微积分学习指导

许莼舫编

中国青年出版社

微积分学习指导

许 莼 舫 编

中国青年出版社

内容提要

本书是作者生前编著的最后一部书稿，由于文化大革命开始，我社停止出书业务，当时未及出版。目前，新的中学数学教学大纲中规定，高中要讲授微积分初步知识，本书正好供给高中学生和同等程度的工农兵青年在学习微积分时作参考用，因此重新整理出版。

本书贯彻理论联系实际以及形和数相结合的原则，尽量从具体事例或直观图形出发，引出抽象概念，并着重指导读者把知识应用于解决实际问题。为了帮助读者明确概念，巩固知识，本书力求叙述简明，深入浅出，分散难点，提供注意事项，使读者在学习中减少困难，获得良好效果。

微积分学习指导

许莼舫 编

*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092 1/32　7.25印张　120千字

1980年7月北京第1版　1980年7月北京第1次印刷

印数 1—250,000 册　　定价 0.50 元

编 者 的 话

微积分是现代数学的基础，对于科学研究和生产技术的发展都起着重要的作用，我们如果掌握了它的基础知识，就能更好地学习现代自然科学和工程技术，攀登科学高峰.

为了帮助青年们对微积分这一数学分支的内容加深理解，并且帮助他们总结要点、明确概念、巩固知识，就编写了这一本书. 希望读者通过本书，能够得到启发，在学习中减少困难，获得良好效果.

书中取材仅是微分和积分的基本知识，并未涉及比较高深的部分. 目的是让读者用来作为入门的阶梯，读者如果能把这部分知识掌握好，那末进一步学习微积分的其他内容就没有困难了.

本书力求贯彻理论联系实际的原则，各种重要概念尽可能从自然科学和生产技术中的具体问题出发，并且在经过分析综合，归结到抽象形式以后，再和较多的实际问题结合起来，使我们一方面能把这些概念巩固，另一方面又看到了它们在实践中应用的例子.

为了照顾到一般读者的接受能力，本书对于暂时不必要的纯粹理论性的内容，尽可能作了精简；而对于某些基本理论的繁琐证明，也予以省略，只举出了例证或直观易懂的图形

说明.

本书力求做到叙述简明扼要，内容深入浅出，尽量分散难点，提供学习注意事项，并且对于例题和研究题的选择、安排，注意照顾到典型性和完整性．但是，限于编者的业务水平，这些想要努力做到的一定做得还很不够，并且内容也可能有错误的地方，希望读者多加批评和指正．

本书初稿写成以后，蒙无锡市教师进修学院何莘畊同志详细加以校订，提供了许多宝贵意见和重要资料，特在这里向他表示诚挚的感谢．

许莼舫

1965年10月

目　次

第一章　极限的理论

一　引言

初等数学是在很早的时代就发展起来的，它的主要研究对象是常量，所以叫做“常量的数学”．在16世纪到18世纪间，由于生产力的逐渐发展，推动了科学技术的进步．微积分学就是在这一段时期里形成的，它是高等数学的一部分，以变量为研究对象，所以属于“变量的数学”，也就是“数学分析”中以极限运算为基础的一部分．

恩格斯在《反杜林论》中有两段话，大意是：数学本身由于研究变量而进入辩证法的领域；变量数学对常量数学的关系，和辩证思维对形而上学思维的关系是一样的；常量数学是在形式逻辑的范围内活动；变量数学是辩证法在数学方面的运用．

所以，我们学习微积分，不但可以为将来进一步学习科学技术和参加工农业生产打好基础，并且在学习过程中，还可以逐步培养我们的辩证唯物主义观点．

微积分的一切基本理论和运算法则，是建立在极限概念上面的，而在极限的理论中，又要用到常量、变量、函数、绝对值等基本概念．因此，我们在本章里把它们系统地复习一下，

讲一些有关的基本知识，我们学好了它，就为学习以下各章准备了良好的条件.

二　绝对值的性质

1. 对于任意的实数 a，有 $|a|=|-a|$.

2. 如果 $a>0$，那末 $|a|=a$.

3. 如果 $a=0$，那末 $|a|=0$.

4. 如果 $a<0$，那末 $|a|=-a$.

注意　$a<0$ 表示 a 是负数，显然这时候的 $-a$ 所表示的是正数.

5. 如果 $|a|<b$ （其中 $b>0$），那末 $-b<a<b$，即 a 在 $(-b, b)$ 这个开区间内（如图 1 的(i)，a 可以用数轴上粗线部分的一个点表示，但不包括用圈标出的两点）.

6. 如果 $|a|\leqq b$ （其中 $b\geqq 0$），那末 $-b\leqq a\leqq b$，即 a 在 $[-b, b]$ 这个闭区间内（如图 1 的(ii)，但这是 $b>0$ 时的情况，如果 $b=0$，那末 a 只能用原点表示）.

7. 如果 $|a|>b$ （其中 $b\geqq 0$），那末 $a<-b$，或 $a>b$ （如图 1 的(iii)，也是 $b>0$ 时的情况，如果 $b=0$，那末 a 可用数轴上除原点以外的点表示）.

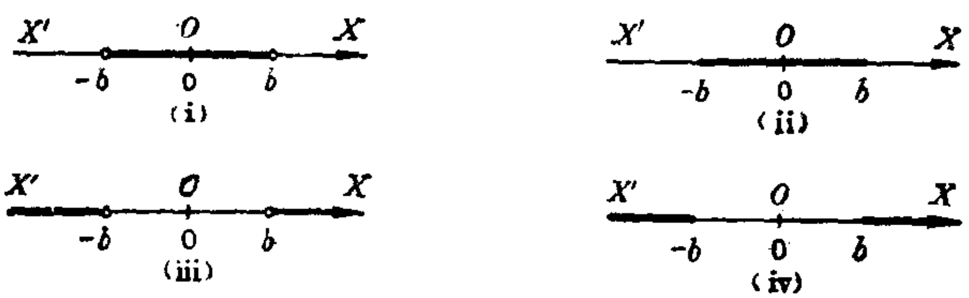

图 1.

8．如果$|a|\geqq b$（其中$b\geqq 0$），那末$a\leqq -b$，或$a\geqq b$（如图1的(iv)，同前，$b=0$时，a可用全数轴上任意一点表示）．

注 以上从2到8的各种性质，它们的逆命题也都是成立的．

9．对于任何正数或负数a，有$-|a|\leqq a\leqq |a|$．

说明 当$a>0$时，有$-|a|<a=|a|$；当$a<0$时，有$-|a|=a<|a|$；当$a=0$时，有$-|a|=a=|a|$．三式合写在一起，就得$-|a|\leqq a\leqq |a|$．

10．几个数的和的绝对值，小于或等于这几个数的绝对值的和，即

$$|a+b+c+\cdots+n|\leqq|a|+|b|+|c|+\cdots+|n|.$$

说明 由性质9可得$-|a|\leqq a\leqq|a|$，$-|b|\leqq b\leqq|b|$，$-|c|\leqq c\leqq|c|$，$\cdots$，$-|n|\leqq n\leqq|n|$，相加而得

$-(|a|+|b|+|c|+\cdots+|n|)\leqq a+b+c+\cdots+n\leqq(|a|+|b|+|c|+\cdots+|n|)$．再由性质6的逆定理，得

$$|a+b+c+\cdots+n|\leqq|a|+|b|+|c|+\cdots+|n|.$$

注意 很明显，当各项为同号时，上式中的等号成立；否则不等号成立．

11．两个数的差的绝对值，大于或等于这两个数的绝对值的差，即

$$|a-b|\geqq|a|-|b|.$$

说明 由性质10，得

$$|a|=|(a-b)+b|\leqq|a-b|+|b|.$$

移项，可得 $$|a-b|\geqq|a|-|b|.$$

12．几个数的积的绝对值，等于这几个数的绝对值的积，即

$$|abc\cdots n|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdots|n|.$$

说明 因为几个数的积的绝对值与各因数的符号无关，所以得上面等式．

13．两个数的商的绝对值，等于这两个数的绝对值的商，

但是除数不能是零，即当 $b\neq 0$ 时，有

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

说明　因为两数的商的绝对值与这两数的符号无关，所以得上面的等式.

14. 一个数的正整数次幂的绝对值，等于这个数的绝对值的同次幂，即

$$|a^n|=|a|^n.$$

说明　因为幂的绝对值与底数的符号无关，所以得上面的等式.

注意　因为任何数的偶数次幂总是正数，所以当 n 为偶数时，上式右边的绝对值记号可以省去，即 $|a^n|=a^n$.

三　函数

为了便于读者系统地理解，我们把有关函数的一些基本知识用“表解”的形式记述在下面.

自变量与函数：

【变量】　在研究过程中可以取不同数值的量.

【常量】　在研究过程中常保持同一数值的量.

〔绝对常量〕　无论在何种情况下，永远保持同一数值的量.

〔相对常量〕　在某一个问题中有同一的数值，而在另一个问题中又可以有不同数值的量.

例　宇宙间的各种现象，如飞机的速度、空气的温度、生物体的重量等，都是在不断运动、不断变化、不断发展着的(这是唯物辩证法的一个基本特征)，所以，宇宙间绝大多数的量都是变量. 又如圆周对于直径的比值是一个确定的数值 π，三角形三内角的和等于 $180°$，光的速度以及重力加速度等，它们都是常量，其中的前二例无疑是绝对常量，后二例因光速随介质而不同，重力加速度随地点而相异，所以都是相对常量.

注意一 因为在数学中我们舍去了各种量的具体性质，而只抽出它们的数值来讨论，所以变量常用变数来代替，常量也常用常数来代替．又本书讨论的数只限于实数．

注意二 区别变量和常量必须看问题的条件．例如火车在两站之间开行时，乘客的数目是常量，火车与某站间的距离是变量；但当火车停靠在车站时，乘客的数目成了变量，而火车与某站间的距离反成了常量．

注意三 变量与常量虽然是两个不同的概念，但是我们为了在某些问题的处理上得到方便，也可以把常量当作变量的特殊情形来看待．例如三角形的底边固定，顶点在平面内移动，那末这个三角形的面积一般是一个变量；但是如果顶点在平行于底边的一条直线上移动，那末三角形的面积就是一个常量．因此，我们把常量看作在变化过程中永远取同一数值的变量，也是很合理的．

注意四 变量所可取的数值，有时没有限制，有时有一定的范围．如果变量 x 的变化范围是 $a<x<b$，那末就是它在开区间 (a,b) 内变化；如果变量 x 的变化范围是 $a\leqq x\leqq b$，那末就是它在闭区间 $[a, b]$ 内变化；如果变量 x 的变化范围是 $a<x\leqq b$，或 $a\leqq x<b$，那末就是它在半开区间 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 内变化．

自变量与函数：

【自变量】 数值可以任意给定(但有时须在某一范围内)的变量是自变量．

【函数】 对于自变量的每一个给定的值，如果另一个变量有确定的值和它对应，那么这一个变量叫做因变量，这因变量就叫做自变量的函数．

例 圆的半径 r 可以在一切正数的范围内任意给定，它是一个自变量；而圆周长 $C=2\pi r$ 随着 r 的给定，也就确定了它的数值，所以圆周长 C 是因变量，它是半径 r 的函数．这一个函数关系通常可以记作 $C=f(r)$．

注意一 当自变量取定某一数值以后，我们就不能对因变量给以任意的值，这说明宇宙间一切现象都不是孤立的，而是互相联系、互相依赖、互相制约着的(这是唯物辩证法的又一个基本特征)．象这样，一个变量要依赖着其他变量而存在，我们说它们是有"依从关系"的．

注意二 y是x的函数,可用记号$y=f(x)$, $y=F(x)$, $y=\phi(x)$等表示,其中的字母f、F、ϕ等所表的不是数量而是关系. 又当$x=a$时(a是常量),函数$f(x)$的值可用记号$f(a)$来表示.

注意三 由函数的定义,应该体会到:我们所要求的只是函数y的值应由自变量x的值来确定,而并不要求y必须随x的改变而改变. 因此,当自变量x取任意允许值时,可能函数y的值都相等,即y是一个常数k. 照这样说,$y=k$也表示一种函数关系.

函数的两种域:

【定义域】 如果自变量的值能使函数有符合题意的实数值,那么这些自变量的值,即它的一切允许值,叫做函数的定义域.

【值域】 在函数的定义域内,函数的一切确定的实数值,叫做函数的值域.

例 正方形的面积A与边长a的函数关系是$A=a^2$,这个函数的定义域是一切正数的集合,值域也是一切正数的集合,都可以记作$(0, +\infty)$. n边凸多边形的内角和S与边数n的函数关系是$S=(n-2)\cdot 180°$. 这个函数的定义域是等于或大于3的自然数的集合,值域是180°的正整数倍的集合. 函数$y=\frac{1}{x}$的定义域和值域都是$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$,或写成$x\neq 0$. 函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是$[-1, 1]$,值域是$[0, 1]$. $y=\sqrt{x^2-1}$的定义域是$(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$,值域是$[0, +\infty)$.

函数的第一种分类:

【正函数】 这是对"反函数"来说的,通常只叫做函数.

【反函数】 如果在某些条件下,第一变量是第二变量的函数,而第二变量也是第一变量的函数,那么,这两个函数互为反函数.

例 正方形的周长y是边长x的函数,即$y=4x$,那末边长也是周长的函数,即$x=\frac{1}{4}y$,后一函数是前一函数的反函数,但前一函数也可以称做后一函数的反函数. 按习惯,通常用x表自变量,y表函数,把后一关系写成$y=\frac{1}{4}x$.

函数的第二种分类:

【单值函数】 对于自变量的每一个给定的值,只有一个确定的函数值和它

对应.

【多值函数】 对于自变量的每一个给定的值，能有几个确定的函数值和它对应.

例 一般函数都是单值函数，例如 $y=x^2$ 等等．但是，$y=x^2$ 的反函数是 $y=\pm\sqrt{x}$，它有两个值，所以是多值函数.

注 本书只讲单值函数，对于多值函数我们把它分成几个单值函数来讨论.

函数的第三种分类：

【一元函数】 一个因变量由一个自变量来确定的，叫做一元函数或单变量函数.

【多元函数】 一个因变量由几个自变量来确定的，叫做多元函数或多变量函数.

例 球的体积 V 是半径 r 的函数，即 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，它是一元函数，可以记作 $V=f(r)$．圆柱的体积 V 是底面半径 r 与高 h 的函数，即 $V=\pi r^2h$，它是多元函数，记作 $V=f(r,h)$.

函数的第四种分类：

【直接函数】 这是对"复合函数"来说的，实际就是一般直接由自变量来确定的函数.

【复合函数】 如果 u 是自变量 x 的函数，即 $u=\phi(x)$，而把 u 看作自变量时，y 又是 u 的函数，即 $y=f(u)$，那末 y 也是 x 的函数，即 $y=f(u)=f[\phi(x)]=F(x)$．这时 y 叫做 x 的复合变量的函数，简称复合函数，实际就是 x 的函数的函数，而 u 叫做"中间变量".

例 求一个变量 x 的正弦的对数值 y，应该先求出 x 的正弦值 $u=\sin x$，再求出这个正弦值的对数值，即 $y=\lg u=\lg\sin x=F(x)$，这个 $F(x)$ 是复合函数．又在函数 $y=\sqrt{x^2+2}$ 中，如果以 x^2+2 为中间变量，用 u 来表示，即 $u=x^2+2=\phi(x)$，那末 $y=\sqrt{u}=\sqrt{\phi(x)}=f[\phi(x)]=F(x)$，它也是复合函数.

函数的第五种分类：

【显函数】 当包含 x 与 y 的方程已经就 y 解出时，y 是 x 的显函数.

【隐函数】 当包含 x 与 y 的方程没有就 y 解出时，y 是 x 的隐函数.

例 把方程 $2x-3y+4=0$ 就 y 解出，得 $y=\frac{2x+4}{3}$，用这个结果所表的是显函数；而用原方程或原方程的简单记号 $f(x,y)=0$ 所表的是隐函数.

函数的第六种分类：

【增(升)函数】 在给定的区间内，自变量逐渐增加时函数值也逐渐增加.

【减(降)函数】 在给定的区间内，自变量逐渐增加时函数值反而逐渐减少.

例 $y=x^2$ 与 $y=2^x$ 等都是增函数；$y=x^{-1}$ 与 $y=0.5^x$ 等都是减函数；而 $y=\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 等区间内是增函数，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 等区间内是减函数.

函数的第七种分类：

【代数函数】 对于自变量只作四则与乘方、开方的几种运算所成的函数.

〔有理函数〕 对于自变量不作开方运算的代数函数.

(有理整函数) 如 $y=x^2-3$, $y=2x^3-\frac{1}{2}x+\sqrt{5}$, $y=ax^2+bx+c$ 等.

(有理分函数) 如 $y=\frac{1}{x-1}$, $y=5x-1+\frac{1}{x}$, $y=\frac{x+3x^2}{4-x^2}$ 等.

【超越函数】 不属于代数函数的函数.

〔指数函数〕 如 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$.

〔对数函数〕 如 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq1)$.

〔三角函数〕 如 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ ①等.

〔反三角函数〕 如 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$ 等.

注意一 上表并不包括函数的全体，它只包括一部分初等函数.

注意二 幂函数中指数是整数或分数的属于代数函数；指数是无理数的属于超越函数. 幂函数与上面所举的四种超越函数总称做“基本初等函数”. 微积分学中最常见的函数都是由这五种基本初等函数组成的.

---

① 关于角 x 的正切和余切的符号，本书采用 $\tan x$ 和 $\cot x$，但有些书里用的是 $\mathrm{tg}\,x$ 和 $\mathrm{ctg}\,x$.

注一 关于函数的分类，另外还有依次数来分的一次函数（又叫线性函数）、二次函数、…；依图象的对称性来分的偶函数（关于纵轴为对称）与奇函数（关于原点为对称）．因为它们都很浅显，所以这里不再详细叙述．

注二 以上的各种分类，是从各种不同的角度来进行的．因此，对于同一个函数可以有许多看法，例如 $y=x^2-3$，它是代数函数，也可以看作单值函数、一元函数、二次函数、显函数、增函数等．

四 无穷大量与无穷小量

1．无穷大量 在变量 x 的变化过程中，如果对于预先给定的任意大的正数 A，总可以找到这样一个时刻，在这时刻以后永远有 $|x|>A$，那末我们就说变量 x 是无穷大量（或无穷大）．

例一 如图 2，设圆 O 的半径 $OA=1$，NM 是过 A 的切线．作直线 OT，与 OA 成锐角 θ（注意只限于锐角），交 NM 于 T．如果锐角 θ 逐渐增大（无论 θ 是正锐角或负锐角，只要使绝对值增大），并且设 AT 的长（即 $\tan\theta$ 的值）等于 x，那末 $|x|$ 也逐渐增大．我们预先任意给它一个数，例如 $\sqrt{3}$，那末就可以找到一个时刻，例如当 $|\theta|=60^\circ$ 时，$|x|=\sqrt{3}$，而在这时刻以后，永远有 $|x|>\sqrt{3}$．又如预先给定的数是 100，那末当 $|\theta|>89^\circ 26'$（arc tan 100 的近似值）时，永远有 $|x|>100$；预先给定的数是 1000，那末当 $|\theta|>89^\circ 57'$ 时，永远有 $|x|>1000$；…．因此，这个变量 x 是无穷大量．

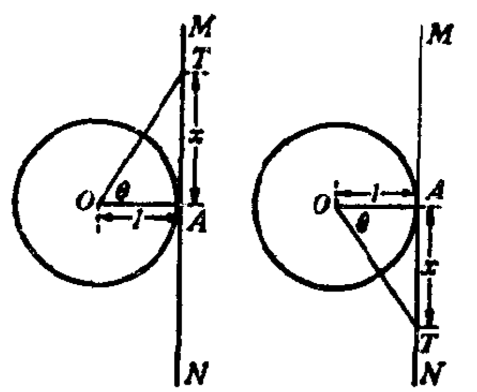

图 2.

例二 一个无穷等比数列 $1,2,4,8,\cdots,2^{n-1},\cdots$，它的通项公式是 $a_n=2^{n-1}$，由于 $a_n<a_{n+1}$，所以它是一个递增数列．当这个数列的项数 n 相当大的时候，

a_n 的值可以大于预先任意给定的正数 A. 例如 $A=1000$，我们设法求正整数 n 的值，使它适合不等式 $2^{n-1}>1000$. 因为 $2^9=512$, $2^{10}=1024$，所以当 $n-1>9$ 时，即 $n>10$ 时，$a_n>1000$. 这就是说，这个数列从第 11 项起，所有的各项(连第 11 项在内)都大于 1000. 又如 $A=10000$，我们由 $2^{13}=8192$, $2^{14}=16384$，知道当 $n-1>13$ 时，即 $n>14$ 时，$a_n>10000$. 这就是说，这个数列从第 15 项起，所有的各项(连第 15 项在内)都大于 10000. 照这样看来，一个变量 x 如果按照这个等比数列的各项顺次作递增变化，那末总可以找到这样一个时刻，在这时刻以后的 $|x|$ 永远大于预先给定的一个任意大的正数，所以这个变量 x 也是无穷大量.

如果无穷等比数列是 $-1, -2, -4, -8, \cdots, -2^{n-1}, \cdots$，或是 $1, -2, 4, -8, \cdots, (-2)^{n-1}, \cdots$，它们虽然不是递增数列(前者是递减数列，后者是摆动数列)，但是就绝对值来说，却都是递增的. 因此，凡是按照这几种数列的各项顺次变化的变量，也都是无穷大量.

注意一　在无穷大量的定义中，我们应该注意，是不是无穷大量决定于变量的绝对值，它是与符号无关的.

注意二　无穷大量是变量，它并不表达大小，而是描述变化状态的. 无穷大量的变化状态是它的绝对值愈变愈大，无限制地增大，要多么大就有多么大. 每一个无论有多么大的常量都不是无穷大量，我们如果把"无穷大"理解为"很大的数"(例如 10^{100}, 10^{1000} 等)，那就完全错了.

2. 无穷小量　在变量 x 的变化过程中，如果对于预先给定的任意小的正数 ε，总可以找到这样一个时刻，在这时刻以后永远有 $|x|<\varepsilon$，那末我们就说变量 x 是无穷小量(或无穷小).

例一　如图 3，圆 O 的半径等于 1，弦 AB 与圆心的距离是 OC. 当 OC 的长逐渐增大时，弦 AB 的长就逐渐减小. 我们预先任意给定一个小的正数，例如 0.1，因为 $OC=\sqrt{(OA)^2-(AC)^2}=\sqrt{1-(\frac{1}{2}\cdot AB)^2}$，而 $\sqrt{1-(\frac{1}{2}\times 0.1)^2}=\sqrt{0.9975}$，所以当 $OC=\sqrt{0.9975}$ 时，$AB=0.1$，在这时刻以后，就永远有