初等数学教程

〔法〕G.达尔布 主编

理论和实用算术

〔法〕J.唐乃尔 著

上海科学技术

〔法〕G. 达尔布主编　　·初等数学教程·

理论和实用算术

〔法〕J. 唐乃尔　著

朱德祥　译

上海科学技术出版社

〔法〕G. 达尔布主编 初等数学教程

理论和实用算术

〔法〕J. 唐乃尔 著

朱德祥 译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 12.125 字数 320,000

1982年8月第1版 1982年8月第1次印刷

印数: 1-18,300

统一书号: 13119·1004 定价:(科四) 1.35 元

中译本序

第一次世界大战后，美国数学会曾派出一个以 M. Bôcher 为首的考察团到法国，目的是了解为什么当时法国数学如此发达．该考察团在巴黎和法国外省都进行了详尽的调查，回国后在 Bulletin of American Mathematical Society 上发表了一个报告．结论是：法国数学的发展，得力于它的中等数学教育．

诚然，法国中学教师一般都是高等师范学校 (Ecole Normale Supérieure) 毕业的．该校历史悠久，入学考试很严格．毕业后还需经过很严格的教师合格考试 (Agrégation) 才能成为合格教师 (Agrégé)．中学教师也同大学教师一样称教授(Professeur)．

中学教授讲课一般不用教科书，教了几年后，各教授都要写一套教科书，所以这类教科书很多，对中学生的自学提供了很大的方便．数学在中学课程中占很大的份量．特别数学班(Classe de Mathématiques Spéciales)则是中学最高的班次，也可以说是准备投考大学或高等学校的预备班．教特别数学班的教师一般是最有经验的教师．特别数学班教科书也最多．其中 G. Darboux 院士主编的一套尤被推崇．

中学，特别是它的后期，是人们求知欲最强烈的时期，也是精力最充沛的时期．在这个时期(年龄大约在 17～20 岁左右)，使学生有大量吸收新知识和迅速扩大思维能力的机会，一旦到象高等师范学校这样一个处于当代自然科学最前线的地方，耳濡目染，就能很容易地发现有价值的新课题和解决这种新课题应走的道路．法国数学家一般在 22～23 岁时就能完成有开创性的博士论文．这就说明了为什么法国数学的发展得力于中学数学教育．

1963年上海科学技术出版社为了发展祖国数学，为了提供中学教师和中学生以良好的数学参考读物，曾组译出版了G. Darboux院士主编的那套书的三部四本. 问世以后，颇受读者欢迎，最近，中学教育受到了很大的重视，需要该套书的人很多，但书店早已脱销，读者每致向隅. 上海科学技术出版社决定重印，因纸版已被毁，不得已决定重排. 原套还有J. Tannery所著“Leçons d'Arithmétique théorique et pratique”一书，丰富翔实，很多内容为同套其他各书所引用，此次也已由朱德祥同志译出，现予付印出版.

主编者G. Darboux院士晚年任法兰西学院终身书记，早年毕业于高等师范学校，是微分几何学家，在分析各方面也有很多重要贡献. J. Tannery院士长期任高等师范学校校长，曾指导了许多年青数学家的开创性工作，例如J. Hadamard, E. Borel和E. Cartan三院士，都是在他指导下开始工作的. 他撰写的这本算术书，事实上是数论初步. 对数的概念从自然数到实数的拓广，特别是实数概念的建立和极限概念的引进，叙述明确，立论严谨，构成这套教科书其它各书的骨胳，也是现代分析的基础. 德国曾有该书译本并稍加增补.

J. Hadamard院士主要致力于把柯西在分析上的局部理论推论到全局. 在复域里，体现在他的“戴劳级数所定义的函数的解析延拓”方面的成就，这个成就导致了解析数论的建立. 在实域里，体现在常微分方程定性理论，线性偏微分方程定解问题理论，变分学和泛函分析等方面的成就. 在这套教科书中，J. Hadamard撰写了“几何”平面和空间各一册，Bourlet教授写了“代数”和“平面三角”，Bourlet曾在偏微分方程理论和泛函分析方面做出了重要贡献.

这套书的特点，推理严谨，观点清新. 力求给人以“规矩”，而不过分追求技巧. 若引进一新的概念，则其定义必求是最新的，这样就使中学生阅读之后便于将来接受大学中的新知识. 若叙述一方法，则力求尽其用，力求用简明的方法，解决一系列问题. 许多

附录都是必要的补充，目的还是使中学生便于将来顺利地接受大学教程．随着课文附加一些有意义的习题．这些习题的选择和部署是经过一番精心考虑的．特别是“几何”，俄译本曾将所有习题全部给出解答，朱德祥同志又把平面几何部分的习题解答全部译为中文．

这样一套教科书，既能为中学生提供学习大学数学课程的坚实基础，又能培养中学生的思考能力和计算能力．

鉴于现代数学在物理学、化学、地学和生物学等学科中已逐渐变为不可缺少的工具，中学数学教育的提高，将对我国整个自然科学的发展起着作用．

为了迅速提高中学数学教育水平，除在中学师资的培养上，采取一系列有力的措施外，也应在丰富和提高中学教材和参考读物上深下功夫．这套书中译本的出版，对提供中学参考教材方面是颇有意义的．

吴 新 谋

1979年3月于中国科学院数学研究所

译者序

本书系从法国科学院院士、巴黎高等师范学校校长唐乃尔(Jules Tannery) 所著 Leçons d'Arithmétique théorique et pratique 的第八版 (1920 年)译出. 接受译此书的任务是在 1966 年，尚未动笔，文化大革命就开始了. 借来的法文原著归还了熊庆来先生. 1978 年重新接受此任务，可惜熊老的书已散失，到处物色都是扑空. 终于幸承邓汉英教授从南开大学图书馆借到原著，特此向邓教授和南开大学图书馆致谢忱. 值得一提的是，打开封面，贴着这样一张条子:“民国二十六年此书被日寇劫去胜利后由东京收回刊此以资纪念”. 此书竟在抗日战争期间被抢劫到异邦而又胜利归来.

本书前五章所用的数都是非负的数. 引用这方面的习题时请注意这一点.

著者在 1894 年第一版序言中指出，此书是为初学数学和继续学数学的这两种人写的，开始很浅，证明逐步采取抽象形式，最后涉及到一些有相当水平的课题.

本书是数的概念方面的一本优良教科书. 第十二章讲无理数，用的是戴德金 (Dedekind) 分割，讲得细致而清晰，是数学分析上讲实数理论时难得的补充读物. 最后一章介绍初等数论. 全书三百多道习题很能启发思考.

原书排印上很多错误以及原稿上一些疏忽之处，凡我所觉察到的都改正了. 限于本人水平，一定有不少缺点错误之处，请读者示知，以便改正.

朱德祥于昆明师范学院
1980.10.

目　　录

第六章 分 数

第七章 十 进 分 数

第八章 近 似 计 算

第九章 平方，立方，平方根，立方根

第十章 公制(米制)度量系统(译略)

第十一章 应 用

第十二章　无理数，数集，极限

第十三章　量的度量

第十四章　数论初步

第一章 预篇 定义和基本性质

§1 数的概念，等式，不等式，笔述命数法

1. 自然数．两个集合的比较 设有一堆弹子，一群羊，构成一个字的字母，构成一个短语的字．这口袋里有多少弹子？这羊群有几只羊？这个字有几个字母，这短语里有几个字？这些问题的答案都是一个数，说准确些，一个自然数．

自然数的概念，是从各别的对象集合的概念通过抽象得来的；它是与这些对象的性质无关的，这些对象可能是一模一样的，如同这口袋里的弹子，也可能是不一样的，如同这个字的字母，这短语里的字，但是这些对象应该是可以相互分开并且可以汇合在一起以形成一个集合①，一个整体．构成一个集合的各别对象，当我们无意特别指出其性质时，通常就给出单位的名称．

在推理时，常就容易想象的对象集合，或者就出现在纸面上的点集合加以说明．在同一推理中，为了将一些集合加以区别，有时就用大写字母 A, B, C, $\cdots$ 来代表它们；这样，就会说集合 A，集合 B 和 C．读者注意，推理和集合中对象的性质丝毫没有关系，重要的只是它们的数目．

首先，我们把读者已用惯的一些术语说准确："这个集合和那个集合有同样多的对象"；"这个集合的对象比那个集合的对象多或少．"同样多在此地以及此后的意思是"刚好一样多"．

在我们的观点下，要比较两个对象集合，可以大致象不会计数的情况下那样进行．

① 此地和以下所讲的只是有限集合．至于有限的含义，那是充分明白的．

假设一个小孩想向商人买苹果，价格是每个一枚钱币，那他就可以给一枚钱币得一个苹果，再给一枚再得一个，又给一枚又得一个. 经过每次交换，他得到的苹果数和所付的钱币数是同样多的. 付出的每枚钱币对应着一个苹果(也只有一个)作为交换，两枚不同的钱币对应着两个不同的苹果；同样，每个苹果对应着一枚钱币(也只有一枚)，即用来交换的那一枚，两个不同的苹果对应着两枚不同的钱币.

假设小孩照这样尽可能地继续以钱币交换苹果.

可能发生三种情况:

1° 可能发生小孩用最后一枚钱币买来商人最后一个苹果：孩子的钱币跟商人的苹果同样多，商人的苹果跟小孩的钱币同样多；

2° 可能发生小孩的钱币用光了，而商人的苹果没有光. 假定商人不想拿出一个苹果马上交换一枚钱币，而是在应该拿出的苹果上做一个标志或放在一旁；那末他将把原先的苹果集合分作两部分，分作两堆：一堆是带有标志或放在一旁的，另一堆是没有卖的. 在第一堆里，苹果和小孩的钱币一样多. 商人的苹果多于小孩的钱币，小孩的钱币少于商人的苹果；

3° 可能发生小孩还有钱币，而商人的苹果卖光了. 假设小孩在钱币上做上标记而没有给出，那末他将把原先钱币的集合分作两个集合；其中之一是由带标志的钱币组成的，这一集合的数目跟商人的苹果一样多.

此外不再有其他的情况；这三种情况是互相排斥的.

现将同样的事物用较普遍的形式重复一遍.

设有由任何对象组成的两个集合 A 和 B，我们可以按照下述方式来探明它们的对象是同样多，还是一个多些另一个少些.

从集合 A、B 各取一个对象，做上同样的标志；又从这两集合各取一个未做标志的对象，也做上同样的标志. 只要可能，即是说，只要两集合中有一个，它的对象还没有全部做标志，就这样继续做下去. 因此，当有一个集合的对象全部做了标志的时候，我们就停下来，并称一个从 A 取出、另一个从 B 取出、而且同时做标

志的两个对象相互对应①或者一个对应于另一个.

可能发生三种情况:

1° 第一集合所有对象都做上了标志，第二集合的所有对象也都做了标志: 这时，在两集合 A 和 B 之间建立了完备的对应，即满足下述条件的对应: A 中每个指定的对象在 B 中有一个也仅有一个对应的对象，而它在 A 中的对应对象即是所指定的那个；同样 B 的每个指定的对象在 A 中有一个也仅有一个对应对象，而它在 B 中的对应对象即是所指定的那个.

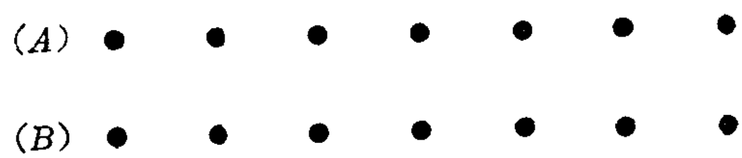

图 1

图1里的两组点(每组位于一条水平线上)给出这样一个对应的图象；一组每个点对应于另一组位于同一铅垂线上的那个点.

很明显，第一(或第二)集合的两个互异对象，对应于第二(或第一)集合的两个互异对象.

在这种情况下，两集合有同样多的对象.

2° 如果 A 的所有对象都标志了，而在 B 中还有没有标志过的对象，那末集合 B 含有的对象多于集合 A 的；A 的每个对象在 B 有它的对应对象，即和它同时被标志的那个，但 B 中有些对象在 A 中却没有对应的对象. 于是 B 被分为两个集合: 一个由标志过的对象组成，它完备地对应于 A，跟 A 含有同样多的对象；另一个由未标志的对象组成.

在图2中，第一个集合由 B 中位于 A 的点下方的点所组成，第二个集合由第二行剩下的点所组成. 很明显，无法把 A 照这样分成两个集合使其中一个含有跟 B 同样多的对象.

① 只要每次给相互对应的对象做上相同的标志，而各次做不同的标志，那末这个对应就变成明显的了.

对应的概念在整个数学中占重要地位. 每当我们说一个对象对应着另一个对象时，那是说从一个的想法启发出另一个的想法.

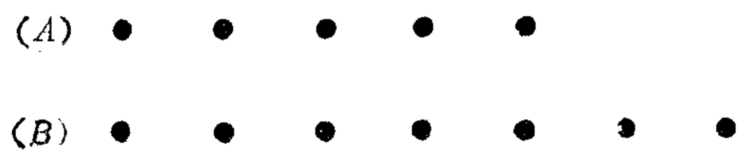

图 2

在这一情况下，我们说 A 含有的对象少于 B 的.

3° 这是集合 A 含有的对象多于 B 的情况(图 3).

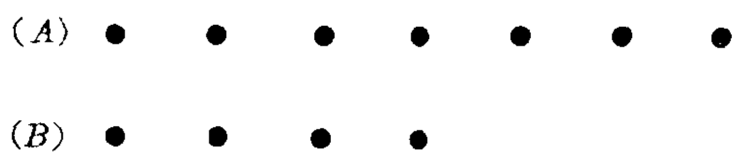

图 3

2. 如果有两个集合，把它们照刚才那样跟第三个作了比较，并且验明了这两个都跟第三个有同样多的对象，那末可以由此肯定，前两个集合有同样多的对象；为了明确这一点，只要把这两集合中对应于第三集合的同一对象的两个对象看作相互对应的就行了.

3. 有同样多对象的一切集合有一件事是共同的，那就是它们所含对象的数目．替代说一个集合跟另一个集合有同样多对象，我们说它们含有(刚好)同样个数的对象，或它们所含对象的个数相等，或它们在数目上相等.

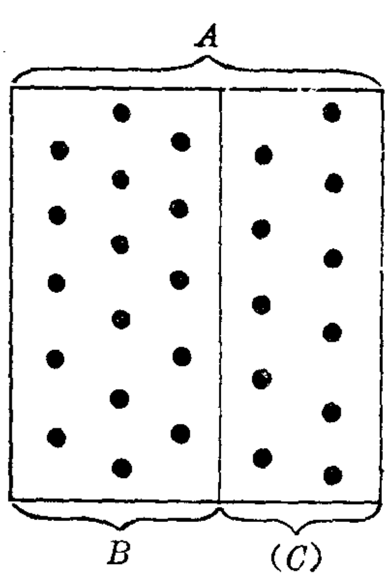

图 4

在上节已知道，跟第三个集合数目相等的两个集合，彼此之间也是数目相等的；这就是下述命题的意义所在：等于第三数的两数相等．事实上，这三个数是同一个数.

若两个集合的数目不等，那末它们中的一个，比方说 A，含有的对象多于另一个；在同一意义下我们说，A 的对象数大于 B 的对象数，或 B 的对象数小于 A 的对象数，或集合 A 在数目上大于 B，等等．再回忆一下，这时集合 A 可以分

解成两个集合，其中之一跟 B 在数目上相等.

我们说集合 A 包含集合 B，用以表明 B 的所有对象都属于 A；我们并不排除这两个集合只是一个集合这种情况；换言之，一个集合包含它自身.

若集合 A 包含集合 B 而又不和它恒同，那末 A 的对象数大于 B 的对象数. 于是称集合 B 是集合 A 的部分. 在图4中，A 被分解成两部分，即集合 B 和集合 C，它们合并在一起构成 A.

若集合 A 包含集合 B，而 B 本身包含一个集合 D，那末集合 A 包含集合 D；A 的对象数将大于 D 的对象数，除非这三个集合是恒同的(仅仅是一个).

我们说某一数包含另一数，用以表明前者大于或等于后者. 这种说法是自然的，因为这两个数跟两个集合相联系，其中第一个集合包含一个数目与第二个集合相等的集合.

4. 自然数列 为了形成某种对象的集合，我们先只取一个对象，然后添上一个对象，然后又给它们添上另一个对象，然后又添一个，又添一个，等等，直至得到想要的集合. 反之，想撤掉某个集合，就可将组成集合的对象一个一个地撤回来.

照这样，我们可以形成一些集合，使含有一个[1]对象，一个又一个对象，一个又一个又一个对象，等等. 一，一又一，一又一又一是一些数目的名称. 利用它们，并不去指出所数对象的性质，而是从中抽象；我们说，一，一又一，…是一些抽象的数. 代替述语一，一又一，一又一又一，一又一又一又一，…，我们使用文字一，二，三，四，…，它们的含义则是相同的；二和一又一是一回事，三和一又一又一或二又一是一回事，四和三又一、五和四又一是一回事；照这样每次增添一在前一数上就形成了一个数列.

一，二，三，四，五，六，七，八，九，十，…，称为自然数列. 这数列是无限的，即是说，当我们到达了这数列的某一个数时，添上一，又得到原先没有得到的一个新数.

5. 顺序 对这个数列联系着顺序的概念：所谓将一些对象

① 在这种情况下，集合这个词不甚妥当.

排成某种顺序，是指把这些对象的某一个对应于数一，称之为第一个；然后将另一个对象对应于数二，称之为第二个；然后又将另一个对应于数三，称为第三个；然后将另一个（它尚未命名）对应于数四，称为第四个，等等．要数出一个集合的对象，就把它们和名称一，二，三，四，…相对应；到了集合的最后对象时，它所对应的数目的名称就是这集合的对象的个数．无论照什么顺序来数出同一组对象，所得到的作为结果的数总是一样的：在此我们把这看作与数的概念相联系的一个明显的命题．

前面说过，要查明两个集合的数目相等，只要把一个集合的每个对象跟另一集合的一个对象对应起来，并给以相同的标志．作为标志可以利用自然数列中数的名称；于是数出这两个集合以查明它们是否有相同的数目．查明两集合数目相等的原始过程，和比较高明一点的计数过程归根到底是一样的．

我们把顺序的概念赋加到数或集合的概念上．有的著者倒过来办．顺序的概念是一列事件发生时间的先后启示我们的；给了这样一列事件，就知道所谓某事件在另一事件之前或之后意味着什么．顺序的概念也可以联系到在左或在右的概念．无论如何，我们可以假想一列不同的符号，比方说按一定顺序排列的一列字一，二，三，四，…；这样，给了这些符号中的两个，就可知道哪个在另一个之前．一个符号在另一个之前，那么它一定在后者之后的所有符号之前，这一命题应当看作是包含在顺序这一概念中的．我们的一列符号是自然数，这一列是自然数列．

在我们的观点下，在一个数上添加一，就是用它后面的一个数去代替它，如果把这新数又用它后面的一个去替代，那就是在前面的数上添加了二，等等．在这观点下，一个数应当看作比另一数小或是大，就看它是在前或在后．

6. 零　上面介绍的数使我们能回答这样一个问题：在这集合中有几个对象？要形成按正规意义的集合，应该至少有两个对象；但是，我们已经把一当作一个数：事实上，一这个字可以作为下面一类问题的自然答案：教室里有几个学生？有一个．这口袋里有

几个钱币？有一个. 如果教室里是空的，或者口袋里是空的，答案应该是零；零也应该看作是一个数；它表示集合中没有对象，严格说，集合不存在. 一个数是零，换一种说法，我们也说这个数是空的(nul). 如果让零出现在自然数列中，我们把它放在开头，在一之前，写作

零，一，二，三，四，…

但是按习惯，我们把自然数列这个名称保留给数列一，二，三，四，…，而把这个数列里出现的数称为自然数，数零排除在外①.

7. 数字 代替字零，一，二，三，四，五，六，七，八，九，我们使用有同样意义的数字

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

以后将见到，如何用这些数字显示一切的数. 很明显，要显示最初的一些数，利用什么符号都可以，只要这些符号是互异的，比方说，利用字母 a, b, c, d, e, … 按习惯顺序排列，或按其他顺序排列.

人们总听到过所谓密码术，这就是按预先约定，将某些字用一些数字来代替；同样，我们也可以在算术里把一些数字或者数用字母来代替. 倘有需要，还可以更改约定的内容，只要预先能知道.

我们常用字母表示数，这样，代替说某个数，便说数 a，或更简单地说 a，而当着在同一个地方多次谈到数 a 时，那总是表明所说的是同一个数. 同样，代替说某两数，第一个和第二个，便说数 a 和 b，甚至简单说 a 和 b.

可以看出，习惯于使用这一类符号，将大大简化语言，清晰推理.

8. 笔述命数法 以后会回过头来谈口述命数法和笔述命数法的规则，对于它们读者是已经熟悉的；为方便计，此刻介绍一个法则，如何利用上面写出的十个数字来表示一切自然数，利用这十个数字构成一个无穷的互异的符号序列，使得每个符号能够和它

① 零也是一个整数，但不是自然数. 应该提醒读者，整数这个名称可以适用于负数，这不是此地的话题.