化工数学

Л. М. 巴士湼尔
M. E. 波　津 著

高等教育出版社

化 工 数 学

Л. М. 巴士涅尔 著
М. Е. 波 津
郎行彦等譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立化学科技書籍出版社（Государственное научно-техническое издательство химической литературы）出版的巴土涅尔（Л. М. Батунер）和波津（М. Е. Позин）合著的“化工数学”（Математические методы в химической технике）1955 年第二版增訂本譯出。

本書收集了很多化学和化工方面的典型例子，着重指出了如何运用高等数学的方法来解这些問題，通过这些例子来說明如何把高等数学作爲一个工具，应用于化学和化工問題中。書中除叙述了高等数学上的一些基本知識外，首先討論了如何按照物理現象的本質列出微分方程式，并列举蒸餾、扩散、傳热等过程以及化学动力学方面的例子加以說明。其次，除指出一般方法外，还以实例說明如何运用三角級数、貝塞尔函数、运算微积等方法来解微分方程式。随后，介紹了矢量分析在化学工程的流体輸送、傳热、傳質等方面的日見重要的应用；以及相似論和統計計算这兩种新的方法在化工上的应用。最后，概述了用于处理实驗数据的經驗公式及近似計算法方面的知識。

本書适于生产部門的工程师和研究机構的化学工作者閱讀，亦可供化工高等学校的学生和研究生参考。

本書由沙必时、蔣宗鈺、鄔行彥、蔣慰孙、徐匡时、黃聖惠、丁健椿、顧其威、舒仁順、許航生、愈俊棠等同志譯出；由徐匡时同志校閱了部分譯稿，最后全稿由鄔行彥同志校閱和整理。本書的翻譯工作是在华东化工学院化工原理教研組主任顧毓珍教授領导下进行的。在翻譯本書旧版（1953 年第一版）时，曾由吳越同志將所譯旧版的部分譯稿供譯者参考。

化　工　数　学

Л. М. 巴土涅尔，М. Е. 波津著

鄔行彥等譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業营業許可證出字第054号）

商務印書館上海廠印刷　新华書店总經售

統一書号 13010·368 开本 850×1168 1/32 印張 17 3/16 插頁 4 字数 438,000 印数 1—4,000

1957 年11月第1版　1957年11月上海第1次印刷 定价(10) ￥3.00

第二版序

在1953年出版的第一版"化工数学"很快就銷售一空。这說明了化学家，——工程师和研究人員——对化工过程的数学分析有很大的兴趣。在新版中，加了两章："运算微積的初步知識"和"貝塞尔函数及其应用"，并增加了一些化学动力学和化学工業方面的例題。

和第一版一样，本書既不是数学教科書，也不是数学方面的專著。本書的目的在于向化学家們指出在他們的实际工作中利用高等数学方法的效果，并介紹怎样去掌握这些方法。顯然，只有通过化工技術中具体問題的例子，才能达到这个目的。因此，本書收集了約200个例題。

第一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、十一、十二各章和第十三章的§§1、2、6、7各節由技術科学副博士 Л.М. 巴士涅尔副教授执筆。

第十三章(§§3、4、5、8—13各節)和第十四、十五两章由技術科学博士 M.E. 波津教授执筆。

作者对本書校閱者数理副博士 A.M. 普罗塔索夫副教授在校閱原稿的补充部分时所提出的一些有价值的意見，表示感謝。

讀者对本書缺点的一切意見，均將非常欢迎。

作　者

目 錄

第四章 微分方程式的列出

第五章 常微分方程式的解法

第六章 运算微積的初步知識

第七章 矢量分析概論

第八章 多变量函数的微分法和它在化学热力学上的应用

第九章 級数

第十章 貝塞尔函数及其应用

第十一章　偏微分方程式

第十二章　相似論和因次分析

第十三章　統計的計算方法

第十四章　經驗公式

第十五章　近似計算法

第一章　微分法

§1. 導数

微分学主要是用來研究当物体的狀态和性質連續改变时的各种現象。

无論我們所研究的是何种現象，只有在得到下面两个一般性的結果时，关于这个現象的研究才能認为滿意：(1)得出了表示現象的整个过程的規律；(2)确定了在每一任意瞬間，現象是怎样進行的和由什么决定的。顯然，現象的整个过程和它的各个瞬間应該有因果关系。

只要知道了支配現象的一般法則，就可以利用計算來求定它的各个瞬間和性質；同样，若知道了各个階段的規律，就可以利用計算來推得整个現象的規律。这是利用高等数学的方法就能办到的。

例如，从一般性的質量作用定律，可以推出一些公式來表明化学变化的过程和算出它的最終狀态。同样，若假定热流和温度降成正比，就可以得出关于任何導热体中的热分布的計算方法。

究竟是那些观念使数学方法有可能应用于研究各种过程呢？究竟靠什么輔助方法能够毫无錯誤地將一般性規律轉換为个別事例或將个別事例轉換为一般性規律呢？

当空气以其振动而傳播声音时，它發生了一系列松稀和稠密互相交替的变化；当气体爆炸时，温度升至一定的最大值，接着又迅速下降，——我們所遇到的每一現象，它在任何瞬間的情况都是与前一瞬間的情况不相同的。为了了解这些現象，我們常常將它

們划分为許多"單元組分"。卽划分成一系列的为时極短的各个現象，并且假定在这段时間內，現象的進行是均勻的。这种方法具有極重要的意义，現举一例以說明。

設有一个物体作等速直綫运动。它每秒所經过的距离称为速度。但假如物体不是作等速运动，那末为了要得到它的速度的概念，必須利用輔助方法，就是將运动过程划分为一系列的微小階段，并且假定在每一个階段內，現象均勻地進行，卽作等速地运动，但从一个階段轉到另一个階段时，速度突然改变。

对于其他事例，处理方法也完全类此。假如要得到关于重力作用的概念，就必須作这样的假定：每經过相同的微小时間后，重力就給下落的物体以衝量，每次此衝量都突然使运动速度改变，而在各段时間內，此速度則保持不变。

在研究液体的受热膨脹、气体的因压力改变而被压縮、化学反应的進程或任何其他过程时，我們常常將它們划分成許多單元，如此可以更易于求出未知的規律性。

因此，研究現象的上述方法是近似的。所取間隔愈短，則与眞实情况接近的程度就愈大。

实际遇到的問題，很多都牽涉到变化速率随时間而改变的情况，例如在間歇过程中就是如此；但是，作为变量的某一物理量的变化速率并不一定对时間而言，而常常是对物質在空間的位置或濃度等等而言。例如在連續操作的換热器中，可以确定出來在其中每一点的傳热速率变化的規律；当液体在導管中运动时，摩擦定律决定影响压头損失的各个变量。

当研究各种过程的規律时，首先遇到的問題是怎样去求这些过程的速率，这个决定某一变量的变化速率的問題就引出了科学上最重要概念之一——導数的概念。

設想某点 M 系作直綫运动。并以 x 表示时間，以 y 表示 M 点在 x 时間內所經过的路程。因为此点是在运动，所以 y 將随着

x 的变化而变化；y 是 x 的函数，即 $y=f(x)$。現在來看一看从 x 到 $x+\Delta x$ 的这一段时間，幷求定在此段时間內运动的平均速度。为此，必須以时間去除該点所經过的路程，即以 Δx 去除 Δy：

$$\text{运动平均速度}=\frac{\Delta y}{\Delta x}。$$

現在假設 Δx 逐漸減小而趋近于零，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 將表示从 x 到 $x+\Delta x$ 这个逐漸縮短的时間內的平均运动速度。当 Δx 趋近于 0 时，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所趋近的極限就表示質点在 x 瞬間的眞正运动速度 v：

$$v=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}。$$

許多問題都要求找出这种極限，因此有必要單独地來研究計算这种極限的手續幷揭示出它的性質。

我們所研究的極限是 x 的某一个新的函数，我們称它为原函数的導数，幷以下式表之：

$$y' \text{ 或 } f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}。\tag{1}$$

因此：函数 y 的增量 Δy 对于相应的自变量 x 的增量 Δx 之比，在 $\Delta x\to 0$ 时所达的極限，称为 y 对于自变量 x 的導数。

无論我們所研究的函数 $y=f(x)$ 是代表什么过程，从物理观点看來，都可以將導数 y' 看作是該过程進行的速率。

設 τ 为时間，Q 为到 τ 时为止某一反应所產生的物質的数量，則 Q 是 τ 的函数，而導数 Q' 就是表示反应進行速率的函数。

又設 τ 为时間，Q 为每單位时間內通过導体截面的电量，則 Q' 就是电流强度。

最后，若 Q 表示被加热物体的变化温度，則導数 Q' 就是加热的速度。

假如撇开变量 x 和 y 的物理意义，則 y 对 x 的導数即表示 y 随 x 而变化的变化速率。

導数有重要的几何意义。

設曲綫(圖 1)表示函数 $y=f(x)$ 的圖解，試求曲綫上某一点 $P(x,y)$ 的切綫的斜率①。

在曲綫上取一点 $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$，此点在 P 点附近。顯然，PP_1 的斜率是 $\tan\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。假如現在 Δx（和 Δy）逐漸趋向于零，則弦 PP_1 的方向將逐漸接近于 P 点切綫的方向。因此

$$\tan\alpha'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'。\qquad(2)$$

根据上述導数的定义可見：从几何观点而論，函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 时的導数，就是曲綫 $y=f(x)$ 上 $x=a$ 点处的切綫与正向 OX 軸所成角的正切。

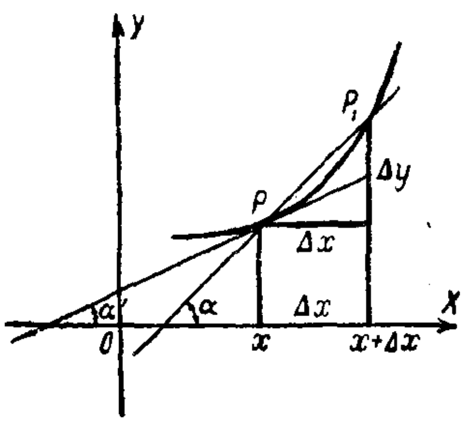

圖 1

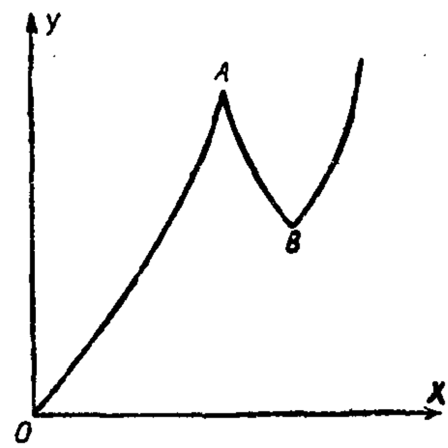

圖 2

从導数的几何意义可知：假如某一点的導数是正的，則在此点函数在增大；假如導数是負的，則函数在減小。

应当指出，并不是一切函数都有導数。为了導数的存在，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 比必須在 $\Delta x\to 0$ 时趋向于一定的極限。为此，在代表函数 $y=$ $=f(x)$ 的曲綫上，必須能够作出一定的切綫(并且不平行于 OY)，圖 2 所示的曲綫，代表一个函数，在它的 A 点和 B 点上沒有導数。

求取某一函数的導数的运算手續，称为这个函数的微分法。

---

① 直綫与正向 OX 軸所成的角的正切，称为这直綫的斜率。

§2. 初等函数的導数

这節中將論述微分的法則而且推演求初等函数的導数的基本公式。

1. 常量的導数等于零 这是从導数的物理意义的必然結論：常量是不变的，它的变化率等于零。

2. 冪函数 $y=x^n$ 的導数 如果 x 有一增量 Δx，那末 y 必有一增量：

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n。$$

假設 n 为正整数，按二項式展开 $(x+\Delta x)^n$ 可得：

$$\Delta y=nx^{n-1}\cdot\Delta x+\cdots,$$

式中的黑点表示含有 Δx 冪次在一以上的各項，而且

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\Delta x(\cdots)。$$

取 $\Delta x\to 0$ 时上式的極限，卽得：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+\Delta x(\cdots)]=nx^{n-1}。$$

注意，求得的公式

$$(x^n)'=nx^{n-1}。$$

在 n 为分数或負数时也是正确的。例如：

$$(x^3)'=3x^2;\ \left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2};$$

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}。$$

如果压力为 P 时，气体的容積为 V，則已熟知，P 和 V 的关系是

$$VP=V_0P_0,$$

式中，V_0 及 P_0 是原來的容積和压力。如果解此式以求 V，卽得

$$V=\frac{V_0P_0}{P},$$

則取上式的導数，可得容積随压力改变时的变化率：

$$V'=-\frac{V_0P_0}{P^2}。$$

此处導数为負的，卽表示压力增加时容積減小。

3. 正弦和余弦的導数 設 $y=\sin x$；如果 x 有一增量 Δx，則 y 的增量是：

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}。$$

如果 $\Delta x\to 0$，則右边的第一个因子趋向于 $\cos x$，而第二个因子为不定式 $\frac{0}{0}$。求第二因子所趋向的極限时，可应用下述的在極限論中已証明的重要定理：

如果角 x 的單位以弧度計，則于 $x\to 0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

由此得一結論：当 $\Delta x\to 0$ 时，則 $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1,$

因此：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x;\ (\sin x)'=\cos x。$$

同样可以証明

$$(\cos x)'=-\sin x。$$

4. 几个函数代数和的導数 等于各个函数的導数之和。設有

$y=u(x)$; $z=v(x)$; $t=w(x)$，則

$$(y+z-t)'=y'+z'-t'。$$

例如，設 $y=x^4+\cos x$，則 $y'=4x^3-\sin x$。

5. 常量因子可寫于導数符号之前 設有 $y=au(x)$，其中 a 为常量，則

$$y'=au'(x)。$$

例如，設 $y=4x^5$，則 $y'=20x^4$。

6. 乘積的導数 設有 $y=u\cdot v$，其中 u 和 v 为 x 的函数，那么

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}。$$

如果 $\Delta x\to 0$，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$、$\frac{\Delta u}{\Delta x}$、$\frac{\Delta v}{\Delta x}$ 对应地各趋向于 y'、u'、v'，又因 $\Delta u\to 0$，故得：

$$y'=(uv)'=u'v+v'u。$$

例：$y=x\sin x$；$y'=(x)'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$。

$y=\sin x\cos x$；$y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$。

7. 商的導数 設有 $y=\frac{u}{v}$，其中 u 和 v 为 x 的函数，將此式改寫为 $u=yv$ 而且应用乘積的導数公式來微分，就求得：

$$u'=y'v+yv'，由此得\ y'=\frac{u'}{v}-y\frac{v'}{v}。$$

以 $\frac{u}{v}$ 代 y，即得出下列公式：

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}。$$

例：$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$；$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=$

$=\frac{1}{\cos^2 x}$。

同样可以断言：$\cot x$ 的導数等于 $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$。

8. 对数的導数　設 $y=\log_a x$。則

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}。$$

欲求該式在 $\Delta x\to 0$ 时所趋向的極限，可設

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{n},$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}}。$$

如果 $\Delta x\to 0$ 則 n 趋于无窮大，而有

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\log_a\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{x}}。$$

方括弧内之極限在科学及工程上有重要的意义。

在極限論中業已証明：如果 n 趋于无窮大，則 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 趋向一有限的極限，此極限可以符号 e 表之：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e。\qquad (3)$$

e 的近似值为

$$e=2.71828\cdots\cdots。\qquad (4)$$

因此，若再討論对数導数的推演，卽得：

$$y'=(\log_a x)'=\log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e。$$

若卽取 e 为此对数系的底，換言之，当 $a=e$ 时，上式就可以簡化。此时 $\log_a e=1$，于是

$$(\log_e x)'=\frac{1}{x}。$$