$ 为角度 α_x 和 $\alpha_y = 90^\circ - \alpha_x$ 的余弦,

$$\cos \alpha_x = \frac{x_2 - x_1}{\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}^{1/2}} \quad (1.3)$$

$$\cos \alpha_y = \frac{y_2 - y_1}{\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}^{1/2}} \quad (1.4)$$

(iii) 以 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 及 $P_3(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形的面积为

$$s = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \{ (y_2 - y_3)x_1 + (y_3 - y_1)x_2 + (y_1 - y_2)x_3 \} \quad (1.5)$$

如果 $P_1 P_2 P_3$ 的周界是以反时针方向为正, 沿三角形的内边行进的, 上式为正. 如果 $x_3 = y_3 = 0$ 则

$$s = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (1.6)$$

§ 1.4 坐标轴的平移

令 x 及 y 为任一点 P 对于右手直角笛卡尔坐标系上的坐标. 而此点在一个与 x, y 轴平行, 方向相同, 原点在 x, y 轴上的坐标 $x = x_0, y = y_0$ 的第二右手直角坐标系上的坐标为 x' 和 y' . 如果在此二坐标系上的坐标, 均以同一尺度来量取的, 则坐标 x', y' 对于 x 和 y , 有下面的变换关系

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - x_0, \quad y' = y - y_0 \\ \text{或者} \quad x &= x' + x_0, \quad y = y' + y_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

上式也可有第二种解释. 如果将 x', y' 考虑成相对于 x, y 系上的坐标, 则由 x', y' 定义的点, 为对于点 (x, y) 在 x 轴方向上平移一有向量—— x_0 , 在 y 轴方向上平移一有向量—— y_0 . 施用这种变换于一平面曲线上, 可以用来指示整个曲线的平移.

§ 1.5 坐标轴的旋转

令 x, y 为任一点 P 对于一右手直角坐标系的坐标; x', y' 为此点在另一直角坐标系上的坐标, 原点相同, 而 x' 轴反时针方向旋转了一角度 θ (图 1.3). 如果坐标 x, y 和 x', y' 的单位都相同, 则它们间存在着变换关系:

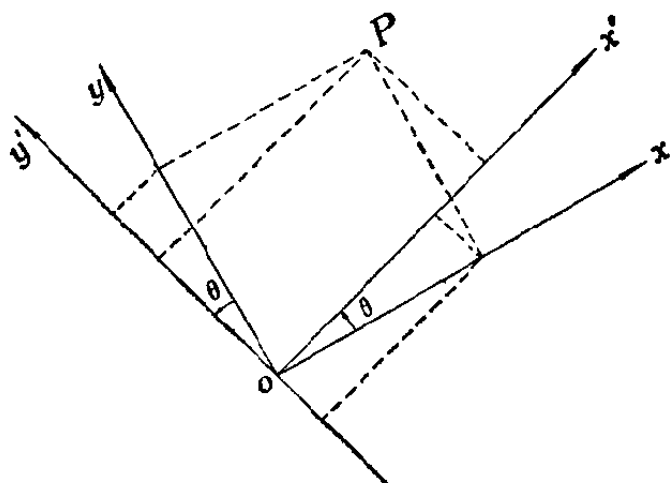


图 1.3 新旧坐标轴间的关系

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.8a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.8b)$$

令

$$\begin{aligned} l_{11} &= \cos(x', x) = \cos \theta \\ l_{12} &= \cos(x', y) = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta \\ l_{21} &= \cos(y', x) = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta \\ l_{22} &= \cos(y', y) = \cos \theta \end{aligned}$$

于是(1.8a)式可写为

$$\left. \begin{aligned} x' &= l_{11}x + l_{12}y \\ y' &= l_{21}x + l_{22}y \end{aligned} \right\} \quad (1.8c)$$

或

$$\left. \begin{aligned} x &= l_{11}x' + l_{21}y' \\ y &= l_{12}x' + l_{22}y' \end{aligned} \right\} \quad (1.8d)$$

上式的第二种解释，为一点 (x', y') 的定义，绕原点 o 对于点 (x, y) 旋转了一角度 $(-\theta)$ (图 1.4)。

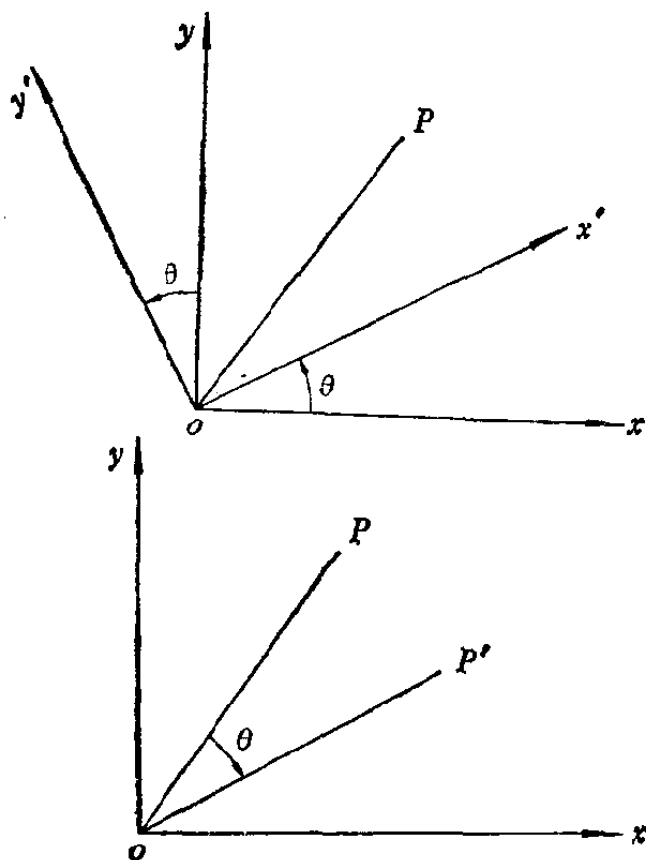


图 1.4 一点绕原点的旋转

§ 1.6 坐标轴的同时平移和旋转

如果上节中的 x', y' 系上的原点不与 x, y 系上者相同，而在 x, y 系上有坐标 x_0 及 y_0 ，则变换方程为

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta \\ y' &= -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.9a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} x' &= l_{11}(x - x_0) + l_{12}(y - y_0) \\ y' &= l_{21}(x - x_0) + l_{22}(y - y_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.9b)$$

$$\text{或} \quad \left. \begin{aligned} x &= x_0 + l_{11}x' + l_{21}y' \\ y &= y_0 + l_{12}x' + l_{22}y' \end{aligned} \right\} \quad (1.9c)$$

如果全部坐标,都具有同一的单位,公式(1.9 a), (1.9b) 及(1.9 c)允许我们将任意二直角坐标系联系起来.

变换公式(1.9 a), (1.9 b) 及(1.9 c)又可以理解为一点 (x', y') 对于点 (x, y) 平移和旋转的定义.

注意: 变换公式(1.7)、(1.8 a), (1.8 b), (1.9 a) 及(1.9c)并不影响二点间的距离值 [(1.1)式], 或由(1.2) 式所给出的角度值. 构成欧几里得几何学的诸关系, 并不受坐标系的平移和旋转的影响.

§ 1.7 极 坐 标

在一平面极坐标系上,以一有向直线作极轴为准,对于平面上每一点 P , 附以一成对的序列 r 及 θ (极坐标). 于是平面上每一点都由此 (r, θ) 定之. r 为该点位矢的长, θ 为该位矢与 ox 轴间的夹角.

θ 的正负是以位矢从 ox 轴起反时针方向量的,或顺时针方向量的为准.

如果一极坐标系的极与极轴, 和一右手直角坐标系的原点和 x 轴各各重合, 于是一点的极坐标 (r, θ) 与其在直角坐标系上的 (x, y) 有下面的关系:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ |r| &= +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan y/x \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

以极坐标为函数, 下面的诸关系成立:

(i) 二点 $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ 之间的距离 d 为

$$d = +\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} \quad (1.11)$$

(ii) 以 $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2), P_3(r_3, \theta_3)$ 为顶点的三角形

的面积 s 为

$$s = \frac{1}{2} \{ r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + r_1 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \} \quad (1.12)$$

如果三角形的周界 $P_1 P_2 P_3$, 沿三角形的内部取反时针方向为正, 则上式为正. 当 $r_3 = 0$, 则

$$s = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (1.13)$$

§ 1.8 直 线

在一已知的右手直角坐标系上, 每一线性方程

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \quad (1.14)$$

当 a_1, a_2 不同时为 0 时, 即代表一直线 (图 1.5). 反过来, 在平面的一有限范围内的每一直线, 都可以 (1.14) 式的一线性方程表之; 特别是当 $a_3 = 0$ 时, 直线通过原点.

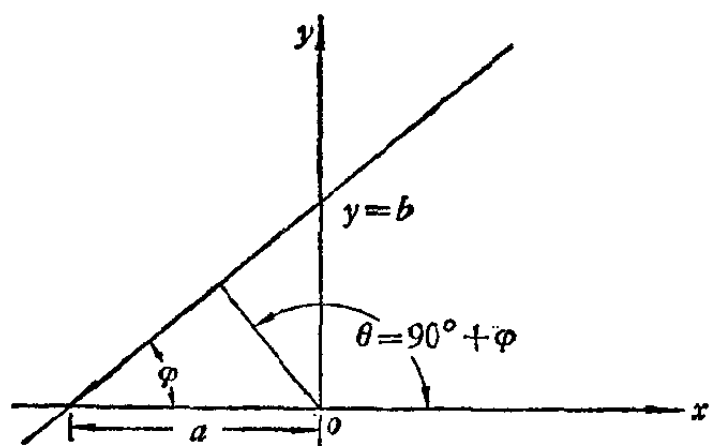


图 1.5 直线方程

令 p 为由原点起至此直线的距离, θ 为正 x 轴与该直线的法线间的角度, 反时针方向量的为正, 于是此直线有方程

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0 \quad (1.15)$$

如果一直线上有二点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 为已知, 则此直线

的方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad (1.16 \text{ a})$$

或

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad (1.16 \text{ b})$$

以极坐标 (r, φ) 为函数,任一直线的方程为

$$r(a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi) + a_3 = 0 \quad (1.17)$$

或

$$r \cos(\varphi - \theta) = p \quad (1.18)$$

式中

$$p = a_3 / (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$$

$$\cos \theta = \frac{a_1}{(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}}, \quad \sin \theta = \frac{a_2}{(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}}$$

§ 1.9 点与直线

从直线至一点 (x_0, y_0) 的有向距离 d 为

$$d = \frac{a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3}{(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}} \quad (1.19)$$

此地的 $(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$ 的符号,选择来与 a_3 者相反。如果直线在 (x_0, y_0) 与原点之间, d 为正。

三点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 及 (x_3, y_3) 在一直线上时,只有而且仅仅只有

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad (1.20)$$

才有可能。