非线性常微分方程定性分析

王联　王慕秋　编著

非线性常微分方程定性分析

王　联　王慕秋　编著

哈尔滨工业大学出版社

非线性常微分方程定性分析

王　联　王慕秋　编著

*

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印张23.875　字数606 000
1987年7月第1版　1987年7月第1次印刷
印数 1—4000
书号 13341.22　定价4.80元
ISBN7-5603-0006-5/O·1

序

常微分方程定性和稳定性理论，随着科学技术的迅猛发展，不仅在无线电技术、自动控制以及卫星通讯等尖端领域中有重要的应用，而且在生物、化学和现代物理等领域也已成为不可缺少的数学工具。因此，为了适应祖国四化建设的需要，非线性常微分方程的定性分析方法，不仅应为综合性大学数学系高年级学生、研究生和从事常微分方程定性理论研究的数学教师所熟悉，而且也应为非数学专业的理工科研究生、高等师范和工科大学等大专院校的教师所掌握。本着这个精神我们编写了这本讲义。近三十多年来，由于世界各国的常微分方程工作者的共同努力，使这个学科的理论得到了进一步的发展，涉及到这个课题的各种专著丛书，如雨后春笋般地在各国出版问世。因此，它丰富的内容所涉及到的深度和广度，要想在一本讲义中都能概括，是极其困难的事。所以，我们只能就所熟悉的内容和掌握到的资料，编写这本讲义。我们的编写工作是分两步进行的。首先，是介绍庞卡莱（H.Poincare）开创的平面定性理论的基本内容。在编写的过程中参考了国内外有关这方面的书籍。其次，在稳定性理论中，主要是介绍李雅普诺夫（A.M.Ляпунов）开创的运动稳定性理论的基本内容及其后来在苏联的发展和近年来西方在这方面的有关工作。

作者认为，不论是庞卡莱在1881年到1886年间发表的“微分方程所定义的积分曲线”的四篇论文，还是李雅普诺夫于1892年在莫斯科大学获得博士学位的“运动稳定性的一般问题”的论文，都为非线性常微分方程的定性分析提供了极其强有力的思想

方法，从而奠定了今天的非线性常微分方程定性分析的理论基础。特别是在数学方法逐渐渗透到其它自然科学领域中去的今天，更是如此。

再则，本书的侧重点是介绍非线性常微分方程定性分析方法在实际中的应用。主要是介绍作者所从事的一些研究工作。

本讲义曾作为中国科学院研究生院的选修课教材，使用了若干年。书中，部分主要内容还曾分别于 1981 年夏在大连为全国高等师范院校的部分教师们，以及 1982 年冬于广州为全国理工科大专院校的部分研究生和老师们讲授过。为了及时地满足国内若干大专院校的教学要求，作者修订、编写了本讲义。作者主观上希望本讲义的编写在内容的取舍方面、理论的完整方面、问题的阐述方面以及定理的论证思路和方法的简练方面，尽可能地使本讲义易于为初学者所接受。但是，由于作者的学识水平所限，本书内容可能有不妥之处，恳请读者批评指正。

王 联　王慕秋

1985年9月8日

于中国科学院数学研究所

目　　录

第一章 平面定性理论基础

§1 基本概念

考虑

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y),\tag{1.1}$$

定义在乘积空间

$$H:\{x^2+y^2<+\infty,\ |t|<+\infty\},\tag{1.2}$$

其中$P(x,y)$，$Q(x,y)$是x,y的连续函数，且在域H中保证解的唯一性。

我们将解与初值t_0,x_0,y_0之间的关系写成

$$x=x(t;t_0,\ x_0,\ y_0),\quad y=y(t;t_0,x_0,y_0)\ .\tag{1.3}$$

这表示方程（1.1）在初始时刻$t=t_0$过点（x_0，y_0）的一个解。根据解对初始值的连续依赖性，我们知道解（1.3）是t_0，x_0，y_0的连续函数。

根据解（$x(t)$，$y(t)$）与初始时刻t_0的关系，亦可以把（1.3）改写成

$$\begin{cases}x(t,t_0,x_0,y_0)=x(t-t_0,0,x_0,y_0),\\ y(t,t_0,x_0,y_0)=y(t-t_0,0,x_0,y_0).\end{cases}\tag{1.4}$$

事实上，这种写法是把过初始点$(x_0,\ y_0)$的时刻从$0=t-t_0$算起，那末解到达点（x，y）的时刻是$t-t_0$。另一方面，由于（1.1）是自治系统，方程右端不显含t，因此（1.4）的两端函数都满足方程组（1.1），而且二者在$t=t_0$时都是过同一初始点（x_0，y_0），故根据解的唯一性知，［$x(t,t_0,x_0,y_0)$，$y(t,t_0,x_0,y_0)$］与［$x(t-t_0,0,x_0,y_0)$，$y(t-t_0,0,x_0,y_0)$］在所有时

刻都重合。所以我们把（1.3）改写成

$$x=x(t-t_0,x_0,y_0),\ \ y=y(t-t_0,x_0,y_0). \tag{1.5}$$

在此给时间 t 的任一值t_1，此值属于（1.1）的右端有定义的区间，并令

$$x_1=x(t_1-t_0,x_0,y_0),\ \ y_1=y(t_1-t_0,x_0,y_0).$$

我们再作由初值（t_1,x_1,y_1）所确定的（1.1）之解，即作

$$x=x(t-t_1,x_1,y_1),\ \ y=y(t-t_1,\ x,y_1),$$

于是便有恒等式

$$x(t-t_0,x_0,y_0)=x(t-t_1,x_1,y_1),$$

$$y(t-t_0,x_0,y_0)=y(t-t_1,x_1,y_1).$$

事实上，当 $t=t_1$时，上述恒等式两端都变成（x_1,y_1），因此根据解的唯一性，它们对于所有使解（1.5）有定义的 t 值都重合。

为简便起见，在上列恒等式中，以t_1代替$t-t_0$，以 t_2 代替 $t-t_1$，我们就得到所要探讨的微分方程组（1.1）的一个重要性质。

定理 1 方程组（1.1）的解规定一个以 t 为参数的空间变换群，这就是说下列恒等式成立：

$$\begin{cases} x(t_2,x(t_1,x_0,y_0),\ y(t_1,x_0,y_0))=x(t_1+t_2,x_0,y_0), \\ y(t_2,x(t_1,x_0,y_0),\ y(t_1,x_0,y_0))=y(t_1+t_2,x_0,y_0). \end{cases} \tag{1.6}$$

用记号 $f(p,t)$ 表示在 $t=0$ 时经过点 $p(x,y)$ 的（1.1）之解，那末对每一个固定的t，$f(p,t)$定义了

$$R^2\to R^2, p\in R^2,\ \ t\in R\to f(p,t)\in R^2.$$

此时等式（1.6）可写成

$$f(f(P,t_1),t_2)=f(p,t_1+t_2).$$

这说明了变换 f 可进行群的运算。

何谓群的运算？从代数学我们知道：

定义 设A是一个非空集合，所谓定义在A上的一个运算，

就是指一个法则，它使A中任意两个元素，都有A中一个元素与它对应。

如果在一个非空集合G上定义了一个代数运算，且这个运算满足下列三个条件：

对乘法运算而言：

（i）G中的任意三个元素 a，b，c 都有 $a(bc)=(ab)c$；

（ii）G中有一个元素e适合 $ae=ea=a$，（$a\in G$ 任意）；

（iii）G中每一个元素a，都存在一个元素 $a^{-1}\in G$，使 $aa^{-1}=a^{-1}a=e$，

则称G为一个乘法群；

对加法运算而言：

（i）$a+(b+c)=(a+b)+c$，a，b，c 是G中任意三个元素；

（ii）在G中存在一个零元素0，使得$a+0=0+a=a$；

（iii）对任意一个 $a\in G$，都存在一个逆元素$-a\in G$，使 $(-a)+a=a+(-a)=0$，

则称G为一个加法群。

例 1 所有有理数构成的一个集合，它按通常的加法构成了一个加法群。

例 2 除去零元素外，所有的实数对通常意义下的乘法，构成一个乘法交换群。0不满足乘法群的第三条.

如果方程组（1.1）中的$P(x,y)$，$Q(x,y)$连续，且满足唯一性条件，则变换 $f(p,t)$ 具有下列性质：

（Ⅰ）$f(p,0)=p$；

（Ⅱ）$f(p,t)$对p,t一并连续；

（Ⅲ）$f(f(p,t_1),t_2)=f(p,t_1+t_2)$。

由性质（Ⅰ）可知：对应于参数 $t=0$ 的变换是群的幺变换；由性质（Ⅰ）与性质（Ⅲ）可知变换 $f(p,t)$ 的逆变换存在，它就是$f(p,-t)$。因为它满足下列关系式

$$f(f(p,t),-t)=f(p,t-t)=f(p,0)=p,$$

因而，这些变换的全体 $\{f(p,t),-\infty<t<+\infty\}$ 构成了一个群。性质（Ⅱ）说明这些变换是连续的。t 是参数，故变换的全体 $\{f(p,t),-\infty<t<+\infty\}$ 组成 $R^2\to R^2$ 的一个单参数的连续变换群，这个变换的全体叫做动力系统。有时就把方程组(1.1)叫做二阶动力系统。

以上的推理对于一般 n 维方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ \cdots,\ x_n),\quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1.1)^*$$

也成立。

如果记 $f(p,t)$ 表示方程组 $(1.1)^*$ 在 $t=0$ 时过初始点 $p(x,\ \cdots,\ x_n)$ 的解，只要方程 $(1.1)^*$ 右端函数满足保证解的存在唯一性条件，那末根据解对初始值的连续依赖性，同样有下列三个性质：

（Ⅰ）$f(p,0)=p$；

（Ⅱ）$f(p,t)$对p,t一并连续；

（Ⅲ）$f(f(p,t_1),t_2)=f(p,t_1+t_2)$。

因此当我们把 $f(p,t)$ 看成是 $R^n\to R^n$ 的变换时，则所有变换的全体

$$\{f(p,t),\ -\infty<t<+\infty\},$$

构成了一个集合。由解的性质（Ⅲ）在这个变换集合中规定了一个运算，这个运算使得集合中的任意两个元素$f(p,t_1)$，$f(f(p,t_1),t_2)$都有集合中的另一个元素 $f(p,t_1+t_2)$ 与它相对应，而且针对这个运算来说，集合中任一个变换 $f(p,t)$ 都存在一个逆变换 $f(p,-t)$，这是因为 $f(f(p,-t),t)=p$。因此变换的全体 $\{f(p,t),-\infty<t<+\infty\}$，构成了一个单参数的连续变换群，它就是一个动力系统。因此方程组 $(1.1)^*$ 有时也被称为n阶动力系统，也可以称 $f(p,t)$ 为R^n上的抽象动力系统或叫做拓扑动力系统。

定义1 $f(p,t)$ 对固定的 p 而言，我们把它叫做运动。对固定的 p，综合

$$f(p,(-\infty,\ \infty))=\{f(p,t),\ -\infty<t<+\infty\},$$

叫做运动的轨线，记作 $f(p,I)$ 或 r_p，即过点 p 的整条轨线；

集合

$$f(p,0\leqslant t<+\infty)=\{f(p,t),0\leqslant t<\infty\}$$

与

$$f(p_1-\infty<t\leqslant 0)=\{f(p,t),-\infty<t\leqslant 0\},$$

分别叫做过点p的正半轨和负半轨，分别记作$f(p,I^+)$与$f(p,I^-)$或r_p^+与r_p^-；

集合

$$f(p;T_1T_2)=\{f(p,t);T_1\leqslant t\leqslant T_2\},$$

其中 $-\infty<T_1<T_2<+\infty$，被称为过P点的轨线上之有限弧段。正数T_2-T_1叫做这一弧段的时间长度。

一般说来，要求形如（1.1）的微分方程组能规定一个动力系统，首先要求这个微分方程组的任何解 $(x(t),\ y(t))$ 都在 $-\infty<t<+\infty$ 上有定义。但是实际上，尽管可使（1.1）的右端函数在欧氏平面的某一个区域G内满足李普希茨（Lipschitz）条件或其它保证解的唯一性条件，方程组（1.1）也不一定就能规定一个动力体系。因为不一定（1.1）的所有解对于所有t值都可延拓。

例如 $\dfrac{dx}{dt}=x^2$，$\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{x^2}dx=t-t_0$，

$$x(t)=\left[t-\left(t_0+\frac{1}{x_0}\right)\right]^{-1},\quad x_0\neq 0.$$

显见当 $t\to t_0+\dfrac{1}{x_0}+0$，$x(t)\to-\infty$ 。因此方程解出现有限逸

时 $t=t_0+\dfrac{1}{x_0}$，自然就不可能构成一个动力系统。

为了解决这个问题，只要改变（1.1）的自变量，即只须改变积分曲线族上的参数，我们就可以使得任一方程组（1.1）都可规定一个动力系统。

换句话说，如果我们只注意个别曲线或整个积分曲线族的几何性质（更确切地说，应当是拓扑性质），那末我们可限于讨论规定动力体系的微分方程。

为了使以后的叙述更明白起见，我们引入下列概念：

定义 2 两个微分方程组（1.1），如果它们的解（包括奇点）在相平面上的几何图形（不计轨线的方向）重合，则称这两个微分方程组是等价的。

例 1 微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-x$$

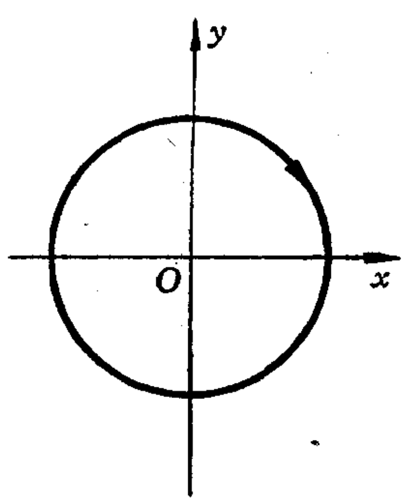

图 1.1

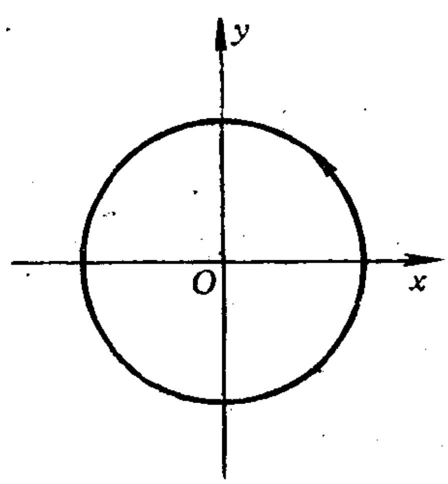

图 1.2

与微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y,\quad \frac{dy}{dt}=x$$

是等价的。

如果方程组（1.1）的解构成一个动力系统，则（1.1）就被称为D方程组。

在研究（1.1）的同时，我们考虑体系

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y)\lambda(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\lambda(x,y),\qquad (1.7)$$

它的定义域是

$$H: E_2\{x^2+y^2<+\infty\}\times I(|t|<+\infty).$$

下面我们就来研究（1.1）与（1.7）之间的等价性。

定理 2 设在E_2上$\lambda(x,y)\neq 0$，又设

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\qquad (1.8)$$

是（1.1）的解，其相轨线异于奇点，则存在单调函数$t=t(\tau)$，$t(\tau)\in C^1$，使得

$$x=\varphi(t(\tau))=\varphi(\tau),\quad y=\psi(t(\tau))=\psi(\tau),\qquad (1.9)$$

是（1.7）的解。

证 考察

$$\tau=\tau(t)=\tau_0+\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\lambda(\varphi(s),\psi(s))},$$

$$|t_0|<\infty,\quad |\tau_0|<\infty.$$

故

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{\lambda(\varphi(t),\psi(t))}\neq 0,\quad (\varphi(t),\psi(t))\in E_2.$$

所以$\tau=\tau(t)$是单调函数，$\tau(t)\in C^1$，从而存在反函数$t=t(\tau)$，$t(\tau)\in C^1$，且为τ的单调函数，

$$\frac{d\varphi(t)}{d\tau}=\frac{d\varphi}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}=P(\varphi(t),\psi(t))\lambda(\varphi(t),\psi(t)),$$

$$\frac{d\psi(t)}{d\tau}=\frac{d\psi}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}=Q(\varphi(t),\psi(t))\lambda(\varphi(t),\psi(t)).$$

因此（1.9）确实是（1.7）的解。

定理 2 告诉我们，系统（1.1）与系统（1.7）实质只差一

个时间变换，而且这个变换是同胚的。因此在定理2的条件下，(1.1) 与 (1.7) 是等价的。

当 $\lambda(x,y)>0$，(1.1) 与 (1.7) 的轨线同向；

当 $\lambda(x,y)<0$，(1.1) 与 (1.7) 的轨线异向。

如果在E_2上允许$\lambda(x,y)=0$，那末 (1.7) 的奇点除了(1.1)原有的奇点外，曲线$\lambda(x,y)=0$上的一切点都是 (1.7) 的奇点。$\lambda(x,y)=0$ 被称为 (1.7) 的奇异轨线。这时 (1.7) 的轨线，在 $\lambda(x,y)\neq 0$ 的地方与 (1.1) 的轨线重合，当 $\lambda(x,y)>0$ 时与 (1.1) 的轨线同向；当 $\lambda(x,y)<0$ 时与 (1.1) 的轨线异向。此外 (1.7) 还多了奇异轨线 $\lambda(x,y)=0$。当然这是针对 (1.1) 与 (1.7) 二者不等价的情形来讨论的。

例 2 微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x,$$

及微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=(x+y)y, \quad \frac{dy}{dt}=-x(x+y),$$

二者的相轨线如下二图所示。这里$x+y=0$是奇异轨线。

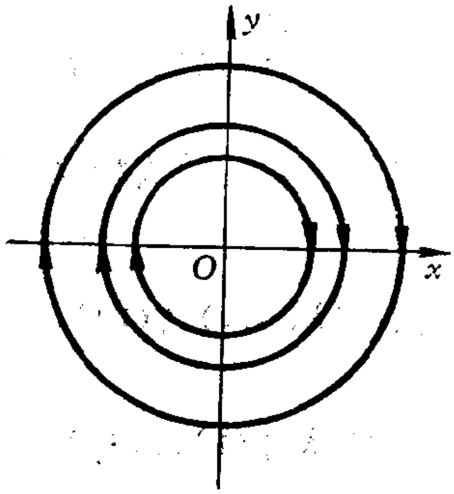

图 1.3

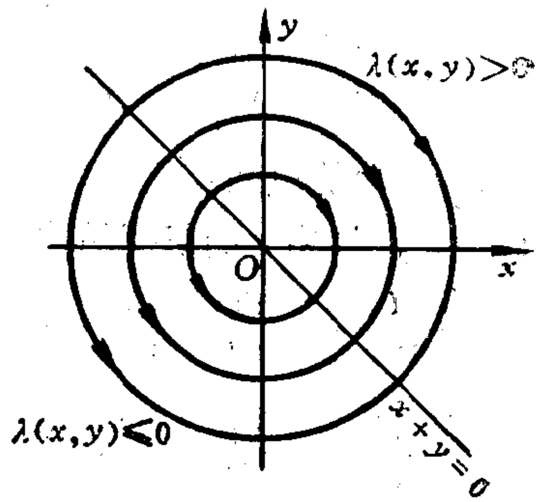

图 1.4

故这两个方程组是不等价的。

定理 3 设系统（1.1）的右端函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在区域$G\subset E_2$上有定义且连续，则在G上总存在与（1.1）等价的系统，它的所有解的存在区间为$(-\infty,\ \infty)$。

证 可设$P(x,y)$，$Q(x,y)$有界。不然的话，可取

$$\mu_1(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}|P(x,y)|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{|P(x,y)|}, & \text{当}|P(x,y)|>1,\end{cases}$$

$$\mu_2(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}|Q(x,y)|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{|Q(x,y)|}, & \text{当}|Q(x,y)|>1.\end{cases}$$

显见如此定义的函数$\mu_i(x,y)(i=1,2)$都是连续的、正的、有界函数，即 $0<\mu_i(x,y)\leqslant 1$，$(i=1,2)$。

再取$\lambda(x,y)=\mu_1(x,y)\mu_2(x,y)$，故$\lambda(x,y)$连续且满足

$$0<\lambda(x,y)\leqslant 1.$$

于是由定理 2 知系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y)\lambda(x,y)\ ,\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\lambda(x,y),$$

与（1.1）在G上等价，且

$$|P(x,y)\lambda(x,y)|\leqslant 1,\quad |Q(x,y)\lambda(x,y)|\leqslant 1.$$

故当$P(x,y)$，$Q(x,y)$无界时，我们可以把它化成有界情形。因此下面在证明定理时就假定$P(x,y)$，$Q(x,y)$是有界的。

这里就下列三种情形来证明定理的结论。

（i）若（1.1）的轨线无限长，则沿着这种轨线t可延伸到$+\infty$（或$-\infty$）。因为此时我们可以设

$$v=\frac{ds}{dt}=[P^2(x,y)+Q^2(x,y)]^{\frac{1}{2}}.$$

s表示由初始点算起到任一时刻t的轨线弧长，而

$$\frac{ds}{dt}=v,\qquad \text{故}\ t=\int_0^s\frac{1}{v}ds.$$