

化工数学

J. M. 巴士涅尔 著
M. E. 波 津

高等教育出版社

化 工 数 学

Л. М. 巴士涅尔 著
M. E. 波 津
鄔 行 彦 等 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書系根据苏联国立化学科技書籍出版社 (Государственное научно-техническое издательство химической литературы) 出版的巴士涅尔 (Л. М. Батунов) 和波津 (М. Е. Позин) 合著的“化工数学” (Математические методы в химической технике) 1955 年第二版增訂本譯出。

本書收集了很多化学和化工方面的典型例子, 着重指出了如何运用高等数学的方法来解这些問題, 通过这些例子来说明如何把高等数学作为一个工具, 应用于化学和化工問題中。書中除叙述了高等数学上的一些基本知識外, 首先討論了如何按照物理現象的本質列出微分方程式, 并列举蒸餾、扩散、傳热等过程以及化学动力学方面的例子加以說明。其次, 除指出一般方法外, 还以实例說明如何运用三角級数、貝塞尔函数、运算微积等方法来解微分方程式。随后, 介紹了矢量分析在化学工程的流体輸送、傳热、傳質等方面的日見重要的应用; 以及相似論和統計計算这两种新的方法在化工上的应用。最后, 概述了用于处理实验数据的經驗公式及近似計算法方面的知識。

本書适于生产部門的工程师和研究机构的化学工作者閱讀, 亦可供化工高等学校的学生和研究生参考。

本書由沙必时、蔣宗鈺、鄔行彦、蔣慰孙、徐匡时、黃聖惠、丁健椿、顧其威、舒仁順、許航生、愈俊棠等同志譯出; 由徐匡时同志校閱了部分譯稿, 最后全稿由鄔行彦同志校閱和整理。本書的翻譯工作是在华东化工学院化工原理教研組主任顧毓珍教授领导下进行的。在翻譯本書旧版 (1953 年第一版) 时, 曾由吳越同志將所譯旧版的部分譯稿供譯者参考。

化 工 数 学

Л. М. 巴士涅尔, М. Е. 波津著

鄔行彦等譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠 170 号

(北京市書刊出版業營業許可證出字第 054 号)

商務印書館上海廠印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·368 开本 850×1168 1/32 印張 17 3/16 插頁 4 字數 438,000 印數 1—4,000

1957 年 11 月第 1 版 1957 年 11 月上海第 1 次印刷 定价 (10) 洋 3.00

第二版序

在1953年出版的第一版“化工数学”很快就銷售一空。这說明了化学家，——工程师和研究人員——对化工过程的数学分析有很大的兴趣。在新版中，加了两章：“运算微積的初步知識”和“貝塞尔函数及其应用”，并增加了一些化学动力学和化学工業方面的例題。

和第一版一样，本書既不是数学教科書，也不是数学方面的專著。本書的目的在于向化学家們指出在他們的实际工作中利用高等数学方法的效果，并介紹怎样去掌握这些方法。顯然，只有通过化工技術中具体問題的例子，才能达到这个目的。因此，本書收集了約200个例題。

第一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、十一、十二各章和第十三章的 §§1、2、6、7 各節由技術科学副博士 Л. М. 巴土涅尔副教授執筆。

第十三章 (§§3、4、5、8—13 各節) 和第十四、十五两章由技術科学博士 М. Е. 波津教授執筆。

作者對本書校閱者数理副博士 А. М. 普罗塔索夫副教授在校閱原稿的补充部分时所提出的一些有价值的意見，表示感謝。

讀者對本書缺点的一切意見，均將非常欢迎。

作 者

目 錄

第二版序	8
------	---

第一章 微分法

§ 1. 導數	1	§ 12. 气体混合物中含有惰性气体	
§ 2. 初等函数的導數	5	时的氧化速率	24
§ 3. 微分	11	§ 13. 气体中掺有空气时的最大氧	
§ 4. 高階導數	14	化速率	25
§ 5. 圖解微分法	14	§ 14. 最有利的容器形狀	26
§ 6. 偏導數	15	§ 15. 錐形漏斗的制造	27
§ 7. 面膨脹和体膨脹系数	17	§ 16. 关于制造反应容器时使所耗	
§ 8. 函数的極大和極小	19	材料最小的問題	29
§ 9. 气体兩級壓縮时的最適宜中		§ 17. 光化学过程的最大照度	30
間压力	20	§ 18. 不定式的定值	31
§ 10. 醋酸萃取問題	22	§ 19. 吸收計算中的問題	32
§ 11. 一氧化氮氧化时的最大速率	23		

第二章 積分法

§ 1. 两个引導出積分的問題	33	題	59
§ 2. 不定積分	35	§ 12. 定積分的性質	62
§ 3. 分液离心机中液面的形狀	43	§ 13. 函数的平均值	64
§ 4. 液体自儲器中流出的問題	46	§ 14. 反应的平均速度	65
§ 5. 几个有理分式的積分	50	§ 15. 汽油的平均比热	67
§ 6. 电离过程的化学动力学	52	§ 16. 圖解積分法	67
§ 7. 自动催化反应的动力学	53	§ 17. 油在管道中流动时流量的計	
§ 8. 定積分	55	算	69
§ 9. 定積分与不定積分間的关系	56	§ 18. 定積分的近似計算法	71
§ 10. 加热的問題	58	§ 19. 絕热化学反应的动力学	73
§ 11. 气体与蒸汽从小孔流出的問			

第三章 積分法的应用

§ 1. 一級过程	75	(a) 放射性元素的蜕变	75
-----------	----	--------------	----

1467462

(6) 放射性物質的原子的平均壽命.....76	(Д) 薄膜狀高溫熔渣的萃取過程...91
(B) 溶液濃度的變化.....77	§ 3. 同時進行的過程。平行反應.....95
(Г) 二溴丁二酸水解的反應速度常數之測定.....77	(a) 放射性元素蛻變反應的速度常數的測定.....95
(Д) 有關車間通風的問題.....78	(6) 二硝基苯生成反應的速度常數的測定.....97
(e) 物體的冷卻定律.....80	(B) 水自圓柱形容器中的流出.....98
(Ж) 有關大氣壓力的問題.....81	§ 4. 可逆過程.....102
(8) 乾燥動力學.....83	(a) 醋酸乙脂的生成.....104
§ 2. 二級和三級過程.....85	(6) 一氧化碳的反應.....106
(a) 反應級數的確定.....87	§ 5. 關於鹽的溶解問題.....109
(6) 各物質以化合當量存在時的二級反應.....88	§ 6. 二苯基甲烷及乙醇的反應速度常數的測定.....110
(B) 用沸騰的苯萃取硫.....89	§ 7. 連串過程.....113
(Г) 三級反應的延續時間.....90	§ 8. 混和過程。水煤氣的制備.....116

第四章 微分方程式的列出

§ 1. 兩液流相互作用的过程.....119	§ 9. 貯存在通大氣的容器中的苯的損失之計算.....140
§ 2. 有關微分方程式的一般知識...122	§ 10. 均相化學反應的一般方程式...142
§ 3. 簡單蒸餾過程的物料衡算.....124	§ 11. 恆容下進行的可逆反應系...144
§ 4. 熱量衡算.....126	§ 12. 反應物質在恆壓下連續流動時所發生的反應.....145
§ 5. 泡罩板的濃度梯度.....129	§ 13. 化學反應的級數的測定.....149
§ 6. 不穩定狀態下的蒸發.....132	
§ 7. 杆件中熱的傳遞.....135	
§ 8. 在螺旋式設備中的萃取作用...136	

第五章 常微分方程式的解法

§ 1. 變量的分離。齊次的及可化成齊次的方程式.....158	§ 9. 確定包含二個連串反應的系統之組成的方程式.....178
§ 2. 有機化合物的氯化過程.....161	§ 10. 杆件中熱的傳遞.....180
§ 3. 全微分方程式.....164	§ 11. 恆容下進行的可逆反應的方程式之解法.....182
§ 4. 一階綫性方程式.....165	§ 12. 固體顆粒在液體中的沉降.....183
§ 5. 二階方程式的若干類型.....167	§ 13. 在懸浮液中固體顆粒的沉降速度.....185
§ 6. 二階綫性微分方程式.....170	§ 14. 微分方程式的近似解法.....186
§ 7. 常系數方程式.....171	
§ 8. 液體在毛細管中的流動.....175	

第六章 運算微積的初步知識

§ 1. 基本概念.....192	§ 2. 導數的變換.....193
-------------------	--------------------

Scanned with

§ 3. 常系数綫性微分方程式的一般解法.....	195	§ 6. 运算微積的应用.....	203
§ 4. 某些初等函数的映像的求法...	198	§ 7. 伴随有化学反应的擴散过程...	206
§ 5. 常系数綫性微分方程組.....	201	§ 8. 水池中鹽的溶解过程.....	209

第七章 矢量分析概論

§ 1. 数量与矢量的概念。矢量的加法与減法及用数量乘矢量的乘法.....	211	§ 5. 矢量对于数性宗量的微分法...	216
§ 2. 两矢量的数性積.....	213	§ 6. 数量場。梯度.....	217
§ 3. 两矢量的矢性積.....	214	§ 7. 矢量場。散度。旋度.....	218
§ 4. 三个矢量的乘積.....	215	§ 8. 流体动力学方程式.....	222
		§ 9. 热傳導及擴散方程式.....	224

第八章 多变量函数的微分法和它在化学热力学上的应用

§ 1. 偏導数和偏微分。全微分.....	227	§ 7. 热力学上的全微分.....	244
§ 2. 复合函数的微分.....	229	§ 8. 热力学系統中自变量的变换...	248
§ 3. 从直角坐标系变换到柱面坐标系.....	238	§ 9. 一元單相系統的热力学函数及其導数間的关系.....	250
§ 4. 隱函数的微分法.....	241	§ 10. 热力学量的一階導数間的关	
§ 5. 單組分系統的状态方程式.....	242	系之推導.....	253
§ 6. 定積分对参量的微分法.....	243		

第九章 級数

§ 1. 沉淀的洗滌.....	265	§ 5. 級数对于解常微分方程式的应用.....	273
§ 2. 級数的收斂或發散.....	266	§ 6. 三角級数.....	275
§ 3. 級数的基本运算.....	268		
§ 4. 幂級数.....	270		

第十章 貝塞尔函数及其应用

§ 1. 貝塞尔微分方程式.....	281	§ 7. 指标等于奇整数之半的貝塞尔函数.....	290
§ 2. 用級数解貝塞尔微分方程式...	282	§ 8. 將函数展开成貝塞尔函数的級数.....	291
§ 3. 第二类 n 階貝塞尔函数.....	285	§ 9. 在楔形杆件中的热傳導.....	294
§ 4. 貝塞尔微分方程式的等价形式.....	286	§ 10. 柱面過濾.....	297
§ 5. 虛宗量貝塞尔函数.....	287		
§ 6. $J_n(x)$ 的遞推公式.....	288		

第十一章 偏微分方程式

§ 1. 偏微分方程式的最簡單的例子.....	301	大平板.....	319
§ 2. 一階綫性偏微分方程式.....	302	§ 9. 兩气体的相互擴散.....	320
§ 3. 物料衡算方程式的微分形式.....	303	§ 10. 无限長圓柱体上热傳導方程式的解.....	322
§ 4. 热傳導方程式.....	304	§ 11. 无限大平板的恆速干燥.....	327
§ 5. 過濾方程式.....	307	§ 12. 穩定状态的热傳導.....	329
§ 6. 球面過濾.....	311	§ 13. 有关質量傳遞的問題.....	331
§ 7. 在无限大平板中热傳導方程式的解.....	315	§ 14. 不穩定擴散和热傳導問題的圖解法.....	335
§ 8. 最初温度分布不均匀的无限			

第十二章 相似論和因次分析

§ 1. 粘性流体的运动.....	342	§ 7. 在薄層中進行的热化学过程模型条件的分析.....	373
§ 2. 相似論.....	351	§ 8. 离子交換动力学.....	378
§ 3. 模型的傳热微分方程式.....	356	§ 9. 熔融鹽类和其他物質的結晶.....	380
§ 4. 流体动力相似.....	358	§ 10. 准数方程式中常数的求定.....	383
§ 5. 热相似.....	362	§ 11. 因次分析.....	390
§ 6. 流动萃取方程式之推導.....	366		

第十三章 統計的計算方法

§ 1. 概率論的一般概念.....	397	§ 7. 概率論对混合及乳化动力学的应用.....	412
§ 2. 概率論的基本定理.....	400	§ 8. 随机变量的分布。数学期望.....	419
§ 3. 最或然的頻数.....	406	§ 9. 数量的平均值.....	423
§ 4. 概率 $P_{m,n}$ 的近似值。拉普拉斯定理.....	407	§ 10. 誤差理論.....	427
§ 5. 不重复挑选时的概率.....	411	§ 11. 最小二乘方法.....	446
§ 6. 稀疏事件.....	412	§ 12. 相关.....	450

第十四章 經驗公式

§ 1. 幂函数与指数函数.....	465	均值法.....	472
§ 2. 拋物綫內插法.....	467	§ 5. 某些函数的典型圖形.....	474
§ 3. 經驗公式的選擇。直綫化法.....	471	§ 6. 用圖解法求定系数.....	491
§ 4. 經驗公式中系数的求定。平			

第十五章 近似計算法

§ 1. 近似值的絕對誤差与相對誤差.....	498
-------------------------	-----

§ 2. 数的捨入.....	501	§ 4. 函数的誤差.....	514
§ 3. 和、差、積、商、乘冪及方根的 誤差.....	505	§ 5. 几个近似公式的应用.....	526
		§ 6. 方程式的近似解法.....	529

参考書刊	542
------------	-----

附錄 I. 某些函数的映像和原像.....	545
-----------------------	-----

附錄 II. γ -函数.....	547
--------------------------	-----

附錄 III. 貝塞尔函数.....	548
--------------------	-----

附錄 IV. 積分 $\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ 的值.....	550
--	-----

第一章 微分法

§ 1. 導数

微分学主要是用來研究当物体的状态和性質連續改变时的各种現象。

無論我們所研究的是何種現象，只有在得到下面两个一般性的結果时，关于这个現象的研究才能認為滿意：(1)得出了表示現象的整个过程的規律；(2)确定了在每一任意瞬間，現象是怎样進行的和由什么决定的。顯然，現象的整个过程和它的各个瞬間應該有因果关系。

只要知道了支配現象的一般法則，就可以利用計算來求定它的各个瞬間和性質；同样，若知道了各个階段的規律，就可以利用計算來推得整个現象的規律。这是利用高等数学的方法就能办到的。

例如，从一般性的質量作用定律，可以推出一些公式來表明化学变化的过程和算出它的最終状态。同样，若假定热流和温度降成正比，就可以得出关于任何導热体中的热分布的計算方法。

究竟是那些觀念使数学方法有可能应用于研究各种过程呢？究竟靠什么輔助方法能够毫无錯誤地將一般性規律轉換为个别事例或將个别事例轉換为一般性規律呢？

当空气以其振动而傳播声音时，它發生了一系列松稀和稠密互相交替的变化；当气体爆炸时，温度升至一定的最大值，接着又迅速下降，——我們所遇到的每一現象，它在任何瞬間的情况都是与前一瞬間的情况不相同的。为了了解这些現象，我們常常將它

們划分为許多“單元組分”。即划分成一系列的为时極短的各个現象,并且假定在这段時間內,現象的進行是均匀的。这种方法具有極重要的意义,現举一例以說明。

設有一个物体作等速直綫运动。它每秒所經過的距离称为速度。但假如物体不是作等速运动,那末为了要得到它的速度的概念,必須利用輔助方法,就是將运动过程划分为一系列的微小階段,并且假定在每一个階段內,現象均匀地進行,即作等速地运动,但从一个階段轉到另一个階段时,速度突然改变。

对于其他事例,处理方法也完全类此。假如要得到关于重力作用的概念,就必须作这样的假定:每經過相同的微小时間后,重力就給下落的物体以衝量,每次此衝量都突然使运动速度改变,而在各段時間內,此速度則保持不变。

在研究液体的受热膨脹、气体的因压力改变而被压縮、化学反应的進程或任何其他过程时,我們常常將它們划分成許多單元,如此可以更易于求出未知的規律性。

因此,研究現象的上述方法是近似的。所取間隔愈短,則与实际情况接近的程度就愈大。

实际遇到的問題,很多都牽涉到变化速率随時間而改变的情况,例如在間歇过程中就是如此;但是,作为变量的某一物理量的变化速率并不一定对時間而言,而常常是对物質在空間的位置或濃度等等而言。例如在連續操作的換热器中,可以确定出來在其中每一点的傳热速率变化的規律;当液体在導管中运动时,摩擦定律决定影响压头損失的各个变量。

当研究各种过程的規律时,首先遇到的問題是怎样去求这些过程的速率,这个决定某一变量的变化速率的問題就引出了科学上最重要概念之一——導数的概念。

設想某点 M 系作直綫运动。并以 x 表示時間,以 y 表示 M 点在 x 時間內所經過的路程。因为此点是在运动,所以 y 將随着

x 的变化而变化； y 是 x 的函数，即 $y=f(x)$ 。現在來看一看从 x 到 $x+\Delta x$ 的這一段時間，并求定在此段時間內运动的平均速度。为此，必須以時間去除該点所經過的路程，即以 Δx 去除 Δy ：

$$\text{运动平均速度} = \frac{\Delta y}{\Delta x}。$$

現在假設 Δx 逐漸减小而趋近于零，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 將表示从 x 到 $x+\Delta x$ 这个逐漸縮短的時間內的平均运动速度。当 Δx 趋近于 0 时，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所趋近的極限就表示質点在 x 瞬間的真正运动速度 v ：

$$v = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}。$$

許多問題都要求找出这种極限，因此有必要單獨地來研究計算这种極限的手續并揭示出它的性質。

我們所研究的極限是 x 的某一个新的函数，我們称它为原函数的導数，并以下式表之：

$$y' \text{ 或 } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}。 \quad (1)$$

因此：函数 y 的增量 Δy 对于相应的自变量 x 的增量 Δx 之比，在 $\Delta x \rightarrow 0$ 时所达的極限，称为 y 对于自变量 x 的導数。

無論我們所研究的函数 $y=f(x)$ 是代表什么过程，从物理观点看來，都可以將導数 y' 看作是該过程進行的速率。

設 τ 为時間， Q 为到 τ 时为止某一反应所產生的物質的数量，則 Q 是 τ 的函数，而導数 Q' 就是表示反应進行速率的函数。

又設 τ 为時間， Q 为每單位時間內通过導體截面的电量，則 Q' 就是电流强度。

最后，若 Q 表示被加热物体的变化溫度，則導数 Q' 就是加热的速度。

假如撇开变量 x 和 y 的物理意义，則 y 对 x 的導数即表示 y 随 x 而变化的变化速率。

導數有重要的幾何意義。

設曲綫(圖 1)表示函數 $y=f(x)$ 的圖解,試求曲綫上某一點 $P(x, y)$ 的切綫的斜率①。

在曲綫上取一點 $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$, 此點在 P 點附近。顯然, PP_1 的斜率是 $\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。假如現在 Δx (和 Δy) 逐漸趨向於零, 則弦 PP_1 的方向將逐漸接近於 P 點切綫的方向。因此

$$\tan \alpha' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'。 \quad (2)$$

根據上述導數的定義可見: 從幾何觀點而論, 函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 時的導數, 就是曲綫 $y=f(x)$ 上 $x=a$ 點處的切綫與正向 OX 軸所成角的正切。

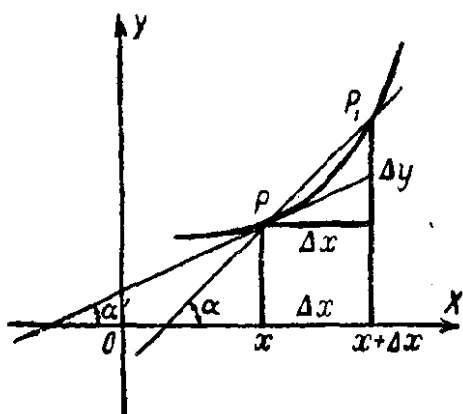


圖 1

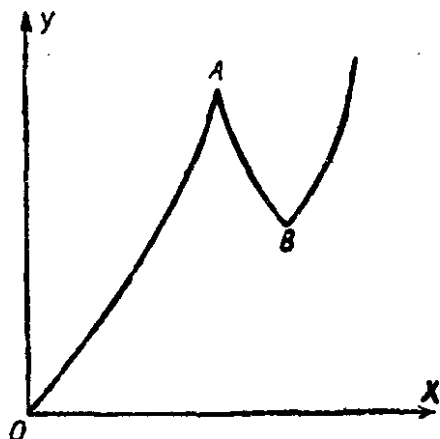


圖 2

從導數的幾何意義可知: 假如某一點的導數是正的, 則在此點函數在增大; 假如導數是負的, 則函數在減小。

應當指出, 並不是一切函數都有導數。為了導數的存在, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 比必須在 $\Delta x \rightarrow 0$ 時趨向於一定的極限。為此, 在代表函數 $y=f(x)$ 的曲綫上, 必須能夠作出一定的切綫(並且不平行於 OY), 圖 2 所示的曲綫, 代表一個函數, 在它的 A 點和 B 點上沒有導數。

求取某一函數的導數的運算手續, 稱為這個函數的微分法。

① 直綫與正向 OX 軸所成的角的正切, 稱為這直綫的斜率。

§ 2. 初等函数的導数

这節中將論述微分的法則而且推演求初等函数的導数的基本公式。

1. 常量的導数等于零 这是从導数的物理意义的必然結論：常量是不变的，它的变化率等于零。

2. 幂函数 $y=x^n$ 的導数 如果 x 有一增量 Δx ，那末 y 必有一增量：

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n。$$

假設 n 为正整数，按二項式展开 $(x + \Delta x)^n$ 可得：

$$\Delta y = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \dots,$$

式中的黑点表示含有 Δx 幂次在一以上的各項，而且

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x(\dots)。$$

取 $\Delta x \rightarrow 0$ 时上式的極限，即得：

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [nx^{n-1} + \Delta x(\dots)] = nx^{n-1}。$$

注意，求得的公式

$$(x^n)' = nx^{n-1}。$$

在 n 为分数或負数时也是正确的。例如：

$$(x^3)' = 3x^2; \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}。$$

如果压力为 P 时，气体的容積为 V ，則已熟知， P 和 V 的关系是

$$VP = V_0 P_0,$$

式中， V_0 及 P_0 是原來的容積和压力。如果解此式以求 V ，即得

$$V = \frac{V_0 P_0}{P},$$

則取上式的導數，可得容積隨壓力改變時的變化率：

$$V' = -\frac{V_0 P_0}{P^2}。$$

此處導數為負的，即表示壓力增加時容積減小。

3. 正弦和余弦的導數 設 $y = \sin x$ ；如果 x 有一增量 Δx ，則 y 的增量是：

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}；$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}。$$

如果 $\Delta x \rightarrow 0$ ，則右邊的第一個因子趨向於 $\cos x$ ，而第二個因子為不定式 $\frac{0}{0}$ 。求第二因子所趨向的極限時，可應用下述的在極限論中已證明的重要定理：

如果角 x 的單位以弧度計，則於 $x \rightarrow 0$ 時，

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1，$$

由此得一結論：當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時，則 $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1$ ，

因此：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x；(\sin x)' = \cos x。$$

同樣可以證明

$$(\cos x)' = -\sin x。$$

4. 幾個函數代數和的導數 等於各個函數的導數之和。設有

$y=u(x); z=v(x); t=w(x)$, 則

$$(y+z-t)'=y'+z'-t'.$$

例如, 設 $y=x^4+\cos x$, 則 $y'=4x^3-\sin x$ 。

5. 常量因子可寫于導數符號之前 設有 $y=au(x)$, 其中 a 为常量, 則

$$y'=au'(x)。$$

例如, 設 $y=4x^5$, 則 $y'=20x^4$ 。

6. 乘積的導數 設有 $y=u \cdot v$, 其中 u 和 v 为 x 的函数, 那么

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}。$$

如果 $\Delta x \rightarrow 0$, 則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 、 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ 、 $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ 对应地各趋向于 y' 、 u' 、 v' , 又

因 $\Delta u \rightarrow 0$, 故得:

$$y' = (uv)' = u'v + v'u。$$

例: $y = x \sin x; y' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x。$

$$\begin{aligned} y &= \sin x \cos x; y' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x。 \end{aligned}$$

7. 商的導數 設有 $y = \frac{u}{v}$, 其中 u 和 v 为 x 的函数, 將此式改寫为 $u = yv$ 而且应用乘積的導數公式來微分, 就求得:

$$u' = y'v + yv', \text{ 由此得 } y' = \frac{u'}{v} - y \frac{v'}{v}。$$

以 $\frac{u}{v}$ 代 y , 即得出下列公式:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}。$$

$$\begin{aligned} \text{例: } y &= \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; y' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}。 \end{aligned}$$

同样可以断言： $\cot x$ 的導数等于 $-\frac{1}{\sin^2 x}$ 。

8. 对数的導数 設 $y = \log_a x$ 。則

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}。$$

欲求該式在 $\Delta x \rightarrow 0$ 时所趋向的極限, 可設

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n},$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{x}}。$$

如果 $\Delta x \rightarrow 0$ 則 n 趋于无窮大, 而有

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{x}}。$$

方括弧內之極限在科学及工程上有重要的意义。

在極限論中業已証明：如果 n 趋于无窮大, 則 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ 趋向一有限的極限, 此極限可以符号 e 表之：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e。 \quad \Delta \quad (3)$$

e 的近似值为

$$e = 2.71828 \dots\dots。 \quad (4)$$

因此, 若再討論对数導数的推演, 即得：

$$y' = (\log_a x)' = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e。$$

若即取 e 为此对数系的底, 换言之, 当 $a = e$ 时, 上式就可以簡化。此时 $\log_a e = 1$, 于是

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}。$$