抽象代数基础

CHOUXIANG DAISHU JICHU

李恒沛 编著

国防工业出版社

抽象代数基础

李恒沛　编著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数基础/李恒沛编著. —北京:国防工业出版社,1996.1

ISBN 7-118-01459-1

Ⅰ.抽… Ⅱ.李… Ⅲ.抽象代数-基本知识 Ⅳ.0153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 05091 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 5 128 千字

1996 年 1 月第 1 版 1996 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—3000 册 定价:7.20 元

前　言

抽象代数(或称近世代数)和泛函分析、拓扑学一样，是近代数学重要分支之一。它不仅在内容与方法上，对于学习和研究现代数学起着重要的作用，而且对研究其他自然科学(如理论物理，理论化学)及工程技术(如计算机系统，信息工程)等都是不可缺少的工具。

本书是在编著者近几年编写讲义的基础上经过修改、补充而成的，旨在介绍抽象代数最基本的知识。

全书共有六章。第一章介绍集合、映射以及偏序集等的基本知识，这是学习本书的基础。第二章至第五章分别讲述了群、环、域与模四个代数系统。学习并掌握这部分内容是至关重要的，无论对一般数学工作者还是对其他有关科学工作者来说都是一样的。第六章介绍格的初步知识，为学习有关专业做些必要的准备。

抽象代数，顾名思义，抽象。为便于读者理解并增加感性认识，本书对每一重要概念都举出了一些例子说明。书中强调了代数系统本身(而不是该系统中的元素特性)以及不同代数系统之间的相互联系。此外，每章后面都配有一定数量的习题。

本书可作为理工科有关专业的教科书，也可作为有关科技工作者的参考书。由于编著者水平所限，本书有不妥之处，敬希读者指正。

最后，我要感谢北京航空航天大学李心灿教授、王日爽教授的关心和鼓励。感谢北京理工大学王朝瑞教授对原稿进行了仔细审阅并提出了许多修改意见，同时感谢该校张学莲教授的热情支持以及本书责任编辑的辛勤劳动。还要特别感谢顾红美高级工程师

自始至终的关怀和有力的协助。由于得到他们的理解、支持和帮助，这本书方得以问世。

编著者

内 容 简 介

本书介绍了抽象代数的基本知识。群、环、域、模、格等基本的代数系统的性质。本书取材适度，论证严谨，文字简洁，并配备一定数量的例题和习题。

本书可用作理工科专业的数学教材，也可供有关科技工作者参考。

目　录

第一章　基本概念

本章介绍的问题是：集合及其有关术语；映射、映射的类型及例子；代数运算的概念；等价关系与集合的分类；偏序集，佐恩(Zorn)引理。

映射是本章的重点，它在许多数学分支中都成为一个有力工具。等价关系在代数学中是一个重要概念，不宜忽略。序集的概念是近代数学中很重要的基本概念之一，应着重理解。

学习本章尽可能多掌握一些例子，引例以剖析概念，举例以熟练方法，其实这也是学习抽象代数的一种有效途径。

§1.1　集　　合

抽象代数研究的主要对象是所谓代数系统，即带有运算的集合。

集合论中的概念和方法是全部近代数学的基础。

集合是近代数学的最基本概念之一。它是由某种性质所确定的事物的总体。根据这种性质可以辨别任一事物属于或不属于这个集合。属于这个集合的事物，称为这个集合的**元素**。例如，坐标 x、y 满足不等式 $x^2+y^2<1$ 的点 (x,y) 的全体，组成坐标平面上的一个点的集合，而在单位圆 $x^2+y^2=1$ 内的每一个点，都是这集合中的元素。又如，定义在区间 $[0,1]$ 上的连续函数的全体，组成一个函数的集合，其中每一个连续函数，即为这个集合的一个元素。

通常用 $A,B,C\cdots$ 表示集合，而用 $a,b,c\cdots$ 表示集合的元素。若 a 为集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$；若 a 不为集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$。

一个集合，可以用列举法表示，例如集合 A 由元素 a,b,c,d 组成，即记为

$$A = \{a,b,c,d\}$$

也可以用构造法表示(通常都用这个方法)，即给出集合中元素满足的条件，或者说列出这集合所赖以确定的性质，例如

$$A = \{n \mid n \in Z, n > 0\}$$

表示集合 A 由自然数的全体所组成，其中 Z 表示整数集合。

有限个元素作成的集合称为**有限集合**；否则称为**无穷集合**。当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为有限集合 A 的全部元素时，就记以

$$A = \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

并称 A 为一个 ***n* 元集合**。

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 包含于 B，或称 A 为 B 的子集合(简称**子集**)，记为 $A \subseteq B$；若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$；若 $A \subseteq B$，且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$。

不含任何元素的集合称为**空集**，记以 $\varnothing$。例如满足 $x^2+1=0$ 的实数 x 就构成一个空集。为了方便，规定空集是任意集的子集。

设 A,B 为两集，则集 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**，记为 $A \cup B$(见图 1-1)；而集 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A \cap B$；集 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \overline{\in} B\}$ 称为 A 与 B 的**差集**，记为 $A \backslash B$。

由图1-1易见，$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$，$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$，

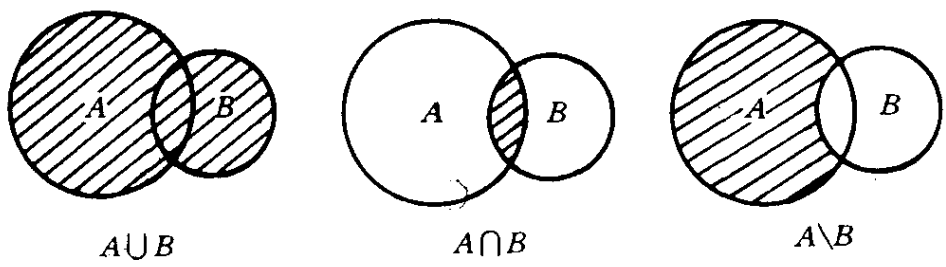

图 1-1

$A\backslash B\subseteq A$。

集的运算与普通算术的运算颇有相似之处，但并非完全一致，例如关系式 $A\cup A=A$ 及 $A\cap A=A$，在算术中是不成立的。关于集的并、交与差仅举下面关系式为例，以供读者参考。

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(2) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(4) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(5) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$

(6) 当且仅当 $B\subset A$，$(A\backslash B)\cup B=A$

在这里我们只证明(3)与(5)，其余证明留给读者。

(3)的证明：若 $x\in A\cap(B\cup C)$，则有 $x\in A$，$x\in B\cup C$，即 $x\in A$，且 $x\in B$ 或 $x\in C$，于是有 $x\in A\cap B$，或 $x\in A\cap C$。因此，知 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，所以有

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

若 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则有 $x\in A\cap B$，或 $x\in A\cap C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，或 $x\in A$ 且 $x\in C$。于是有 $x\in A$，$x\in B\cup C$。因此，知 $x\in A\cap(B\cup C)$，所以有

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$$

综合上述即得

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(5)的证明：若 $x\in A\cap(B\backslash C)$，则有 $x\in A$，$x\in B\backslash C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，$x\overline{\in}C$，于是有 $x\in A\cap B$ 且 $x\overline{\in}A\cap C$。因此，知 $x\in(A\cap B)\backslash(A\cap C)$，所以有

$$A\cap(B\backslash C)\subseteq(A\cap B)\backslash(A\cap C)$$

若 $x\in(A\cap B)\backslash(A\cap C)$，则有 $x\in A\cap B$，$x\overline{\in}A\cap C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，$x\overline{\in}C$，于是有 $x\in A\cap(B\backslash C)$。因此，知

$$(A\cap B)\backslash(A\cap C)\subseteq A\cap(B\backslash C)$$

所以可得

$$A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$$

在本节的末尾，我们再引入两个概念。

定义 1 设 A 为任意一个集合，则 A 的所有子集组成的集合称为 A 的**幂集**，记为 $P(A)$ 或 2^A，即

$$P(A) = \{X | X \subseteq A\}$$

例 1 设 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，则

$$P(A) = \{\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_2,a_3\},\{a_1,a_3\},A\}$$

由这个例子看出，A 含 3 个元素，$P(A)$ 就含 2^3 个元素。可以推出，若 A 含有 n 个不同的元素，则 $P(A)$ 就含有 2^n 个不同的元素。在这里应注意，$\varnothing \subset A$，而 $\varnothing \in P(A)$，两种写法截然不同。

定义 2 设 A,B 为两个集合，则称

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

为 A 与 B 的**笛卡儿积**。

$A \times B$ 中的两个元素 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 相等，即指 $x_1=x_2, y_1=y_2$。

例 2 设 $A=\{a,b\}, B=\{c,d\}$，则

$$A \times B = \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$$

容易看出，若 A 含有 m 个元素，B 含有 n 个元素，则 $A \times B$ 含有 $m \cdot n$ 个元素。若 A 为坐标平面的 x 轴上点的集合，B 为 y 轴上点的集合，则 $A \times B$ 为整个平面上点的集合。

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意 n 个集合，则称所有 n 元序列

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n), \quad a_i \in A_i, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

构成的集合为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积，记为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) | a_i \in A_i, i = 1,2,\cdots,n\}$$

§1.2 映　　射

映射是数学中重要的基本概念，是抽象代数中的基本工具。

定义 1 设 A 与 B 是两个非空集合。若存在一个规则 f，使得

对于每一个元 $x\in A$，唯一确定一个元 $y\in B$，则称这个规则 f 是从 A 到 B 的**映射**，记为

$$f:A\longrightarrow B$$

称元 y 是元 x 在映射 f 下的**象**，记为 $y=f(x)$，称元 x 是元 y 在映射 f 下的**原象**。映谢 f 的**定义域** $D_f=A$，**值域** $R_f\subseteq B$。

例 1 设 A 与 B 都是实数集(或其中的子集)，则

$$f:x\longmapsto \sin x \qquad (x\in A,\sin x=y\in B)$$

是 A 到 B 的一个映射。

例 2 设 A 是平面上所有圆组成的集合，B 是平面上所有点组成的集合，则

$$f:\text{圆}\longrightarrow \text{圆心}$$

是 A 到 B 的一个映射。

例 3 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3\}$，

$$f:a\longmapsto 1$$
$$b\longmapsto 2$$
$$c\longmapsto 3$$
$$d\longmapsto 3$$

则 f 是 A 到 B 的一个映射。

若令 $\varphi_1:a\longmapsto 3$

$$b\longmapsto 2$$
$$c\longmapsto 1$$

因为 A 中的 d 在 φ_1 之下没有象，所以 φ_1 不是 A 到 B 的映射。

再令 $\varphi_2:a\longmapsto 3$

$$b\longmapsto 3$$
$$c\longmapsto 2$$
$$d\longmapsto 2$$
$$d\longmapsto 1$$

因为 A 中的 d 在 φ_2 之下有两个象 2 与 1，所以 φ_2 不是 A 到 B 的映射。

例 4 设 $A=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a\in R\right\}$，　$B=R$(实数集)

$$f:\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\longmapsto a$$

则 f 是 A 到 B 的一个映射。

定义 2　设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果$\forall\ a,b\in A$，当 $a\neq b$，有 $f(a)\neq f(b)$，那么称 f 是 A 到 B 的一个**单射**(injection)；如果 $\forall\ b\in B,\exists\ a\in A$，使 $f(a)=b$，那么称 f 是 A 到 B 的一个**满射**(surjection)；如果一个映射 f，既是单射，又是满射，那么就称之为**双射**(bijection)。

A 到 B 的**单射**也称为 A 到 B 内的**一对一映射**，**满射**也称为 A 到 B **上的映射**，**双射**也称为 A 到 B **上的一对一映射**。

例 5　设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4\}$

$$f:a\longmapsto 1,b\longmapsto 2,c\longmapsto 3$$

则 f 是 A 到 B 的单射。

例 6　设 $A=Z$，$B=\{x\mid x\in Z,x>0\}$，

$$f:n\longmapsto |n|+1$$

则 f 是 A 到 B 的满射。

例 7　设 $A=B=Z$，

$$f:n\longmapsto n+1$$

则 f 是 A 到 B 的双射。

例 8　如果变更例 5 中的映射为

$$f:a\longmapsto 1,b\longmapsto 1,c\longmapsto 2$$

那么 f 既不是单射，又不是满射，但它是 A 到 B 的一个映射。

若 f 是 A 到 A 的映射，$\forall\ a\in A$，有 $f(a)=a$，则称 f 为 A 上的**恒等映射**(或称**单位映射**)，记为 I_A。

两个映射 $f_1:A_1\longrightarrow B_1$，$f_2:A_2\longrightarrow B_2$ 称为**相等**的，是指 $A_1=A_2$，$B_1=B_2$，且$\forall\ a\in A_1$，有 $f_1(a)=f_2(a)$，记为 $f_1=f_2$。

定义 3　设有集 A,B,C，映射 $f_1:A\longrightarrow B$，$f_2:B\longrightarrow C$，由 f_1,f_2 确定的 A 到 C 的映射 $f_3:a\longmapsto f_2(f_1(a))$，$\forall\ a\in A$，称为映

射 f_1, f_2 的**合成**，记为 $f_3 = f_2 \circ f_1$，即 $f_3(a) = f_2(f_1(a))$。

可以证明，映射的合成适合结合律等性质。

定理 1 设映射 $f_1: A \longrightarrow B, f_2: B \longrightarrow C, f_3: C \longrightarrow D$，则有

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$$

证 由设知映射 $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ 与 $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ 都是由 A 到 D 的映射。并且，$\forall\, x \in A$，有

$$[f_3 \circ (f_2 \circ f_1)](x) = f_3[(f_2 \circ f_1)(x)] = f_3[f_2(f_1(x))],$$

$$[(f_3 \circ f_2) \circ f_1](x) = (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = f_3[f_2(f_1(x))]$$

即

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$$

定义 4 设映射 $\varphi: A \longrightarrow B$，若存在映射 $\psi: B \longrightarrow A$，使 $\psi \circ \varphi = I_A, \varphi \circ \psi = I_B$，这里 I_A, I_B 分别是 A 与 B 上的恒等映射，则 ψ 称为 φ 的**逆映射**。若映射 φ 有逆映射，则称 φ 为**可逆映射**。

定理 2 设映射 $f: A \longrightarrow B$，若 f 有逆映射(记为 f^{-1})，则必是唯一的。

证 若映射 f 有两个逆映射，$g: B \longrightarrow A, h: B \longrightarrow A$，则有 $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B, h \circ f = I_A, f \circ h = I_B$。于是可得

$$h = h \circ I_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = I_A \circ g = g$$

定理 3 映射 $f: A \longrightarrow B$ 是双射当且仅当 f 为可逆映射。

证 设 f 是双射，$\forall\, b \in B, \exists\, a \in A$，使 $f(a) = b$。规定映射 $g: B \longrightarrow A, g(b) = a$，于是 $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$，即 $f \circ g = I_B$。又 $\forall\, a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$，即 $g \circ f = I_A$。所以，$g = f^{-1}$，即 f 为可逆映射。

设 f 为可逆映射，即 $\exists$ 映射 $f^{-1}: B \longrightarrow A$。若 $\forall\, a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2)$，则有

$(f^{-1} \circ f)(a_1) = (f^{-1} \circ f)(a_2)$，从而 $a_1 = a_2$。因此 f 为单射；又 $\forall\, b \in B$，若 $f^{-1}(b) = a$，则 $f(a) = f(f^{-1}(b)) = b$。因此 f 为满射。所以，f 是双射。

定义 5 集 A 到其自身的映射，称为 A 的**变换**；A 到其自身的双射，称为 A 的**一一变换**；当 A 为**有限集**时，A 的一一变换称为

置换。

A 的一切变换所构成的集，记为 A^A。

§1.3 代数运算

前面说过，我们要研究带有运算的集合，为此，先来定义代数运算的概念。

设 A,B 为两个集合，考察笛卡儿积 $A\times B$ 与另一集合 C。

定义 1 $A\times B$ 到 C 的映射，称为 A 与 B 到 C 的一个**代数运算**。

据定义，一个代数运算只是一种特殊的映射。这就是说，若有一个 $A\times B$ 到 C 的代数运算，则由定义，$\forall\ a\in A,b\in B$，经过这个代数运算，得 $c\in C$。这里用“$\circ$”表示代数运算，沿用前面的记号，可写为

$$(a,b)\longmapsto c=a\circ b$$

例 1 设 A 为整数集，B 为非零整数集，C 为有理数集，则$\forall\ a\in A,b\in B,\exists\ \frac{a}{b}\in C$。

于是 $$\circ:(a,b)\longmapsto\frac{a}{b}=a\circ b$$

为一个 $A\times B$ 到 C 的代数运算，这就是寻常所说的除法运算。

例 2 设 V 是数域 F 上的一个向量空间，有 $\lambda\in F$，$a\in V$，$\lambda a\in V$，则

$$\circ:(\lambda,a)\longmapsto\lambda a=\lambda\circ a$$

为一个 $F\times V$ 到 V 的代数运算。

例 3 设 $A=\{1,2\},B=\{1,2\},C=\{$奇，偶$\}$

则 $$\circ:(1,1)\longmapsto\text{奇},(2,2)\longmapsto\text{奇}$$
$$(1,2)\longmapsto\text{奇},(2,1)\longmapsto\text{偶}$$

为一个 $A\times B$ 到 C 的代数运算，或记为运算表

∘	1	2
1	奇	奇
2	偶	奇

$A\times B$ 到 C 的一般代数运算使用较少，通常用到的代数运算多是 $A\times A$ 到 A 的代数运算。施行这样的代数运算，所得结果还是在 A 里面。于是有定义 2。

定义 2 若 ∘ 是一个 $A\times A$ 到 A 的代数运算，则称集合 A 对于代数运算 ∘ 来说是**封闭的**（或说，∘ 是 A 的代数运算，也称**二元运算**）。

例 4 设 $A=\{1,2,3,4\}$，A 的代数运算 ∘ 由表 1-1 给出。

表 1-1

∘	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

仿照二元运算，可定义 n 元运算。

设 A 是一个非空集合，$A\times A\times\cdots\times A$（$n$ 个 A 的笛卡儿积，n 为自然数）到 A 的映射，称为 A 的 n **元运算**。

§1.4 等价关系 集合的分类

一个映射在两个集合之间建立了联系，利用这种联系对这两个集合进行比较，经过比较来推测它们的性质。除此之外，有时也要把一个集合分成若干个子集加以讨论。这时就要用到集合的分类这个概念，而这个概念又是和“等价关系”密切相关的。

设集合 A，$\forall\, a,b\in A$，都可以明确地判断 a 和 b 在 A 内有关