结构稳定理论

唐家祥　王仕统　裴若娟

中国铁道出版社

工程实际中的应用。这本书对从事实际工作的工程师来说，也是有帮助的。

本书的起点知识是“材料力学”与“结构力学”，适合于大学高年级学生、研究生和技术人员阅读。可作为土木工程、工程力学专业大学本科“结构稳定”课程的教材或教学参考书，采用本书作为研究生教材或教学参考书也是合适的。无论作为那一层次的教材，都没有必要把全部内容纳入课堂讲授。对于大学生，以前四章为主，对于研究生，以后四章为主，这样安排内容似乎比较恰当。

王仕统编写了本书的第一、二、五章，裴若娟编写了第三、四章，唐家祥编写了第六、七、八章。全书由唐家祥主编。

作者要感谢华中理工大学、华南理工大学两校的同事、研究生和同学们，他们为本书提出过宝贵意见。

编　者

1989年5月于华中理工大学

结构稳定理论

唐家祥　王仕统　裴若娟

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑　王能远　封面设计　安宏

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 $\frac{1}{16}$　印张：17.5　字数：402 千

1 9 8 9 年10月　第1版 第1次印刷

印数：1—2200 册　定价：7.20元

序

这本书是在华中理工大学土木系唐家祥、裴若娟、华南理工大学土木系王仕统历年来开设的“结构稳定”课程讲义的基础上编写的。其目的是为大学高年级学生的课堂教学以及他们毕业后的继续学习提供一本教材或参考书。

第一章讲轴心压杆屈曲。详细分析了弹性屈曲、大挠度、动态分析、初始缺陷和非弹性屈曲等基本理论。第二章对几种传统的近似计算方法，包括变分法、瑞利-里兹法、伽辽金法、逐步近似法、组合法、差分法等进行了深入讨论。第三、四、五、六、七章介绍怎样把前两章的基本理论用来解决梁柱、构架、板和圆柱壳体的屈曲问题。通过这些章节的学习，一方面深化对理论的熟悉和理解，另一方面初步掌握把理论与实际结合起来。第八章用较大篇幅专门论述结构稳定分析的近代方法——矩阵分析方法，说明了矩阵分析方法计算结构临界荷载的理论；推导出杆、梁、薄壁构件、板单元的几何刚度矩阵与弹性刚度矩阵，详细介绍了把矩阵分析方法与电子计算机配合使用时所必需的知识：结构刚度矩阵一维数组存贮、求屈曲荷载的逆幂法与荷载增量法等等。讨论并列出了用矩阵分析方法解决复杂结构稳定问题的多个电算子程序，为读者在实际工作中应用所学理论提供了条件。

作者对基本理论十分重视，用了相当篇幅详细地去阐述这些内容，并通过较多的例题和习题帮助读者消化、吸收它们。同时，又尽力把理论与实际结合起来，说明理论结果在

目　　录

第一章　轴心压杆的屈曲

1.1 概　　述

屈曲，即丧失平衡形式的稳定性，也称失稳。

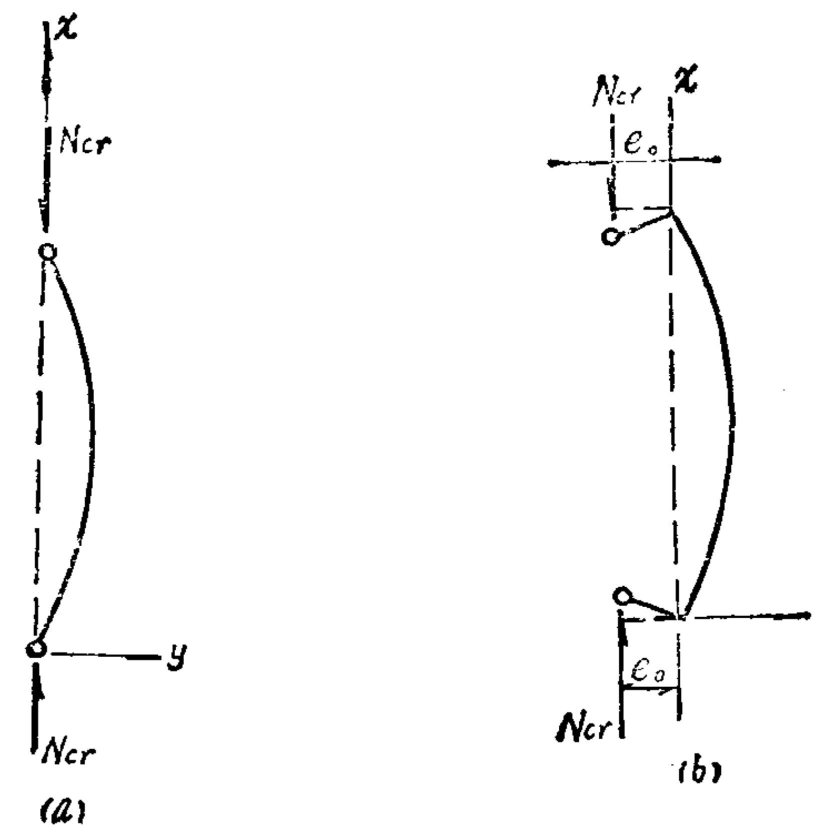

图 1—1

压杆（柱子）包括轴心受压杆和偏心受压杆（图1—1）。前者屈曲时，杆的外形由挺直状态变为微弯状态，即内力与平衡形式发生了质的变化；而后者是：一旦加载，柱子马上弯曲，只是屈曲时弯曲曲率较大而已，内力与平衡形式没有质的变化，只有内力和变形数量的增加。因此，一般可将稳定问题分为两类：

第一类稳定问题（质变失稳）——结构屈曲前的平衡形式成为不稳定，出现了新的与屈曲前平衡形式有本质区别的

平衡形式，结构的内力和变形都产生了性质上的突然性变化。除图1—1a的轴心压杆外，还有图1—2所示的结构。

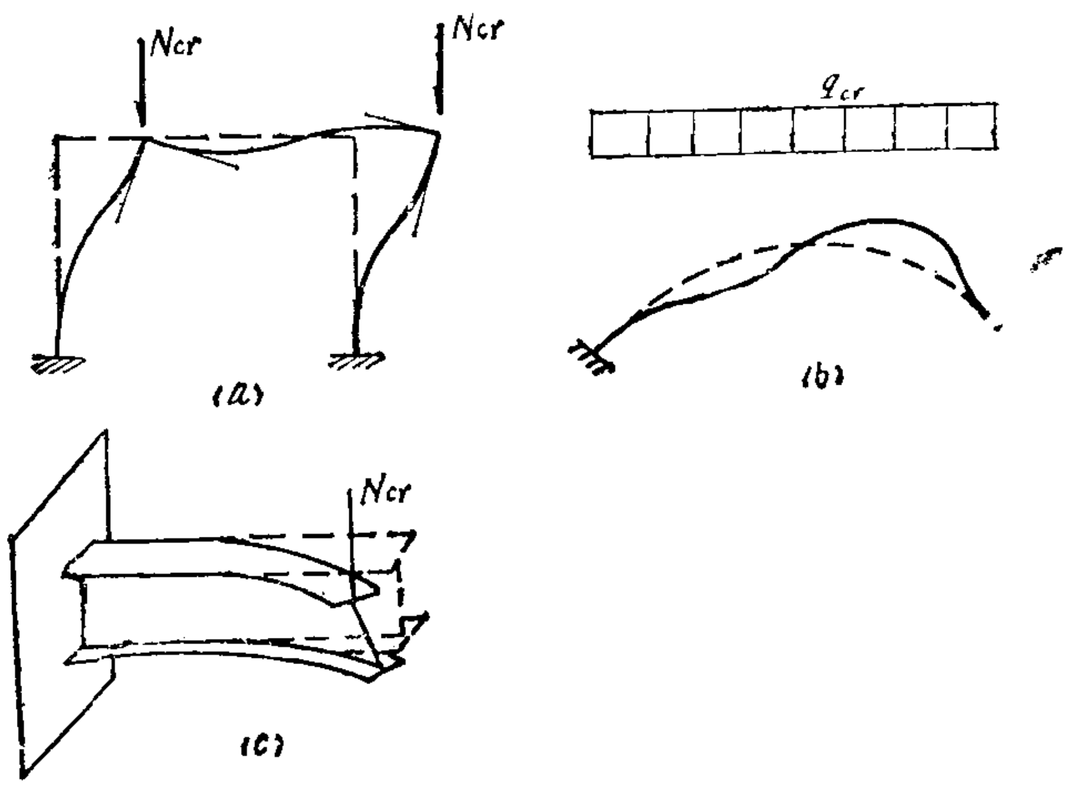

图 1—2

第二类稳定问题（量变失稳）——结构屈曲时，其变形将大大发展（数量上的变化），而不会出现新的变形形式，即结构的平衡形式不发生质变，如图1—1b所示。

本章就从轴心受压杆说起，至于偏心压杆问题，将在1.8节中讨论。

轴心压杆的受力性能和许多因素有关，它的屈曲变形可能有三种形式：（1）弯曲屈曲（截面绕一主轴回转）；（2）扭转屈曲（截面绕杆轴扭转）；（3）弯扭屈曲（弯曲变形的同时伴随有扭转变形）。轴心压杆可能出现什么样的屈曲形式，主要取决于它的截面形式、尺寸、压杆长度和杆端的约束条件。1.2～1.10节将对屈曲的第1种形式——弯曲屈曲进行分析，第2、3两种屈曲形式在1.11节中讨论。

对于细长的压杆，当轴向荷载较小时只产生轴向压缩变形。此时，如有一微小横向干扰，杆就发生微弯。然而，一旦解除干扰，杆会立即恢复到原来的直线状态，这表明杆的直线状态的平衡是稳定的。当荷载增加到某一数值N_{cr}时，就可能出现这样的局面：微小的干扰使杆微弯后，再撤去此干扰，杆仍然保持在微弯状态而不恢复到直线位置（图1—1a），这就意味着除了直线形式的平衡位置外，还存在微弯状态下的平衡位置。外力和内力的平衡是随遇的，叫随遇平衡或中性平衡（*Neutral Equilibrum*）。当轴向荷载N稍大于N_{cr}，如，$N=1.02N_{cr}$时，微小的干扰将使杆产生急剧发展的弯曲变形，从而导致构件破坏。此时，直线状态的平衡是不稳定的。这个现象，称作构件屈曲（*Buckle*）或叫丧失稳定。

随遇平衡状态是从稳定平衡过渡到不稳定平衡的一个临界状态，故称随遇平衡状态时的荷载N_{cr}为临界荷载（*Critical Load*）。不难看出：轴心压杆的临界荷载是使构件在直的和微弯的两种形态下都能保持平衡的荷载。这就是所谓平衡的二重性准则。这一准则不仅适合于轴心压杆，对于所有属于第一类稳定问题的结构都是适用的。

读者可能会问：直的受压柱子为什么会突然变弯呢？关于这个问题，萨瓦多里与赫勒在《建筑结构》一书[30]中有一段精辟的论述："一根细长柱子，在端部荷载作用下受压时，它要缩短。与此同时，荷载位置降低。荷载要降低它的位置的趋势是一个基本的自然规律。每当在不同路线之间存在着一种选择的时候，一个物理现象将按照最容易的路线发生，这是另一个基本的自然规律。面临弯出去还是缩短的选择，柱子发现：在荷载相当小的时候，缩短容易一些；当荷载大到某一数值时，弯出去比较容易。换句话说，当荷载达

到它的临界值时，用弯曲的办法来降低荷载位置比用缩短的办法更容易些。”

研究屈曲问题的主要内容是确定临界荷载。计算临界荷载的方法，一般采用静力法和能量法。为了简明阐述两种方法的实质，先忽略杆本身的变形，即令 $EI=\infty$，则图1—3所示的体系只是具有一个变形自由度——单自由度体系。

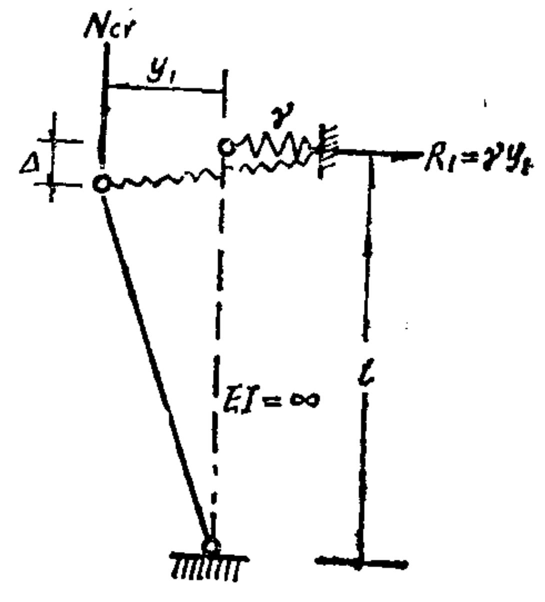

图 1—3

一、静　力　法

用静力法求临界荷载，是根据结构屈曲时的平衡二重性准则进行的。首先假设结构在新的弯曲形式的位置上维持平衡（图1—3），从而得到弯曲平衡状态的静力平衡方程：

$$N_{cr}y_1-R_1l=0 \tag{a}$$

式中　R_1是弹簧反力

$$R_1=\gamma y_1 \tag{b}$$

γ——弹簧的刚度系数。

把（b）式代入（a）

$$(N_{cr}-\gamma l)y_1=0 \tag{1.1}$$

式(1.1)是以位移y_1为未知数的齐次方程。如果$N_{cr}-\gamma l\neq 0$，则$y_1=0$（即零解）是齐次方程（1.1）的唯一解。其力学概念是：原始的直线平衡形式是体系的唯一平衡形式。如果$N_{cr}-\gamma l=0$（特征方程），则除零解外，方程（1.1）还有非零解，也就是说，除原始平衡形式外，体系还有新的弯曲平衡形式。这时，体系的平衡形式不止一种，

即具有二重性。这就是体系处于临界状态的静力特征。

由特征方程可求出临界荷载：

$$N_{cr}=\gamma l \tag{1.2}$$

二、能 量 法

图1—3的弹簧应变能U及荷载势能V分别为：

$$U=\frac{1}{2}R_1y_1=\frac{1}{2}\gamma y_1^2 \tag{a}$$

$$V=-N\Delta \tag{b}$$

由于

$$\Delta=l-\sqrt{l^2-y_1^2}=l-l\sqrt{1-y_1^2/l^2}$$

$$\approx l-l\left(1-\frac{y_1^2}{2l^2}\right)=\frac{y_1^2}{2l} \tag{c}$$

（b）式变成

$$V=-N\cdot\frac{y_1^2}{2l} \tag{d}$$

总势能Π可由式（附1—1）求得：

$$\begin{aligned}\Pi&=U+V\\&=\frac{1}{2}\gamma y_1^2-N\frac{y_1^2}{2l}=\left(\frac{\gamma l-N}{2l}\right)y_1^2\end{aligned} \tag{1.3}$$

式（1.3）表明，总势能Π是位移y_1的二次函数，且与系数$\left(\frac{\gamma l-N}{2l}\right)$有关。对此作如下讨论：

（1）如果$\frac{\gamma l-N}{2l}>0$，即$N<\gamma l$，则当$y_1\neq 0$时，Π为正值，体系是正定的（图1—4a）。对于正定体系，当$y_1=0$时（即体系处于原始的直线平衡状态），总势能Π为极小值。再从力的平衡上分析，因为$\gamma l-N>0$，使杆件偏离原始平衡位置的力矩$M_1=Ny_1$，将小于使杆件恢复到原始平衡位置的力矩$M_2=\gamma ly_1$。体系的直线平衡状态无疑是

稳定的。这就是最小总势能原理：对于稳定平衡状态，真实位移使总势能Π为极小值。

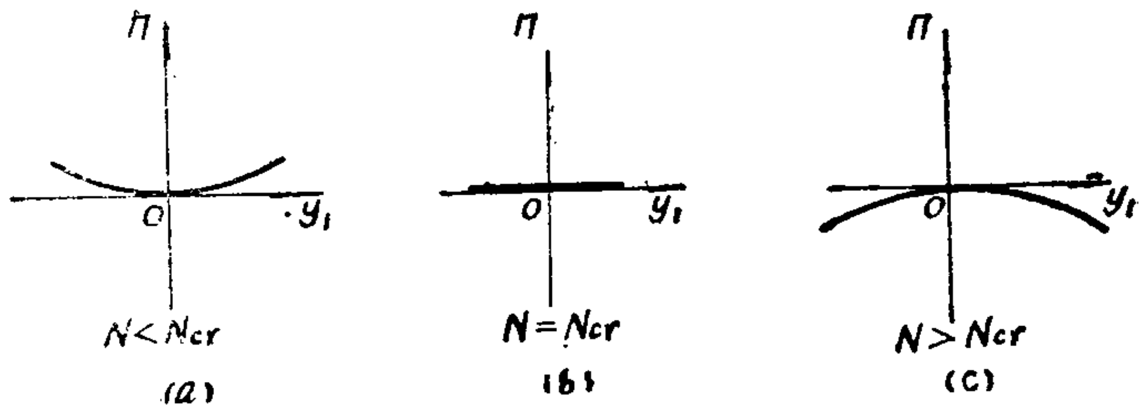

图 1—4

（2）如果$N>\gamma l$，则当$y_1\neq 0$时，Π为负值，称体系是负定的（图1—4c），当体系处于原始平衡状态，即$y_1=0$时，总势能为极大，体系处于不稳定的平衡状态。

（3）如果$N=\gamma l$，即$\Pi=0$时，体系处于随遇平衡状态（图1—4b），此时的荷载就称为临界荷载，即：

$$N_{cr}=\gamma l$$

用能量法获得的上述结果与式（1.2）给出的相同。

顺便指出，图1—4所示变形体系的三类平衡状态（稳定、随遇、不稳定）的能量特征与图1—5所示刚性小球的三类平衡状态的特征彼此对应。

图 1—5

1.2 欧 拉 柱*

对于弯曲屈曲，我们先从最简单的欧拉柱开始。

欧拉柱是假定由同一材料制成的等截面压杆，此外，再作如下四条假定：

（1）杆端简支，横截面双轴对称，屈曲时不发生扭转；

（2）杆轴理想挺直，荷载沿形心轴作用，且杆内无初应力；

（3）材料服从虎克定律：$\sigma=E\varepsilon$；

（4）临界状态时，弯曲变形足够微小，可以认为曲率：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}\approx y''$$

在第（3）假定下的屈曲，称为弹性屈曲。

根据平衡二重性准则，临界荷载是使微弯形式的平衡（图1—6a）成为可能的荷载。如果坐标轴选取如图所示，取微弯压杆x处截面以下的杆段（图1—6b）为分离体。

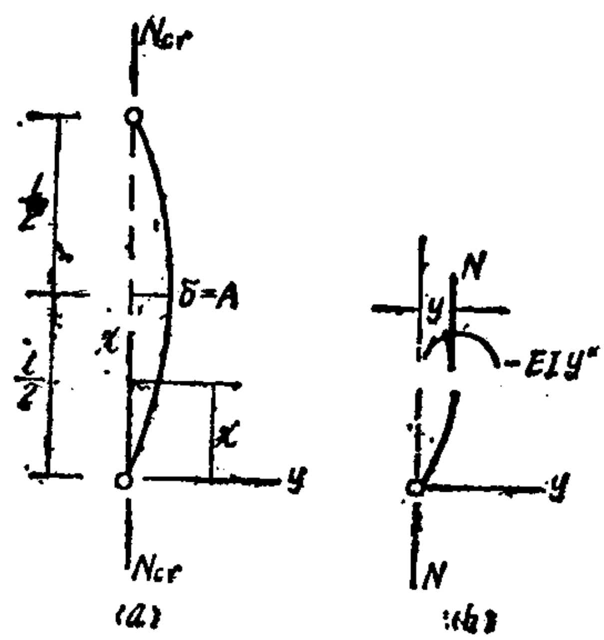

图 1—6

随遇平衡时，截面的内力矩应等于外力矩：

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=Ny \tag{1.4}$$

*欧拉（L. Euler. 1707～1783年），俄国著名数学家。1744年，欧拉首先提出了精确的柱子稳定理论。事实上，欧拉在他1759年的著名论文中分析的是一端固定、另一端自由的柱子。

令： $$k^2=\frac{N}{EI} \tag{1.5}$$

则式（1.4）化为：

$$y''+k^2y=0 \tag{1.6}$$

式（1.6）是常系数二阶线性齐次常微分方程，其通解为：

$$y=A\sin kx+B\cos kx \tag{1.7}$$

式中，未知常数 A、B 由边界条件确定。欧拉柱的边界条件是：

当 $x=0$ 时， $y=0$

$x=l$ 时， $y=0$

代入（1.7）式，可得含 A、B 的齐次方程：

$$\left.\begin{aligned}&0+B=0\\&A\sin kl+B\cos kl=0\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

齐次方程（1.8）的一组解答是 A、B 均为零。于是，由式（1.7）可得 $y=0$，压杆保持直线状态。这与干扰撤去后压杆仍停留在微弯状态的前提不符。为了确定引起新的弯曲平衡形式的临界荷载，这就要求 $y\neq0$，即未知常数 A、B 不能全为零。欲满足这个条件，只有令未知常数 A、B 的系数行列式等于零，即：

$$\begin{vmatrix}0 & 1\\ \sin kl & \cos kl\end{vmatrix}=0 \tag{1.9}$$

式（1.9）被称为特征方程或稳定方程。展开后可得：

$$\sin kl=0$$

可见：

$$kl=n\pi$$

其中：$n=1$，2，……。把这个式子代入式(1.5)与(1.7)，得：

$$N=\frac{n^2\pi^2EI}{l^2} \tag{1.10}$$

$$y = A\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1.11}$$

在式（1.10）给定的荷载作用下，柱子能够以微弯形式处于平衡。

令 $n=1$，得使随遇平衡成为可能的最小荷载：

$$N_{min} = N_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{1.12}$$

这个荷载称为欧拉荷载，用记号N_e表示，它是理想的两端铰支中心受压柱子终止其直线稳定平衡的最小荷载，又称临界荷载。式（1.12）被称为欧拉公式。

临界荷载有时也称作屈曲荷载。霍夫[63]建议对这两个名词加以区别：按线性理论使理想柱子达到随遇平衡时的荷载称为临界荷载，使非理想柱子弯曲变形无限增加或失去继续抵抗弯曲变形能力的荷载叫屈曲荷载，显然，上面得到的欧拉荷载应该是临界荷载。

与式（1.12）欧拉荷载对应的变形形式为：

$$y = A\sin\frac{\pi x}{l}$$

我们称它为屈曲模态。由于A值是不能确定的，所以屈曲模态的幅值也是不定的。

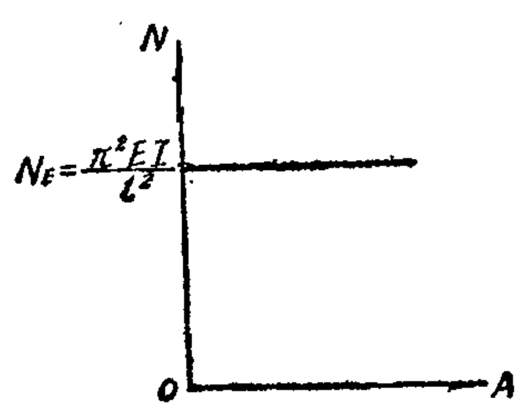

图 1—7

图1—7描述的欧拉柱的特性可以概括如下：$N<N_{cr}$时，柱子保持直线状态；$N=N_{cr}$时，出现平衡分枝，即柱子既可以保持直线状态的平衡，也能采取一个不定幅值的弯曲变形平衡形态。不定幅值的出现，是由于在建立图1—6所示静力平衡方程时，采用了$\frac{1}{\rho}\doteq y''$，从而得微分方程线性化的结果。

以小变形为基础的柱子屈曲理论，称为线性柱子理论。

式（1.10）中n大于1的值，将被看作是方程(1.6)的正确数学解，但对于稳定问题所发生的物理现象没有实际意义。

1.3 弹性支承轴心受压杆

大多数实际结构中，压杆的端部既不是铰支也不是固定。通常，压杆与其它构件联结着，后者允许压杆端部作有限的转动或平动，这类支承称为弹性约束支承。这样称呼它们，是因为出现在压杆端部的约束与该压杆周围构件的弹性性质有关。

一、下端固定上端有弹性约束的压杆

图1—8a示出的体系，当压杆AB失稳时，由于横梁BC的弹性压缩（或伸长），压杆上端B可视为一个弹簧（图1—8b）。

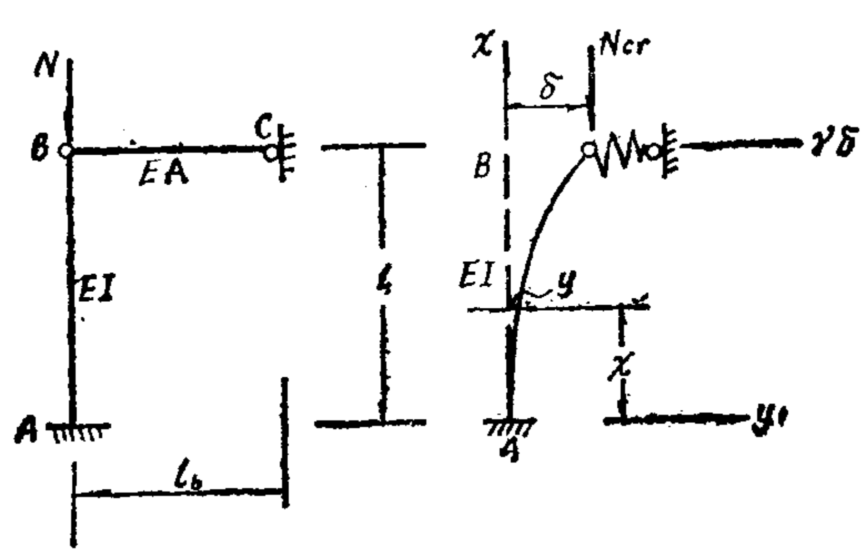

图 1—8

1. 一般解答

设压杆AB屈曲时横梁压力为N_{BC}，横梁的应力应变关系由虎克定律$\sigma=Ee$给出：