初等组合学漫话

柯召 魏万迪 编著

科学出版社

初等组合学漫话

柯　召　魏万迪 编著

[illegible]

1984

内 容 简 介

本书以一个中学的课外数学小组的三十次活动为背景，通过几十个故事引出的一些数学问题，介绍了组合学的主要内容以及如何应用.

本书深入浅出，可供具有中等文化程度的读者和中学数学教师阅读.

初等组合学漫话

柯 召 魏万迪 编著

责任编辑 陈家锵 毕颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年4月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1984年4月第一次印刷 印张：9 3/8

印数：0001—15,000 字数：183,000

统一书号：13031·2504

本社书号：3437·13—1

定价： 1.20 元

前　　言

组合学是历史悠久而现在仍然蓬勃发展着的一个数学分支．它所研究的问题与按照一些指定的规则来安排某些物件有关，诸如符合要求的安排是否存在；当存在的时候，如何把它们实际构造出来；如何计算符合要求的全部安排的个数；若已给出最优标准，如何求得符合要求且达到最优的安排等．这些问题依次称为存在问题、构造问题、计数问题和最优化问题等．存在问题是其他问题的前提，其他问题是存在问题的自然发展．一般说来，当那些指定的规则比较复杂，符合要求的安排的存在性并不明显时，总是先研究存在性而后其他．

在中学数学教科书里已经介绍过一些最简单的排列、组合问题，但是不多．在国内外数学竞赛或数学考试中，常能见到具有组合学性质或用到组合学方法和思维的题目．在实际问题和一些科学技术领域里，各式各样的组合问题出现得不少．然而现阶段我国大学里还没有相应的专门课程．因此向广大读者介绍一些组合学知识就很有必要．

本书以初等数学为基础介绍组合学的主要内容．在用到初等数论的地方，都有一定的说明．具有中学数学基础的读者，只要不畏困难，勤于学习，善于思索，就能理解本书的大部分．

本书以一个中学课外数学小组的三十次活动为背景，介绍了初等组合学的主要内容，包括故事、定理和应用．中学课外学习活动是中学教学的一个重要方面．它方式灵活，内容多样，可以补课内学习的不足．通过它，学生能更好地巩固基础知识，增长见识，扩展方法，灵活思维和培养兴趣．因此给予中学课外活动以更多的关注，对提高中学教学质量是大有益处的．必须说明，如果您是一位中学教师，请切忌把书里的内容和课外活动方式硬搬到您所指导的课外学习活动中去．因为书上的东西绝没有实际活动那么生动、活泼、自然，如果照此临摹，就会显得死板，势必将课外学习活动的一些优点埋没了．本书只能供您参考，凭您的经验和智慧，根据学生的实际情况，您定能合理地使用本书，在工作中作出优异的成绩．

如果您每周花两三个小时来阅读书中的一段，只要半年左右的时间就能了解初等组合学的主要内容、原理和方法，并能用来解决工作、生产和生活中遇到的一些问题．这岂不是一件很美好又很愉快的事么！

限于作者的水平和经验，书中的错误和缺点一定不少，望同志们批评指正．

编　著　者

目　录

一、魔　方

在第一次活动开始的时候，吴老师说："正如你们知道的，组合数学中有许多古老而有趣的传说. 那么就让我们从我国的一个很古很古的传说开始我们的课外活动吧. 这次活动只是一个引子，它引导我们具体地了解组合数学的研究对象". 接着，她介绍了有关魔方的传说：

在大禹(约于公元前 2100 年—公元前 2000 年)治水的时候，曾有人发现洛水里一个乌龟的背上有一个图案，如果用今天通行的数码写出来，就是：

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix} \tag{1.1}$$

初看起来，这个图并没有什么可值得特别注意的，但细究一下，则发现它具有以下的奇妙性质：

1. 1 至 9 中的每一个数码在图中恰好出现一次.

2. 它呈正方形，有三行三列. 每一行的诸数码和(简称为行和)，每一列的诸数码和(简称为列和)，两条对角线 (456 叫主对角线，258 叫次对角线)的诸数码和(简称为对角线和)均相等.

这样的图被称为三阶纵横图，又称为三阶魔方或幻方. 今后常用一个字母，例如 A，来表示 (1.1).

如果(1.1)中的正方形是四行四列的，或一般地是 n 行 n 列的，而且符合相应的条件 1 (1 至 n 中的每一个数字恰好在其中出现一次)和 2，这样的图案就叫做一个 n 阶魔方.

十几个世纪以后，在其他国家，首先在希腊才出现魔方的记载. 十五世纪时，一个希腊人将它带到了意大利. 当时人们并不把它作为一个数学对象来研究，只认为它是一个神秘的东西，对它充满着迷信. 建筑家和工艺师将它刻在墙壁上和器皿(例如银盘)的表面，为的是避邪，用来医治身体上的疾病和减少精神上的痛苦. 例如，在阿伯莱德·杜埃的有名雕刻中，便有一个四阶魔方：

$$\begin{matrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{matrix}$$

介绍到这里，吴老师提出一个问题：如何定出全部三阶魔方?

小敏说："既然条件 2 是一些等式关系，我想，用解方程的办法能行." 接着，他便推演起来：

设三阶魔方为：

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \qquad a, b, \cdots, h, i \text{ 互不相同且在集 } [1, 9]^{1)} \text{ 中} \tag{1.2}$$

1) 符号 $[1, 9]$ 表示 1 至 9 的九个数字所组成的集合. 一般地，当 m, n 是二个整数且 $m \leqslant n$ 时，$[m, n]$ 表示由 m 至 n 的全部整数所组成的集合.

因三个行和之和正好是 [1, 9] 中全部数字的和，故由条件 2 得到：

$$\text{行和的三倍} = 1 + 2 + \cdots + 9 = 45,$$

因而

$$\text{行和} = \text{列和} = \text{对角线和} = 15. \tag{1.3}$$

今把 (1.3) 中包含 e 的四个方程写出：

$$\begin{aligned} d + e + f &= 15 \\ a + e + i &= 15 \\ c + e + g &= 15 \\ b + e + h &= 15 \end{aligned}$$

由这四式相加，得

$$3e + (a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 60$$

而括号就是 1 至 9 的全部数字和，故得：

$$e = 5. \tag{1.4}$$

这就是说三阶魔方正中的数必须是 5. 这个结果是比较直观的，因为包含 e 的线(行、列、对角线皆称为线)最多，故 e 的大小应适中一些，而 5 正好是 [1, 9] 中最适中的数.

鉴于这同一直观的想法，可以估计 [1, 9] 中最小的数 1 和最大的数 9 不会出现在 (1.2) 的四个角的任何一个上，因为有三条线在那儿相交. 现在用反证法来证明 9 不能在四个角上. 可设 $a = 9$. 于是，

$$b + c = d + g = 6, \quad b, c, d, g \text{ 互异}, \neq 5,$$
$$\text{且在 } [1, 9] \text{ 中}. \tag{1.5}$$

另一方面，方程：

$$x+y=6,\quad 1\leqslant x\neq y\leqslant 9 \tag{1.6}$$

的正整解 (x, y) 只有：

$$(x,y)=(1,5),(5,1),(3,3) \tag{1.7}$$

和

$$(x,y)=(2,4),(4,2). \tag{1.8}$$

因为 5 已被 e 所取，而 3 不可能在 (1.2) 中出现两次，故(1.7) 不合 (1.5). 余下的 (1.8) 要同时满足 (1.5) 中的两个方程是不可能的. 这样一来，(1.2) 只可能为下面的方形：

$$\begin{array}{|ccc|}\hline & 9 & \\ & 5 & \\ & 1 & \\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|ccc|}\hline & 1 & \\ & 5 & \\ & 9 & \\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|ccc|}\hline & & \\ 1 & 5 & 9 \\ & & \\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|ccc|}\hline & & \\ 9 & 5 & 1 \\ & & \\ \hline\end{array}. \tag{1.9}$$

由于方程 (1.6) 恰有二个解 (1.8)，故 (1.9) 中的每一个方形都正好发展为二个分形，它们分别是：

$$\begin{array}{c}\begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 9 & 4 \\ & 5 & \\ & 1 & \\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|ccc|}\hline 4 & 9 & 2 \\ & 5 & \\ & 1 & \\ \hline\end{array};\quad \begin{array}{|ccc|}\hline & 1 & \\ & 5 & \\ 2 & 9 & 4 \\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|ccc|}\hline & 1 & \\ & 5 & \\ 4 & 9 & 2 \\ \hline\end{array}; \\ \\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ & & 4 \\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|ccc|}\hline & & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ & & 2 \\ \hline\end{array};\quad \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & & \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & & \\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|ccc|}\hline 4 & & \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & & \\ \hline\end{array}.\end{array} \tag{1.10}$$

由于对角线和为 15，故 (1.10) 中的每一个方形的其余两个顶点上的数字就完全确定了，从而其他两条边上的中点上的数字也就随之而定. 这就得出了全部三阶魔方：

$$A_1=\begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \\ \hline\end{array},\qquad A_2=\begin{array}{|ccc|}\hline 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \\ \hline\end{array},$$

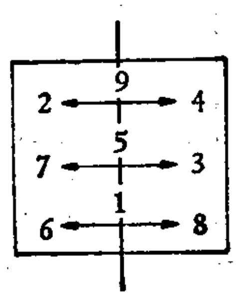
$$A_2=\begin{vmatrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{vmatrix},\qquad A_6=\begin{vmatrix}8&3&4\\1&5&9\\6&7&2\end{vmatrix},\qquad (1.11)$$

$$A_3=\begin{vmatrix}8&1&6\\3&5&7\\4&9&2\end{vmatrix},\qquad A_7=\begin{vmatrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{vmatrix},$$

$$A_4=\begin{vmatrix}6&7&2\\1&5&9\\8&3&4\end{vmatrix},\qquad A_8=\begin{vmatrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{vmatrix}.$$

吴老师问道：(1.11)中的八个魔方之间有些什么关系呢？

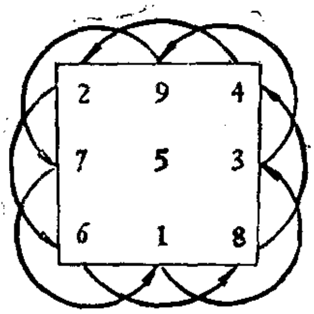
小勤说：在(1.11)中，第二列的四个魔方分别是第一列的四个魔方按其垂直中线反射的结果．例如，由：



按951这条垂直中线反射便得：

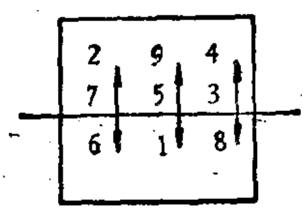
$$\begin{vmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{vmatrix}.$$

小询说：A_2是由A_1绕其中心5反时针方向旋转90°的结果．



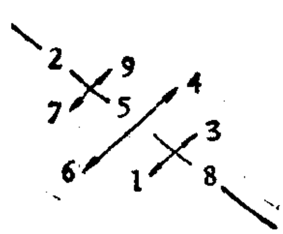
类似地，A_3是由A_1旋转[1] 180° 的结果，也就是由A_2再旋转 90° 的结果；A_4是由A_1旋转 270° 的结果，也就是由A_3再旋转 90° 的结果．同样地，A_6是由A_5绕其中心旋转 270° 的结果，A_7是由A_5旋转 180° 的结果，A_8是由A_5旋转 90° 的结果．

小明说：把A_1按其水平中线反射，即：



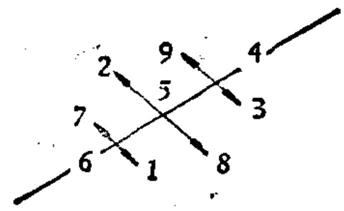
便得A_7．同法，由A_2可得A_8，由A_3可得A_5，由A_4可得A_6．

除了按中线反射外，还可按主对角线或按次对角线反射．例如，由A_1按主对角线反射：



1）如果略去旋转的方向不提，均理解为按反时针方向旋转．

便得 A_8，由 A_2 便得 A_5，由 A_3 便得 A_6，由 A_4 便得 A_7. 由 A_1 按次对角线反射



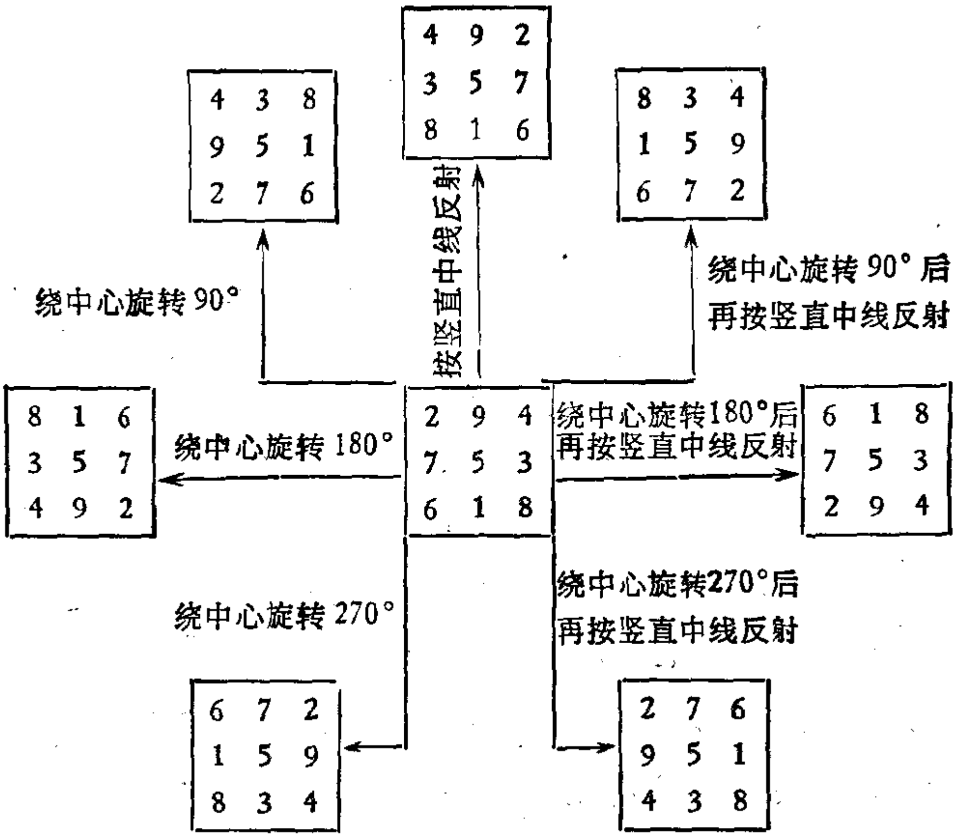
便得 A_6，由 A_2 便得 A_7，由 A_3 便得 A_8，由 A_4 便得 A_5.

吴老师说：同学们说得都很对．这里自然发生一个问题：是否能够由 (1.11) 中的任意一个魔方出发，经过上面的变化方法得出其他七个魔方的全部呢？

小思说：因为由 A_1 旋转 90°，180°，270° 便分别得到 A_2，A_3，A_4，即 (1.11) 的第一列中的其余三个．而 (1.11) 的第二列的每一个又可由第一列中的相应者经过按竖直中线反射来得出．所以，由 A_1 可以得出其他七个的全部．反过来，由其他七个经过相反的变化就可得到 A_1，再由它又可变到其他任何一个．这就是说，由 (1.11) 的任何一个，只经绕中心的旋转和按竖直中线的反射就可得出其他七个的全部．譬如由 A_1 得出其他七个的过程可如下页图所示进行．

讨论到这里，师生都感到很高兴，同学们已经亲手解决了有关三阶魔方的个数以及它们之间的相互关系等问题．

就在这个时候，吴老师告诉同学们，认识是没有止境的．就拿三阶魔方来说，还有一个很有意思的问题值得考虑：如果我们不先用解方程的方法证明三阶魔方只有 (1.11) 中的八个，而先想到从已知的一个（例如 (1.1)）借助上面所看到的



众多变化方法来得出其他的，那么是否正好得出八个三阶魔方呢？

同学们表示回答不了这个问题.

吴老师认为要同学们在现阶段便能独立地回答这个问题是不切实际的，因为解决这个问题的思路和技巧已经超出初等数学的范围，但是，只要介绍出来，同学们也是能接受的，而且现在就开始接触这些思想和技巧也是有好处的. 于是，她便作了下面的介绍.

对一个魔方进行以下的变化之后得出的仍是一个魔方：1. 旋转 90°，2. 旋转 180°，3. 旋转 270°，4. 按竖直中线反射，5. 按水平中线反射，6. 按主对角线反射，7. 按次对角线反射，

以及这些变化按任何顺序、以任何重复次数的连续施行. 今后把这些变化叫做变换. 这些变换的连续施行，例如依次施行1、5、4、7、6、2、1、4…等等，这样的方式是无穷无尽的. 然而可以证明这些无穷无尽的方式中彼此不同的仅有有限个. 值得提起注意的是，“变换”既非数字或数字的函数，又非图形. 它也成为当今数学研究的对象，而且由此引起了近代数学的一次革新，推动了近代数学的蓬勃发展. 为了下面叙述和处理方便起见，记变换 1 为 α，4 为 γ，5 为 γ_1，6 为 γ_2，7 为 γ_3，把对正方形 A 施行变换 β 所得出的正方形记为 $A\beta$，把对 A 先施行 β_1 后施行 β_2 所得出的结果记为 $A(\beta_1\beta_2)$ 或 $A\beta_1\beta_2$，亦说对 A 施行了变换 $\beta=\beta_1\beta_2$. 对 A 施行了变换 $\beta_1\beta_2$ 后再施行变换 β_3，所得出的结果记为 $A((\beta_1\beta_2)\beta_3)$，等等. 这样一来，变换 2 是旋转 90° 后再旋转 90°，故为 $\alpha\alpha$，简记为 α^2，叫做变换 α 的平方. 同理，变换 3 是 $\alpha^2\alpha$，记为 α^3，称为变换 α 的三方. 注意，一般说来 $A\beta_1\beta_2$ 与 $A\beta_2\beta_1$ 并不相同. 例如当 $\beta_1=\alpha$，$\beta_2=\gamma$，A 为 (1.1) 时，有：

$$A\alpha:\begin{matrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{matrix},\qquad A\alpha\gamma:\begin{matrix}6&7&2\\1&5&9\\8&3&4\end{matrix},$$

$$A\gamma:\begin{matrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{matrix},\qquad A\gamma\alpha:\begin{matrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{matrix}.$$

为了叙述统一起见，把“不予变化”的情形也视为一种特殊的变换，列为 8，记为 e，于是对任何 A，$Ae=A$，亦称 e 为幺

变换或恒等变换.

容易看出，对一个三阶魔方施行变换 α, γ, γ_i 等之后，魔方的任一条边上的三个数同时变到某一条边上去，不会分别变到某二条或三条边上去. 据此可以把对魔方施行上述变换简化为对一个仅在四个顶点有标记的正方形上进行. 设 B 为:

$$B:\ \begin{array}{|cc|} a & d \\ b & c \end{array},$$

则

$$B\alpha:\ \begin{array}{|cc|} d & c \\ a & b \end{array},\quad B\alpha^2:\ \begin{array}{|cc|} c & b \\ d & a \end{array},\quad B\alpha^3:\ \begin{array}{|cc|} b & a \\ c & d \end{array},$$

$$B\gamma:\ \begin{array}{|cc|} d & a \\ c & b \end{array},\quad B\alpha\gamma:\ \begin{array}{|cc|} c & d \\ b & a \end{array},\quad B\alpha^2\gamma:\ \begin{array}{|cc|} b & c \\ a & d \end{array}$$

$$B\alpha^3\gamma:\ \begin{array}{|cc|} a & b \\ d & c \end{array}.$$

此外，还有:

$$B\gamma_1:\ \begin{array}{|cc|} b & c \\ a & d \end{array},$$

从而 $B\gamma_1 = B\alpha^2\gamma$，也就是说对 B 施行变换 γ_1 与对 B 施行 $\alpha^2\gamma$ 是一样的. 因为 B 是任意的，故把这一事实记为 $\gamma_1 = \alpha^2\gamma$. 今后在遇到 γ_1 的场合就可用 $\alpha^2\gamma$ 去代替. 同理，由: