

前 言

土建、水利类工程结构，由于受地震、风振及其它动力荷载作用产生的动力响应，已愈来愈为工程设计人员所关注，因而，在高等工科学学校土建、水利类专业的结构力学课程中，结构动力学内容的地位也随之提高。为了提供这些专业本科高年级学生、研究生的学习，以及有关工程技术人员学习参考，在水利部教材编审委员会的统一组织安排下我们编写了这本结构动力学教材。

本书编写考虑到理论力学、结构力学课程中有关的动力学基础，并以此为起点进行延伸、加深，这样既保持了学科体系的系统完整，又能遵循教学上的循序渐进，而且避免了课程之间不必要的重复。在介绍结构动力学基本理论和方法时，力求全面，但在具体分析计算中，则着重于工程实际应用的理论和方法，分清熟悉、了解与熟练掌握的不同层次。

本书和目前结构动力学课程基本内容相比，具有的特点是：既有时间域里的分析，又有频率域里的分析；既有线性系统的计算，又有非线性系统的计算；阻尼理论既有粘性阻尼计算，又有滞变阻尼、摩擦阻尼和等效粘性阻尼的计算；既有结构本身的计算，又有结构与周围介质组成系统的计算；对土建、水利工程结构最为突出的地震响应，书中专门列章，较为全面地介绍了各种情况下的分析计算方法。

本书由赵光恒主编。其中第一、二、四章由赵光恒编写，第三、五、六章由张子明编写，钱向东协助计算了部分例题。本书由工程院院士龙驭球教授主审。龙教授对书稿提出了许多宝贵意见，使本书质量得到提高。对此，我们表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中欠缺和不妥之处，希望读者给予批评指正。

编 者

1993. 12. 25

内 容 提 要

本书系高等工科学校土木、水利类专业学生学完结构力学课程后,为进一步拓宽、加深结构动力学知识而编写的教学参考书。本书和结构力学课程中动力学部分相衔接,全面、系统、深入地介绍了结构动力分析的基本理论和计算方法。

全书共分6章。包括:绪论;单自由度系统的振动;多自由度系统的振动;无限自由度系统的振动;自振频率和振型的实用计算;结构的地震响应分析等。各章之后附有习题,部分习题还给出了答案,便于读者自学查阅。

本书可作为高等工科学校土木、水利类专业本科高年级学生、研究生的选修课教材或教学参考书,也可供有关工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学/赵光恒主编. —北京:中国水利水电出版社, 1995
高等学校教材

ISBN 7-80124-066-9

I. 结… I. 赵… III. 水工结构-结构动力学-高等学校-教材 IV. TV312

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 14454 号

书 名	高等学校教材 结构动力学
作 者	河海大学 赵光恒 主编
出 版	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044)
发 行	新华书店北京发行所
经 售	全国各地新华书店
排 版	北京市京建照排厂
印 刷	北京市朝阳区小红门印刷厂
规 格	787×1092 毫米 16 开本 10.75 印张 241 千字
版 次	1996 年 5 月第一版 1996 年 5 月北京第一次印刷
印 数	0001—1070 册
定 价	8.50 元

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 基本概念	1
第二节 结构系统的简化	2
第三节 结构振动中的能量耗散—阻尼力	3
第四节 运动方程式的建立	4
习题	9
第二章 单自由度系统的振动	11
第一节 单自由度系统振动的基础知识	11
第二节 关于阻尼的补充知识	16
第三节 周期荷载作用下的响应	19
第四节 一般荷载作用下的响应	21
第五节 非线性系统的动力响应	27
习题	30
第三章 多自由度系统的振动	32
第一节 运动方程的建立	32
第二节 结构特性矩阵的计算	33
第三节 多自由度系统的自由振动	41
第四节 多自由度系统的动力响应	53
第五节 非线性系统的动力分析	67
习题	69
第四章 无限自由度系统的振动	72
第一节 直梁弯曲振动的基本方程	72
第二节 直梁弯曲的无阻尼自由振动	73
第三节 简谐荷载下直梁弯曲无阻尼受迫振动	79
第四节 一般荷载下直梁弯曲有阻尼受迫振动	83
第五节 轴向力、剪切变形和惯性转矩对直梁弯曲自由振动的影响	87
习题	91
第五章 自振频率和振型的实用计算	93
第一节 能量法求自振频率	93
第二节 幂法计算自振频率和振型	101
第三节 子空间迭代法	109
第四节 对奇异矩阵的处理	117
习题	118
第六章 结构地震响应分析	120

第一节	概述	120
第二节	刚性地基上结构的响应	120
第三节	多支座不同干扰时结构的响应	131
第四节	结构与地基的动力相互作用	133
第五节	结构与水体的动力相互作用	144
习题		162
附录克雷洛夫函数数值表		164
参考文献		166

第一章 绪 论

第一节 基 本 概 念

一、动力荷载及其分类

动力荷载或动荷载是指其大小、或方向、或作用点位置随时间而变化的荷载。动力荷载按其是否具有随机性可分为确定性和非确定性两类。确定性动力荷载系指当时间给定后其量值是唯一确定的，故亦称数定的动力荷载。常见的确定性动力荷载是其方向、作用点位置不变，而其大小则随时间变化。例如：周期荷载，其中以简谐周期荷载最为常见；集度大短暂时间作用的冲击荷载；持续时间长的非周期一般荷载。

非确定性动力荷载的量值随时间的变化规律不是唯一确定的，而是一个随机过程，故亦称随机荷载，或称非数定的动力荷载。虽然非确定动力荷载不能用时间 t 的确定性函数来描述，但它受概率统计规律所制约。地震荷载、海浪荷载和风荷载都可视为具有随机性质的非确定性动力荷载。

二、动力计算的目的与任务

结构动力学研究结构在动力荷载作用下的位移和内力(统称响应)的分析原理和计算方法。结构动力学的研究方法有：理论计算法、试验量测法和计算、试验混合法三种。

在图 1-1 中，若已知结构系统的性态和动力荷载，则可用计算或试验的方法求得结构的响应，这是结构动力学的正分析问题。若已知动力荷载，并试验测得了结构的响应，要反求结构的性态；或者已知结构性态，并测得了结构的响应，要推求动力荷载，则为结构动力学的反分析问题，或称识别问题。前者称为系统识别，后者称为荷载识别。

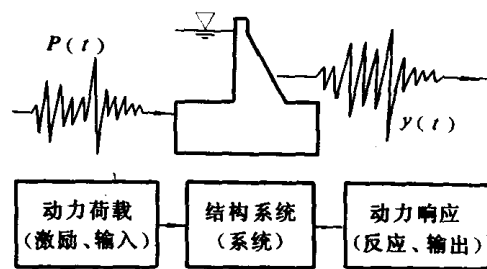


图 1-1 结构动力分析框图

确定结构在动力荷载作用下的响应是提供结构设计、保证结构的经济与安全的科学依据。应该说研究结构的受迫振动是结构动力分析的基本任务，但是，动力荷载作用下结构的响应计算一般都和结构本身固有的自振特性密切相关。例如，在简谐动力荷载 $P(t) = p\sin\omega t$ 作用下，若结构自振频率 ω 和荷载频率 $\bar{\omega}$ 很接近，即使荷载幅值 p 很小，结构的响应也会很大；反之，若结构的自振频率 ω 大于荷载频率 $\bar{\omega}$ 5 倍以上（即 $\omega > 5\bar{\omega}$ ）则结构的响应和将幅值 p 作为静力荷载作用所得的响应差不多。由此可见，求解结构的自振特性问题，往往就成为受迫振动计算的前导。

在结构动力计算中，由于荷载是时间的函数，结构的响应也是时间的函数。结构的运动方程中除了动力荷载 $P(t)$ 和弹簧力 $f_s(t)$ 之外，还要引入因其质量产生的惯性力 $f_I(t)$ 和耗散能量的阻尼力 $f_d(t)$ 。而且，对于结构除了需要知道其质量分布、几何形态外，还应该采用反映其动力性能的参数，如动弹性模量 E 、动剪切模量 G 等等。

第二节 结构系统的简化

结构系统的动力计算和静力计算一样也需要选择计算简图。因为要考虑质量的惯性力，所以必须明确结构的质量分布情况，并分析质量可能产生的位移。在结构系统运动的任一时刻，确定其全部质量位置所需的独立几何参变量的个数，称为系统的动力自由度。

实际结构的质量都是连续分布的，因此，它们都是无限自由度系统。对于无限自由度系统的动力计算，只有一些很简单的情況能给出解答，而且计算较为复杂。通常为了简化计算采用下列方法把实际结构简化为有限个自由度系统。

一、集中质体法

图 1-2 (a) 示高架水塔，其顶部水池的质量较大，相对而言高架部分的质量较小，可将水池的质量和部分高架的质量集中于顶部，简化为带一个质体的悬臂梁，如图 1-2

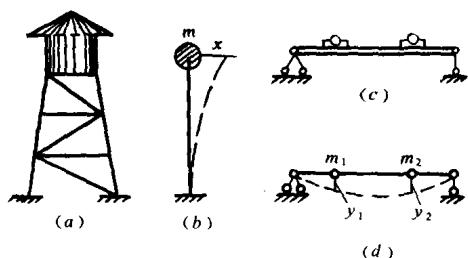


图 1-2 水塔及带重梁的计算简图

(b)。对于一个平面运动的质体具有三个自由度，即两个线位移和一个角位移。计算中往往略去角位移影响，并且在梁和刚架结构中还可略去杆件轴向变形引起质体的位移。这样图 1-2 (b) 质体只有一个独立参数 x ，故为单自由度系统。

图 1-2 (c) 示简支梁，梁上固定着两个质量较大的设备，若将梁的分布质量的一部分也集中在设备处，则其计算简图如图 1-2 (d)，确定质体位置需用两个独立参数 y_1 和 y_2 ，故为两个自由度系统。

图 1-3 (a) 示 310.10m 高的南京电视塔，在动力分析中对塔身采取分段集中质量的方法，简化为带有 16 个质体的悬臂梁结构，如图 1-3 (b)。

二、广义位移法

对于具有连续分布质量，且比较简单的结构可采用广义位移法。图 1-4 (a) 示简支梁，设在 t 时刻 x 点的位移为 $y(x, t)$ ，将它用一族位移函数的线性和表示：

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (1-1)$$

式中： $\sin \frac{i\pi x}{l}$ 为满足位移边界条件的位移函数； $a_i(t)$ 为待定的参数，亦称广义坐标。若给定各个广义坐标 $a_i(t)$ ，则 $y(x, t)$ 即可确定。也就是结构无限个自由度可以用无限个广义坐标 $a_i(t)$ 来表示。在一般情况下，只需要采用前面有限项叠加就有足够的精度，如取前三项叠加，即

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^3 a_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (1-2)$$

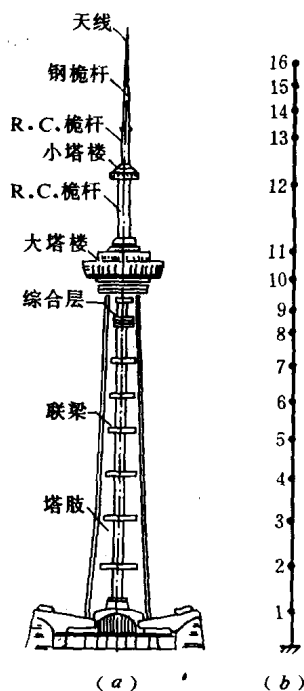


图 1-3 南京电视塔计算简图

这样就将无限自由度系统简化为图 1-4(b)、(c)、(d)所示的三个自由度系统。

三、有限单元法

将实际结构用有限个在结点处相互连接的单元所组成的离散系统来代替，对每个单元给定其插值函数，然后叠加单元在各个相应结点的贡献建立系统的求解方程。

有限单元法根据基本未知量选取的不同可分为：位移有限元法、应力有限元法和兼有应力、位移未知量的混合有限元法。其中，以位移有限元法应用最为广泛。位移有限元法又可分为刚性有限元法和变形有限元法两种，它们各自适用于不同的工程问题。

上述三种结构的简化方法以集中质体法较为简便实用，广义位移法需要选择满足位移边界条件的函数族，故

它仅适用于简单结构。综合集中质体法和广义位移法两种方法特点的有限单元法，它适用于各种复杂结构，因而，在求解工程结构动力问题中应用广泛。

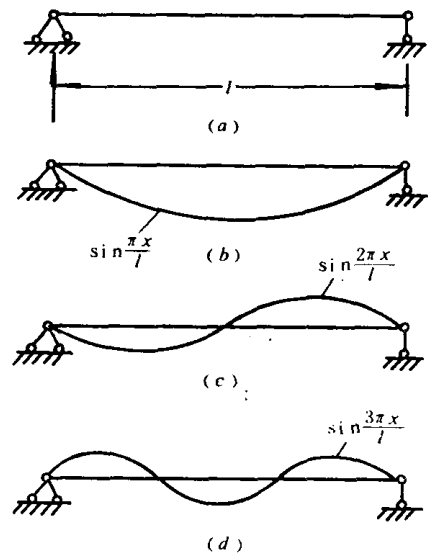


图 1-4 简支梁的广义位移

第三节 结构振动中的能量耗散—阻尼力

从微观上看，结构振动时材料分子间相对运动产生的热效应是不可逆的。同时，由于材料的不均匀性也将产生局部的非弹性变形。这些都导致结构在振动过程中材料耗散能量。结构的结点和支座联结处，往往由于相对运动产生摩擦而消耗能量。结构周围的介质阻止结构振动，也将耗散振动的能量。再者，结构振动能量传递至地基，地基土壤等介质的内摩擦也会耗散能量。通常将各种能量耗散的因素总称为阻尼 (damping)。在动力计算中，引入一个反映能量耗散的力称之为阻尼力。

关于阻尼力，根据不同的耗能机理提出的阻尼理论有不同的阻尼力假设，通常应用的三种阻尼理论和阻尼力如下。

一、粘性阻尼 (Viscous damping) 亦称粘滞阻尼

当系统在粘滞性液体中以不大的速度运动时，它所受到的阻尼力大小与位移速度成正比，而方向和速度的方向相反。即

$$f_{vd}(t) = -c\dot{y}(t)$$
 (1-3)

式中： $f_{vd}(t)$ 为粘性阻尼力； c 为阻尼系数； $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ 为位移速度；式中的负号表示阻尼力的方向恒与速度 $\dot{y}(t)$ 的方向相反。

二、滞变阻尼 (Hysteretic damping) 亦称结构阻尼

滞变阻尼能较好地反映材料内摩擦的耗能机理，故亦称材料阻尼 (Material damping)，又因阻尼力可表示为复数形式，又称复阻尼。

滞变阻尼认为：在简谐振动中，阻尼力与位移 y 成正比，但其相位与速度 $\dot{y}$ 相同，即

相位比位移超前 90° (或时间超前 $\frac{1}{4}$ 周期), 滞变阻尼力可表示为

$$f_{hd}(t) = -\zeta k y(t + \frac{T}{4}) \tag{1-4}$$

式中: ζ 为滞变阻尼系数; k 为劲度系数; T 为周期。考虑到弹簧力 $f_s(t) = -ky(t)$ 及 $f_s(t + \frac{T}{4}) = f_s(t)e^{i\frac{\pi}{2}}$, 则上式可写为

$$f_{hd}(t) = \zeta f_s(t + \frac{T}{4}) = \zeta f_s(t) (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = i \zeta f_s(t)$$

三、摩擦阻尼(Frictional damping)亦称干摩擦阻尼。

摩擦阻尼的阻尼力表示为

$$f_{fd}(t) = -\mu N \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \tag{1-5}$$

式中: μ 为动摩擦系数; N 为摩擦接触面间的正压力; $\dot{y}$ 为速度; $|\dot{y}|$ 为速度的绝对值; 负号表示 $f_{fd}(t)$ 的方向和 $\dot{y}$ 的方向相反。在振动过程中, 一般认为摩擦力 $f_{fd}(t)$ 的大小不变, 但其方向始终与速度的方向相反。

第四节 运动方程式的建立

一、应用的原理和方法

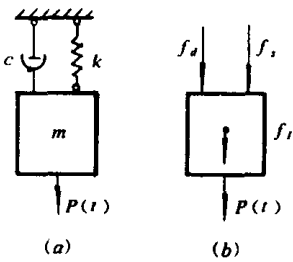


图 1-5 单自由度系统

(1) 达朗贝尔原理—直接平衡法 应用达朗贝尔原理, 引入惯性力, 便可以在形式上按静力平衡计算一样, 列出运动方程。图 1-5(a) 系统受动力荷载 $P(t)$ 作用, 引入惯性力 $f_i = -m\ddot{y}(t)$, 并计及阻尼力 $f_d = -c\dot{y}(t)$ 和弹簧力 $f_s = -ky(t)$ ①, 直接由平衡条件可得运动方程

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = P(t) \tag{1-6}$$

(2) 虚位移原理 在结构系统中引入惯性力, 然后给系统以约束所容许的微小的虚位移, 再令系统上各个力经相应虚位移所做总虚功等于零, 便可得出运动方程。如图 1-5 (b) 各力经竖向虚位移 δy 所做总虚功令其为零, 考虑 δy 的任意性, 并代入各力的表达式, 便可得出式 (1-6)。

(3) 哈密顿原理 它是能量变分形式的平衡方程。哈密顿原理: 在时段 t_1 到 t_2 内, 动能 T 减位能 V 的变分加非保守力做的功 W_κ 的变分等于零。即

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_\kappa dt = 0 \tag{1-7}$$

对于图 1-5 (a) 系统, 根据动能 $T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$, 位能等于应变能 $V = U = \frac{1}{2} k y^2$, $\delta W_\kappa = P(t) \delta y - c \dot{y} \delta y$ 代入运算, 并计及分部积分 $\int_{t_1}^{t_2} m \dot{y} \delta \dot{y} dt = m \dot{y} \delta y |_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{y} \delta y dt$, 其中第一项为零, 同样可以得到式 (1-6)。

① 这里 f_i, f_d, f_s 各力的指向和运动方向一致, 故都有负号, 若所示各力的指向和运动方向相反则应免去负号。

以上三种方法中，以直接平衡法应用最为广泛，因为它物理概念清楚，而且简便，只要熟悉静力计算中建立方程的方法就不难写出运动方程。虚位移原理本身等价于力的平衡条件，这在静力计算中已为大家所熟悉，所不同的就是要引入惯性力而已。哈密顿原理计算能量的变分，不需要应用达朗贝尔原理引入惯性力，适用于连续分布质量系统，但计算较为麻烦，工程结构动力计算中应用较少。

二、支座扰动情况

图 1-6 (a) 示刚架，设横梁为刚性，质量 m ，柱的质量不计，其抗侧移劲度为 $\frac{k}{2}$ ，当支座水平移动 $y_g(t)$ 时，系统产生振动。质量 m 的总位移为 $y'(t)$ ，而 m 相对于地面的位移为 $y(t)$ ，故有 $y'(t) = y_g(t) + y(t)$ 。

由直接平衡法列出此单自由度系统的运动方程：

$$f_I(t) + f_d(t) + f_s(t) = 0$$

式中：惯性力 $f_I(t) = -m\ddot{y}'(t) = -m\ddot{y}_g(t) - m\ddot{y}(t)$ ；阻尼力 $f_d(t) = -c\dot{y}(t)$ ；弹簧力 $f_s(t) = -ky(t)$ 。代入上式得

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{y}_g(t) \equiv P_{eff}(t) \tag{1-8}$$

式中： $P_{eff}(t)$ 称为等效支座扰动荷载或简称等效荷载。

式 (1-8) 说明：支座扰动情况下的动力计算可以转化为等效荷载下的计算，计算得出的位移 $y(t)$ 是相对于地面的相对位移，要求总位移 $y'(t)$ ，则需将 $y(t)$ 再加上支座扰动的位移 $y_g(t)$ 。

还需指出的是，这里假设刚架两柱支座处发生相同的水平移动 $y_g(t)$ ，对于各支座扰动不同的情况，即所谓行进波问题，将在第六章结构地震响应分析中讨论。

三、广义单自由度系统

有两种广义单自由度系统，即刚体集合系统和分布质量系统。

(1) 刚体集合系统 图 1-7 (a) 所示系统，AB 梁为刚性无质量梁，CD 梁亦为刚性，其总质量为 m ； k_1 、 k_2 分别为两个弹簧的劲度； c 为粘性阻尼系数。此系统虽然看起来颇复杂，但实际为单自由度系统。

在图 1-7(b) 中，取 C 点向下的位移为 Y ，可作出两个梁的示力图，其中 y_1 为中间变量， k_1 弹簧的力为 $k_1(\frac{2}{3}Y - y_1)$ ，而 $m\frac{\ddot{Y}}{2}$ 和 $I_0\frac{\ddot{Y}}{3a}$ 分别为 CD 梁的惯性力和惯性矩。

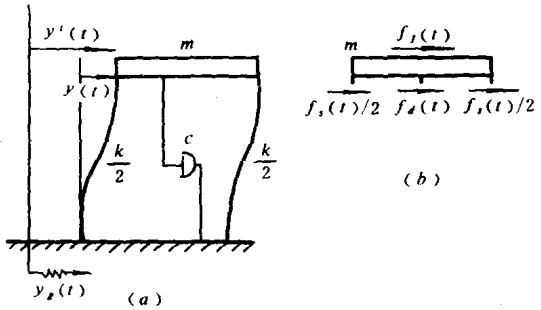


图 1-6 支座扰动下的刚架

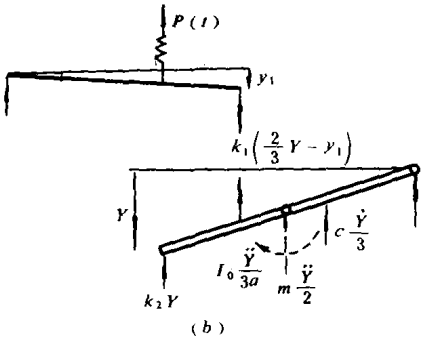
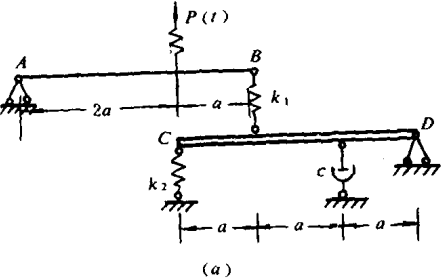


图 1-7 刚体集合的广义单自由度系统

分别写出 AB 梁的 $\sum M_A=0$ 和 CD 梁的 $\sum M_D=0$ 得

$$k_1\left(\frac{2}{3}Y-y_1\right)3a=2aP(t)$$

$$\frac{I_0}{3a}\ddot{Y}+\frac{3}{4}m\ddot{Y}+\frac{a}{3}c\dot{Y}+k_1\left(\frac{2}{3}Y-y_1\right)2a+3ak_2Y=0$$

由此两式消去 y_1 可得

$$\left(\frac{I_0}{3a^2}+\frac{3}{4}m\right)\ddot{Y}(t)+\frac{c}{3}\dot{Y}(t)+3k_2Y(t)=-\frac{4}{3}P(t)$$

改写为 $m^*\ddot{Y}(t)+c^*\dot{Y}(t)+k^*Y(t)=P^*(t)$ (1-9)

式中: m^* 为广义质量 $m^*=\frac{I_0}{3a^2}+\frac{3}{4}m$; c^* 为广义阻尼系数 $c^*=\frac{c}{3}$; k^* 为广义劲度 $k^*=3k_2$;

$P^*(t)$ 为广义荷载 $P^*(t)=-\frac{4}{3}P(t)$ 。

【例 1-1】 图 1-8 (a) 所示系统, AB 杆为刚性, 其单位长度质量为 $\bar{m}$, BC 杆亦为刚性, 其上附有集中质量 m , 两杆用 B 铰联接, 弹簧、阻尼器的参数及安置位置如图。此系统为一广义单自由度系统, 试求其广义质量 m^* 、广义阻尼 c^* 、广义劲度 k^* 和广义荷载 $P^*(t)$ 。又若 C 端沿杆轴作用常量力 N 时将有何影响?

【解】 取 B 铰竖向位移 Y 为基本未知量, 则

其它各个力处相应的位移均可用 Y 表示, 各个力亦可用 Y 及其导数表示, 见图 1-8 (b)。各力的表达式为

$$f_d=c\left(\frac{d}{dt}DD'\right)=\frac{1}{4}c\dot{Y}(t),$$

$$f_{s1}=k_1(EE')=\frac{3}{4}k_1Y(t),$$

$$f_{s2}=k_2(GG')=\frac{1}{3}k_2Y(t), f_{I2}=\frac{2}{3}m\ddot{Y}(t),$$

$$m_{I1}=I_0\frac{1}{4a}\ddot{Y}(t)=\frac{\bar{m}(4a)(4a)^2}{4a}\ddot{Y}(t)=\frac{4}{3}a^2\bar{m}\ddot{Y}(t)$$

$$f_{I1}=m_1\frac{1}{2}\ddot{Y}(t)=\bar{m}(4a)\frac{1}{2}\ddot{Y}(t)=2a\bar{m}\ddot{Y}(t)$$

应用虚位移原理, 设 B 铰产生竖向虚位移

δY , 令系统上各个力经此虚位移相应的位移所做的总虚功 δW 等于零, 得

$$\delta W=-\frac{3}{4}k_1Y(t)\frac{3}{4}\delta Y-\frac{1}{3}k_2Y(t)\frac{\delta Y}{3}-c\frac{\dot{Y}(t)}{4}\frac{\delta Y}{4}-2a\bar{m}\ddot{Y}(t)\frac{\delta Y}{2}-\frac{4}{3}a^2\bar{m}\ddot{Y}(t)\frac{\delta Y}{4a}-m\frac{2\ddot{Y}(t)}{3}\frac{2}{3}\delta Y+3aq(t)\frac{5}{8}\delta Y=0$$

考虑到 δY 的任意性, 上式可简化写成:

$$m^*\ddot{Y}(t)+c^*\dot{Y}(t)+k^*Y(t)=P^*(t)$$

其中: $m^*=\frac{4}{3}ma+\frac{4}{9}m$; $c^*=\frac{c}{16}$; $k^*=\frac{9}{16}k_1+\frac{k_2}{9}$; $P^*(t)=\frac{15}{8}aq(t)$ 。

若 C 端沿杆轴作用常量轴向压力 N , 则在虚功方程中应计及 N 力所做的虚功。 B 铰产

生虚位移 δY 时, 由于 AB 杆转动产生水平向虚位移 $(\frac{Y}{4a})\delta Y$, 由于 BC 杆转动产生水平向虚位移 $(\frac{Y}{3a})\delta Y$, 因此 N 力所做的虚功 δW_n 为

$$\delta W_n=N(\frac{Y}{4a}+\frac{Y}{3a})\delta Y=\frac{7}{12}\frac{NY}{a}\delta Y$$

代入上述虚功方程可以看出, 计及轴向压力 N 作用后, 仅对运动方程的广义劲度项有影响。考虑系统的轴向力时的广义劲度称为组合广义劲度 $\bar{k}^*$ 。

$$\bar{k}^*=k^*-\frac{7}{12}\frac{N}{a}=\frac{9}{16}k_1+\frac{k_2}{9}-\frac{7}{12}\frac{N}{a}$$

由此可见, 轴向压力 N , 减小了系统的劲度。

顺便指出: 组合广义劲度为零的条件, 它就是确定系统屈曲的欧拉临界力的条件, 由 $\bar{k}^*=0$, 可得出此系统的临界压力为

$$N_{cr}=(\frac{27}{28}k_1+\frac{4}{21}k_2)a$$

(2) 连续分布质量系统 图 1-9 所示悬臂结构其弯曲刚度 $EI(x)$, 单位长度质量 $m(x)$, 顶端受常量轴向压力 N , 若不计系统的阻尼, 在地面水平运动 $y_g(t)$ 的作用下, 试建立其运动方程。

用广义位移法, 给位移函数 $\psi(x)$, 运动振幅用广义坐标 $Y(t)$ 表示, 则

$$y(x,t)=\psi(x)Y(t)$$

通常取系统某参考点的位移为广义坐标, 现在选顶点水平位移为广义坐标, 则位移函数可表为无量纲的比值:

$$\psi(x)=\frac{y(x,t)}{Y(t)}$$

应用哈密顿原理, 系统的动能 T 和弯曲变形位能 V_m 分别为

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l m(x)[\dot{y}(x,t)]^2dx$$

$$V_m=\frac{1}{2}\int_0^l EI(x)[y''(x,t)]^2dx$$

式中: $y''(x,t)=\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

顶端位移的竖向分量 $e(t)$ 和常量轴向力的位能 V_n 分别为

$$e(t)=\frac{1}{2}\int_0^l [y'(x,t)]^2dx$$

$$V_n=-\frac{N}{2}\int_0^l [y'(x,t)]^2dx$$

系统没有直接作用的动力荷载, 又不计阻尼, 故哈密顿原理为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)dt=0$$

将动能及位能的表达式代入进行变分计算, 并计及下列关系

$$\dot{y}'=\dot{y}+\dot{y}_g,\qquad y''=\psi''Y,\qquad y'=\psi'Y$$

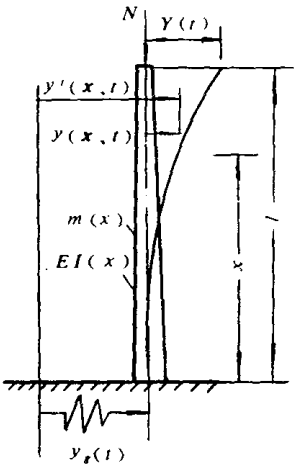


图 1-9 地面位移作用下的带轴力悬臂梁

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \phi \dot{Y}, & \delta \dot{y} &= \delta \dot{Y}, & \delta y'' &= \phi'' \delta Y \\ \delta y' &= \phi' \delta Y, & \delta \dot{y} &= \phi \delta \dot{Y} \end{aligned}$$

则可得

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} [Y \delta Y \int_0^l m(x) \phi^2 dx + \delta Y \dot{y}_g(t) \int_0^l m(x) \phi dx \\ & - Y \delta Y \int_0^l EI(x) (\phi'')^2 dx + NY \delta Y \int_0^l (\phi')^2 dx] dt = 0 \end{aligned}$$

再对前两项进行分部积分则得

$$\int_{t_1}^{t_2} [m^* \ddot{Y} + k^* \dot{Y} - k_G^* Y - P_{eff}^*(t)] \delta Y dt = 0$$

式中：广义质量 $m^* = \int_0^l m(x) \phi^2 dx$ ；广义劲度 $k^* = \int_0^l EI(x) (\phi'')^2 dx$ ；广义几何劲度 $k_G^* = N \int_0^l (\phi')^2 dx$ ；广义等效荷载 $P_{eff}^*(t) = -\ddot{y}_g(t) \int_0^l m(x) \phi dx$ 。

由于 δY 是任意的，故运动方程为

$$m^* \ddot{Y}(t) + \bar{k}^* Y(t) = P_{eff}^*(t) \quad (1-10)$$

式中组合广义劲度

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* \quad (1-11)$$

系统的临界压屈荷载可由 $\bar{k}^* = 0$ 得出，即由

$$\bar{k}^* = \int_0^l EI (\phi'')^2 dx - N_\sigma \int_0^l (\phi')^2 dx = 0$$

得

$$N_\sigma = \frac{\int_0^l EI(x) (\phi'')^2 dx}{\int_0^l (\phi')^2 dx}$$

此式即为用瑞利 (Rayleigh) 能量法求压屈临界荷载的公式。

【例 1-2】 图 1-10 示水塔结构，支柱为等刚度 EI ，单位长度质量为 $\bar{m}$ ，顶部水体及容器的集中质量 $M = \bar{m}l$ 。在地面运动加速度 $\ddot{y}_g(t)$ 作用下，若不计阻尼，并假设位移函数为 $\phi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2l}$ ，试求压屈临界荷载并写出系统的运动方程。

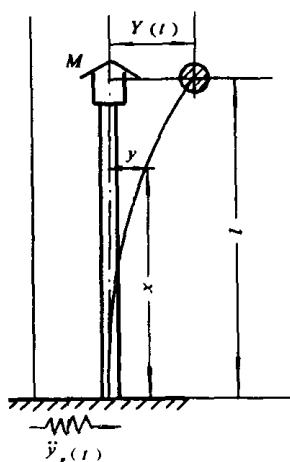


图 1-10 地面加速度作用下的水塔结构

【解】 式 (1-10) 表示的广义质量还需要加上顶部的集中质量，即广义质量为

$$m^* = \bar{m}l + \bar{m} \int_0^l (1 - \cos \frac{\pi x}{2l})^2 dx = \frac{\bar{m}l}{2\pi} (5\pi - 8)$$

式 (1-11) 表示的广义劲度为

$$k^* = \int_0^l EI \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{EI\pi^4}{32l^3}$$

轴向压力是沿杆长变化的，表示为

$$N(x) = \bar{m}lg(2 - \frac{x}{l})$$

式中：g 为重力加速度。

式 (1-11) 表示的广义几何劲度中 $N(x)$ 应放在积分号中，即

$$k_G^* = \int_0^l \bar{m} l g \left(2 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{\bar{m} g}{16} (3\pi^2 - 4)$$

$$\text{组合广义劲度 } \bar{k}^* = k^* - k_G^* = \frac{\pi^4 EI}{32l^3} - \frac{\bar{m} g}{16} (3\pi^2 - 4)$$

令 $\bar{k}^* = 0$, 即得压屈临界荷载:

$$(\bar{m} g)_\sigma = \frac{\pi^4 EI}{2(3\pi^2 - 4)l^3}$$

计及相对位移 $Y(t) = y'(t) - y_g(t)$, 则由广义坐标 $Y(t)$ 表示的无阻尼振动方程为

$$m^* \ddot{Y}(t) + \bar{k}^* Y(t) = P_{eff}^*(t)$$

式中: 广义等效荷载由式 (1-10) 及计及集中质量 $M = \bar{m}l$ 有

$$P_{eff}^*(t) = -\bar{m}l \ddot{y}_g(t) - \int_0^l \bar{m} \ddot{y}_g(t) \psi(x) dx$$

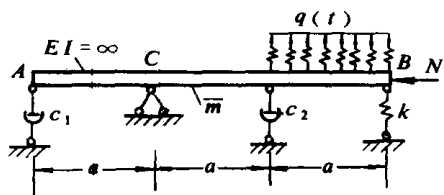
用位移函数表达式代入, 并经积分后得

$$P_{eff}^*(t) = -\frac{2\bar{m}l \ddot{y}_g(t) l}{\pi} (\pi - 1)$$

习 题

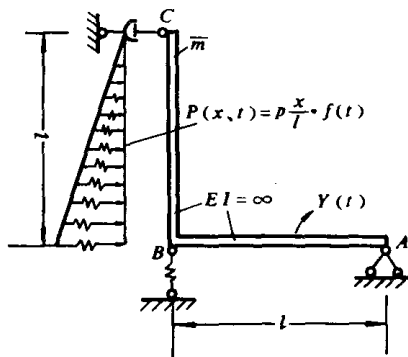
1-1 图示结构系统, AB 为刚性杆 $EI = \infty$, 其单长质量 $\bar{m}$, 系统所受荷载及约束见图

1-1 图。试求该系统的广义质量 m^* 、广义劲度 k^* 、广义阻尼 c^* 、广义荷载 $P^*(t)$ 、广义几何劲度 k_G^* 、组合广义劲度 $\bar{k}^*$ 、欧拉临界力 N_σ , 并写出此广义单自由度系统的运动方程。



题 1-1 图

1-2 图示 L 型刚架, 其单长质量 $\bar{m}$, BA 、 BC 两杆 $EI = \infty$, 刚架所受荷载及约束见图 1-2 图。试求该广义单自由度系统的 m^* 、 k^* 、 c^* 、 $P^*(t)$, 并写出其运动方程。

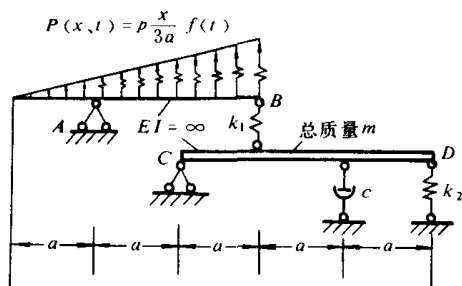


题 1-2 图

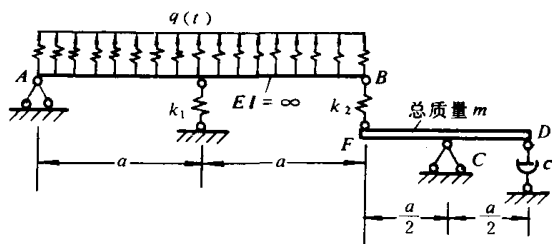
1-3 图示结构系统, AB 、 CD 两杆 $EI = \infty$, 略去 AB 杆的质量, CD 杆的总质量为 m , 系统所受荷载及约束见图 1-3 图。试求此广义单自由度系统的 m^* 、 k^* 、 c^* 、 $P^*(t)$, 并写出系统的运动方程。

1-4 图示结构系统, AB 、 FD 两杆 $EI = \infty$, 略去 AB 杆的质量, FD 杆的总质量为 m , 系统所受荷载及约束见图 1-4 图。试求此广义单自由度系统的 m^* 、 k^* 、 c^* 、 $P^*(t)$, 并写出系统的运动方程。

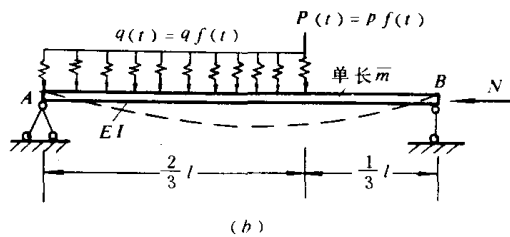
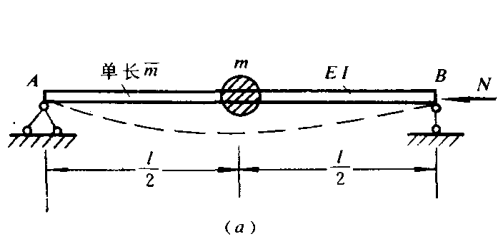
1-5 图示匀质等截面简支梁 AB , 单长质量 $\bar{m}$, 梁上荷载及质量见图 1-5 图。若不计阻尼, 取位移函数 $\psi(x) = Y \sin \frac{\pi x}{l}$ 其中广义坐标 Y 为梁跨中点的位移, 试求此广义单自由度系统的 m^* 、 k^* 、 $P^*(t)$ 、 k_G^* 、 $\bar{k}^*$ 、 N_σ , 并写出其运动方程。



题 1-3 图

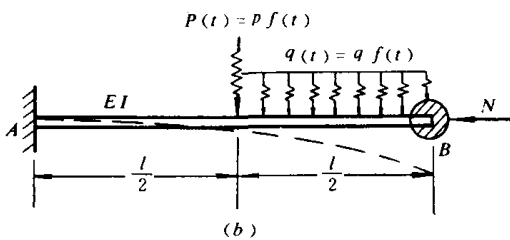
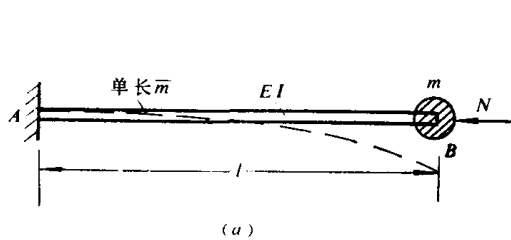


题 1-4 图



题 1-5 图

1-6 图示匀质等截面悬臂梁 AB , 单长质量 $\bar{m}$, 梁上荷载及质量见图 1-6 图。若不计阻尼, 取位移函数 $\psi(x) = Y(1 - \cos \frac{\pi x}{2l})$ 其中广义坐标 Y 为梁自由端处的位移, 试求此广义单自由度系统的 m^* 、 k^* 、 $P^*(t)$ 、 k_G^* 、 $\bar{k}^*$ 、 N_σ , 并写出其运动方程。



题 1-6 图

第二章 单自由度系统的振动

第一节 单自由度系统振动的基础知识

单自由度系统运动方程:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = P(t) \quad (2-1)$$

令 $\omega = \sqrt{k/m}$, 阻尼比 $\xi = c/2m\omega$, 则式 (2-1) 可写成

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P(t)}{m} \quad (2-2)$$

一、自由振动

式 (2-2) 中取 $P(t) = 0$, 即得自由振动的运动方程:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (2-3)$$

此方程的通解视阻尼比 ξ 的取值不同而有所不同。

(1) 无阻尼情况 ($\xi = 0$ 或 $c = 0$) 解为

$$y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \quad (2-4)$$

式中: $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ 为初速度; $y_0 = y(0)$ 为初位移。

将式 (2-4) 进行三角函数转换则可改写为

$$y(t) = A \sin(\omega t + \nu) \quad (2-5)$$

式中: 幅值 $A = \sqrt{y_0^2 + (\dot{y}_0/\omega)^2}$; 初相角 $\nu = \text{tg}^{-1}(\dot{y}_0/\omega y_0)$ 。

ω 为无阻尼自由振动圆频率, 它是反映系统动力特性的一个重要参数, 其单位为 rad/s。

工程频率 $f = \frac{\omega}{2\pi}$, 其单位为 Hz, 而自由振动周期 $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$, 其单位为 s。

(2) 临界阻尼情况 ($\xi = 1$ 或 $c = 2m\omega$) 解为

$$y(t) = e^{-\omega t} [y_0(1 + \omega t) + \dot{y}_0 t] \quad (2-6)$$

这种情况系统不发生振动。所谓临界阻尼是不产生振动的最小阻尼。 $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ 称为阻尼比, 它是无量纲的量, 而 $\xi = 1$ 称为临界阻尼比。

(3) 超阻尼情况 ($\xi > 1$ 或 $c > 2m\omega$) 解为

$$y(t) = e^{-\xi\omega t} \left[y_0 \cosh \omega_D t + \frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D} \sinh \omega_D t \right] \quad (2-7)$$

式中: ω_D 为计及阻尼的自振圆频率 ($\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$)。

这种情况由于阻尼过大, 系统的运动为按指数规律衰减的非周期蠕动。

(4) 负阻尼情况 ($\xi < 0$ 或 $c < 0$) 阻尼本来是耗散能量的, 负阻尼表示在系统振动过程中不仅不消耗能量, 而且不断加入能量。这种情况下系统的运动是不稳定的, 其振幅将会愈来愈大, 直至系统失效破坏。

(5) 低阻尼或小阻尼情况 ($\xi < 1$ 或 $c < 2m\omega$) 解为

$$y(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{y}_0 + y_0\xi\omega}{\omega_d} \cdot \sin\omega_d t + y_0 \cos\omega_d t \right] \quad (2-8)$$

式中: ω_d 为计及阻尼的自振圆频率 ($\omega_d = \omega \sqrt{1-\xi^2}$)。由此可知, 阻尼影响使系统自振频率略有减小, 亦即使系统自振周期稍有增大。从式 (2-8) 可以看出, 阻尼影响使振幅按指数规律衰减。

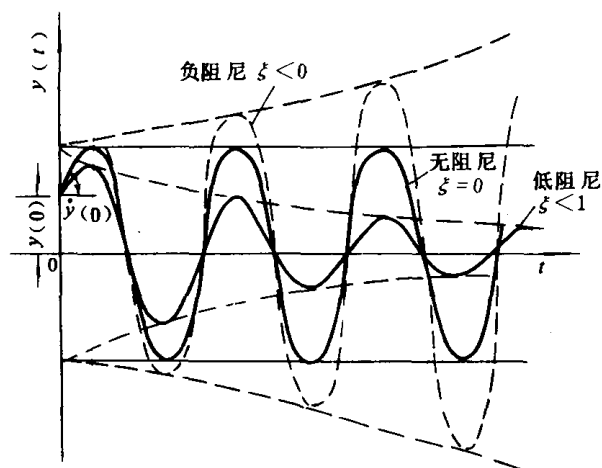


图 2-1 不同阻尼比对自由振动幅值的影响

式 (2-8) 经三角函数转换可写成

$$y(t) = Ae^{-\xi\omega t} \sin(\omega_d t + \nu) \quad (2-9)$$

其中:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega_d} \right)^2}; \quad \nu = \text{tg}^{-1} \frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega_d y_0}$$

图 2-2 示自由振动衰减曲线。若由实验得到此曲线就可用来确定阻尼比。考虑两相邻幅值, 在 t_i 时刻, $y_i = Ae^{-\xi\omega t_i}$; 在 $t_i + T_d$ 时刻, $y_{i+1} = e^{-\xi\omega(t_i + T_d)}$ 。两相邻幅值比的自然对数称对数递减率 δ , 即

$$\delta = \ln \frac{y_i}{y_{i+1}} = \xi\omega T_d = \xi\omega \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

由此可得阻尼比

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (2-10)$$

为了获得 ξ 更高的精度和避免偶然产生的误差, 可以量测相隔 m 个周期的两个幅值 y_i 和 y_{i+m} , 其中 $y_{i+m} = Ae^{-\xi\omega(t+mT_d)}$, 同样令

$$\delta' = \ln \frac{y_i}{y_{i+m}} = \xi\omega m T_d = \xi\omega m \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi m\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

从而得阻尼比

$$\xi = \frac{\delta'}{\sqrt{(2\pi m)^2 + (\delta')^2}} \quad (2-11)$$

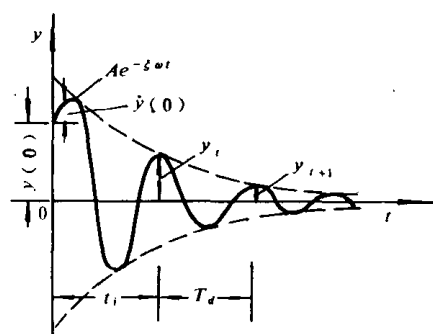


图 2-2 自由振动衰减曲线

考虑到实际结构的阻尼比是小于 0.2 的数, 取 $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$, 则式 (2-10) 和式 (2-11) 可以简化为

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{y_i}{y_{i+1}} \quad (2-12)$$

$$\xi = \frac{\delta'}{2\pi m} = \frac{1}{2\pi m} \ln \frac{y_i}{y_{i+m}} \quad (2-13)$$

【例 2-1】 图 2-3 示刚架, 柱的抗弯刚度 $EI = 4.5 \times 10^6 \text{ Nm}^2$ 设略去其质量, 又设横梁为刚性, 其质量 $m = 5000 \text{ kg}$ 。若用千斤顶使 m 产生侧移 25mm 然后突然放开, 刚架产生自由振动, 振动 5 周后测得的侧移为 7.12mm。试求: ①考虑及不计阻尼影响时刚架的自振频率; ②阻尼比和阻尼系数; ③振动 10 周后的振幅。

【解】 两个柱子的侧向劲度为

$$k = 2 \left(\frac{12EI}{h^3} \right) = 2 \times 12 \times 4.5 \times 10^6 / 3^3 = 4.0 \times 10^6 \text{ N/m}$$

由 m 、 k 求得无阻尼的自振频率和工程频率为

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{4 \times 10^6 / 5000} = 28.284 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \times 10^6}{5000}} = 4.502 \text{ Hz}$$

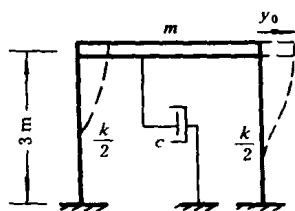


图 2-3 刚架结构

由 $y_0 = 25 \text{ mm}$ 和 $y_{0+5T_d} = 7.12 \text{ mm}$ 求阻尼比和阻尼系数:

$$\xi = \frac{\delta'}{2\pi m} = \frac{1}{10\pi} \ln \frac{y_0}{y_{0+5T_d}} = \frac{1}{10\pi} \ln \frac{25}{7.12} = 0.04$$

$$c = 2m\omega \cdot \xi = 2 \times 5000 \times 28.284 \times 0.04 = 11313.6 \text{ kg/s}$$

考虑阻尼影响的自振频率和工程频率:

$$\omega_d = \omega \sqrt{1-\xi^2} = 28.284 \sqrt{1-0.04^2} = 28.261 \text{ rad/s}$$

$$f_d = f \sqrt{1-\xi^2} = 4.498 \text{ Hz}$$

从上述自振频率和工程频率计算结果可以看出, 考虑和不考虑阻尼的数值是很接近的。

由 $\frac{y_{n+m}}{y_n} = e^{-2m\pi\xi\frac{\omega}{\omega_d}}$, 取 $n=0$, $m=5, 10$, 有

$$\left(\frac{y_5}{y_0} \right) = e^{-2 \times 5 \pi \xi \frac{\omega}{\omega_d}}, \left(\frac{y_{10}}{y_0} \right) = e^{-2 \times 10 \pi \xi \frac{\omega}{\omega_d}}$$

两式相除

$$\left(\frac{y_{10}}{y_0} \right) / \left(\frac{y_5}{y_0} \right) = e^{-2 \times 5 \pi \xi \frac{\omega}{\omega_d}} = \left(\frac{y_5}{y_0} \right)$$

由此得出

$$y_{10} = \left(\frac{y_5}{y_0} \right)^2 \cdot y_0 = (7.12)^2 / 25 = 2.028 \text{ mm}$$

二、受迫振动

(1) 受迫振动方程的解 设动力荷载为简谐荷载 $P(t) = p \sin \bar{\omega} t$, 则运动方程为

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = p \sin \bar{\omega} t \quad (2-14)$$

令 $\frac{c}{m} = 2\xi\omega$, $\frac{k}{m} = \omega^2$, 则上式可改写成

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{p}{m} \cdot \sin \bar{\omega} t \quad (2-15)$$

若初始条件 $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ 则上列方程的通解