青年自学丛书

数学

QINGNIAN ZIXUE CONGSHU

第一册

内蒙古人民出版社

青年自学丛书

数 学

第一册

岳正仁 朱长山 戴春陶 高志懋 谢茂才 陈慕洲 编

内蒙古人民出版社

青年自学丛书

数　学

第一册

岳正仁　朱长山　戴春陶
高志懋　谢茂才　陈慕洲　编

内蒙古人民出版社出版　内蒙古新华书店发行

上海中华印刷厂排版　中国青年出版社印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张:15　字数 320 千字

1978 年 6 月第一版

1979 年 1 月第二版　1979 年 12 月第 2 次印刷

印数:137,281—337,480 册

统一书号:7089·41　　每册:1.25 元

出 版 说 明

为了贯彻党的十一大路线，适应广大城乡知识青年、在校学生和工农兵学习文化科学知识的需要，我社邀请一些有多年教学经验的大专院校和中学的教师，编写了一套青年自学丛书．这套丛书由数学(四册)、物理、化学、语文、政治常识问答和历史地理常识问答等单行本组成．目的是帮助读者经过自学达到高中毕业的水平，以便为实现四个现代化贡献更大力量．由于编辑水平有限，不足之处请读者批评指正．

内蒙古人民出版社

一九七八年二月

编 者 的 话

在以英明领袖华主席为首的党中央"抓纲治国"战略决策指引下，全国出现了大干快上的跃进局面. 我们这些多年战斗在教育战线的数学教师,深切感到形势逼人,愿为迅速实现四个现代化贡献自己更大的力量. 实现四个现代化，科学技术的现代化是关键，而数学是科学技术现代化必需的基础知识. 应内蒙古人民出版社的邀请，我们承担了青年自学丛书"数学"部分的编写任务.

本书分一、二、三、四册包括：数和式的基础知识,平面几何基础知识,立体几何基础知识,方程和不等式,函数及其图象,此外,还有数列极限、排列、组合与应用数学初步,复数,解析几何,微积分初步等等.

在编写过程中，我们本着加强基础理论，坚持理论联系实际，便于自学等原则，根据新的数学教学大纲精神，增加了新的内容. 在安排上注意了由浅入深、由易到难，在文字叙述上尽量做到简明扼要、通俗易懂，并配备了一定数量的例题和较多的习题，以利于培养读者分析问题和解决问题的能力.

由于我们思想水平不高，业务能力的局限，定稿时间紧迫，没有能够更广泛地征求意见,因此,书中一定有不少缺点甚至错误,恳切希望广大读者批评指正.

一九七八年二月于呼和浩特

目　录

第一章　数和式的基础知识

第一节　有　理　数

在算术里我们研究了整数、小数、分数及其四则运算. 但是在生产实践中遇到的许多计算问题，只有这些数是不够用的，这就要求我们进一步扩充数的概念并研究它们的运算规律.

一、有理数的意义

1. 正数和负数　在现实世界中，存在着各种相反意义的量. 如气温的零上 4°C与零下 4°C; 财政上的收入 200 元与支出 200 元; 水位的上升 5 分米与下降 5 分米等等. 对于这些具有相反意义的量，只用算术里学过的数是不能把它们反映出来的.

为了正确而又简便地表示出客观世界中具有相反意义的量，为了区别两种相反意义的量，我们把一种意义的量(例如表示零上、上升、收入的量)用带有符号“+”(读作正)的数来表示，而把相反意义的另一种量(例如表示零下、下降、支出的量)用带有符号“-”(读作负)的数来表示. 例如零上 4°C 记作+4°C，零下 4°C 记作-4°C; 收入 200 元记作 +200 元，支出 200 元记作 -200 元.

带有"＋"号的数叫做正数，在一般情况下，前面的"＋"号可以不写．带有"－"号的数叫做负数．在算术里我们学过的数，除零以外，都是正数．零既不是正数也不是负数．

引进了负数后，就可以把相反意义的两种量简明地表示并区别开来．在数的范围里比算术里的数增加了负整数和负分数．我们把正负整数、正负分数和零统称为有理数．

有理数
- 整数
  - 正整数(自然数)
  - 零
  - 负整数
- 分数
  - 正分数
  - 负分数

或

有理数
- 正有理数
  - 正整数
  - 正分数
- 零
- 负有理数
  - 负整数
  - 负分数

2．数轴、绝对值　在生产实践中，常常用直线上的刻度表示量的大小．例如用直尺的刻度表示量的长短；温度计的刻度表示温度的高低．从这些事实出发，经过科学的抽象，我们可以用直线上的点来表示有理数．

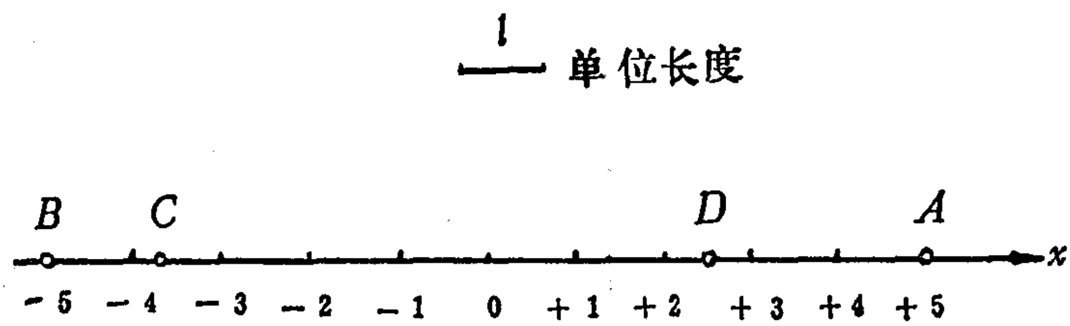

图 1-1

如图 1-1 所示，我们画一条水平直线，把从左到右的方向规定为正方向，在直线上任取一点O作为原点，再取一个线段 l 做为单位长度，这种规定了方向、原点和长度单位的直线，叫做数轴．

建立了数轴以后，任意一个有理数就可以用数轴上的点表示出来．例如 $+5$ 用数轴上从原点向右 5 个单位长度处的 A 点表示；-5 用数轴上从原点向左 5 个单位长度处的 B 点表示；$-3\frac{2}{3}$、$2\frac{1}{2}$ 可以分别用图 1-1 中的 C 点、D 点来表示．0 为原点．

在数轴上的原点两旁，离开原点距离相等的两个点所表示的两个数，叫做互为相反的数．例如 $+2$ 的相反数是 -2，-2 的相反数是 $+2$．

在数轴上表示一个数的点离开原点的距离叫做这个数的绝对值．这样，正数的绝对值就是它本身，负数的绝对值就是它的相反数，零的绝对值还是零．表示数的绝对值时，可以在这个数的两旁各画一条竖线．例如

$+5$ 的绝对值是 5，表示为 $|+5|=5$；

-3 的绝对值是 3，表示为 $|-3|=3$．

一般地，

$$|a|=\begin{cases} a, 若\ a>0; \\ 0, 若\ a=0; \\ -a, 若\ a<0. \end{cases}$$

3．有理数的大小比较　算术里的数的大小关系，反映在数轴上是：较大的数总在较小的数的右边．这一规律对全体有理数来说，也是适用的．

这样，我们可以把有理数的大小关系规定如下：两个有理数，在数轴上位置在右边的那个数较大．例如

$+2>0,\ +1>-3,\ 0>-4,\ -4>-5.$

根据上面的法则可以知道：

(1) 正数都大于 0, 也大于一切负数;

(2) 负数都小于 0, 也小于一切正数;

(3) 两个正数, 绝对值大的较大, 绝对值小的较小;

(4) 两个负数, 绝对值大的较小, 绝对值小的较大.

例 1 把下列各数先用数轴上的点来表示, 再按照从小到大的顺序, 用"<"号连结起来:

$$+2, -2, +3, -3, 0, +\frac{1}{2}, -4\frac{1}{4}.$$

解

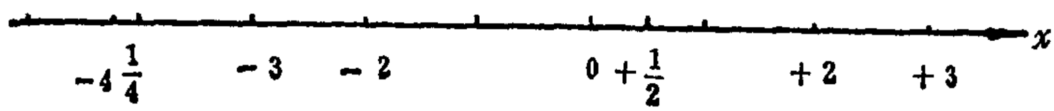

图 1-2

$$-4\frac{1}{4}<-3<-2<0<+\frac{1}{2}<+2<+3.$$

练　　习

1. 下列各数, 哪些是正数, 哪些是负数, 哪些是整数, 哪些是分数?

   $-\frac{2}{3}, -2, +15, +\frac{1}{8}, -3\frac{1}{3}, 0, 364,$

   $-2.75, 6\frac{5}{6}, -207, 3.14, 1000, -0.307.$

2. 什么叫数轴? 在数轴上记出下列各数: 3, -4, -0.5, $3\frac{1}{2}$, $-4\frac{3}{4}$, 4.5, 0.

3. 写出下列各数的相反数:

$$15,\ -24,\ 2\frac{5}{6},\ 0,\ -7.6,\ -4\frac{3}{4},\ 0.48.$$

4．求：$1+|5|,\ 1-|5|,\ -\left|+\frac{2}{7}\right|,\ -\left|-\frac{3}{5}\right|$.

5．求下列各数的绝对值：

$$+3,\ -5,\ 0,\ -2\frac{1}{2},\ +9.$$

6．先把表示下列各数的点记在数轴上，然后按照从大到小的顺序，用“>”号把这些数连结起来：

$$+3,\ -5,\ +5\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{2},\ -4,\ +4,\ 0.$$

7．比较下列每对数的大小：

(1) $|-4|$ 和 -4；　　(2) $|-8|$和$|-7|$；

(3) $\left|3\frac{1}{2}\right|$ 和 $\left|-3\frac{1}{2}\right|$.

二、有理数的运算

1．加法与减法　我们先来观察下面温度变化的情况：

(1) 如果温度第一次从零度上升了 3 度；第二次继续上升 5 度，那么两次温度共上升 8 度．

用正负数表示就是

$(+3)+(+5)=+8$.

(2) 如果温度第一次从零度下降了 3 度，第二次继续下降 5 度，那么两次温度共下降 8 度．

用正负数表示就是

$(-3)+(-5)=-8$.

(3) 如果温度第一次从零度上升了 3 度，第二次从零上 3 度下降了 5 度，那么两次变化后，温度比原来下降了 2 度。

用正负数表示就是

$(+3)+(-5)=-2.$

(4) 如果温度第一次从零度下降了 3 度，第二次从零下 3 度上升了 5 度，那么两次变化后，温度比原来上升了 2 度。

用正负数表示就是

$(-3)+(+5)=+2.$

综合比较各种情况，得到有理数加法的法则是：

(1) 同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加。

(2) 异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并从较大的绝对值减去较小的绝对值（一个数与其相反数相加得零）。

(3) 一个数同零相加，仍得这个数。

这个法则的实质，是把有理数的加法转化为算术数的加法和减法。

下面研究有理数的减法：

在算术里减法是加法的逆运算，就是说，已知二数之和与其中一个加数，求另一个加数的运算叫做减法。对于有理数的减法也是这样。可以通过加法来得到减法的运算规律。

例 1 计算：$(+3)-(+5)$。

这个算式就是求 $+5$ 与什么数相加，和是 $+3$。

$\because \quad (+5)+(-2)=+3,$

$\therefore \quad (+3)-(+5)=-2,$

我们知道，

$(+3)+(-5)=-2,$

$\therefore\quad (+3)-(+5)=(+3)+(-5)$.

这就是说，减去 $+5$，等于加上 $+5$ 的相反数 -5.

例 2 计算：$(-3)-(-5)$.

这个算式就是求 -5 与什么数相加，和是 -3.

$\because\quad (-5)+(+2)=-3$,

$\therefore\quad (-3)-(-5)=+2$.

我们知道，

$$(-3)+(+5)=+2,$$

$\therefore\quad (-3)-(-5)=(-3)+(+5)$.

这就是说，减去 -5 等于加上 -5 的相反数 $+5$.

从而得出有理数减法法则：

减去一个数，等于加上这个数的相反数.

有理数的减法能够转化成加法，这样，在代数里，一切减法和加法的运算，都可以统一成加法运算. 加数是正数或者负数（特别地，也可以是零）的和叫做代数和.

在代数和里，因为所有的运算都是加法，所以可以把各个加号省略不写. 例如，$(-20)+(-5)+(-3)+(+7)$ 可以写成：

$-20-5-3+7$.

例 3 计算下列各题：

(1) $5-(-3)=5+(+3)=5+3=8$;

(2) $\left(-3\frac{1}{2}\right)-\left(+5\frac{1}{4}\right)=-3\frac{1}{2}+\left(-5\frac{1}{4}\right)=-3\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}$

$=-8\frac{3}{4}$;

(3) $(+9)-(+10)+(-2)-(-8)+(+3)$

$=9+(-10)+(-2)+(+8)+(+3)$

$=9-10-2+8+3=8.$

2. 乘法与除法　某工地的仓库，根据生产的需要经常运进和运出水泥．为了计算方便，我们规定：运进为正，运出为负；今天的时间为 0，以后的时间为正，以前的时间为负．

(1) 仓库每天运进水泥 20 包，那么三天后仓库的水泥比今天增加了 60 包．列成算式是

$$(+20)\times(+3)=60.$$

(2) 仓库每天运出水泥 20 包，那么三天后仓库的水泥比今天减少了 60 包．列成算式是

$$(-20)\times(+3)=-60.$$

(3) 仓库每天运进水泥 20 包，那么三天前仓库的水泥比今天要少 60 包．列成算式是

$$(+20)\times(-3)=-60.$$

(4) 仓库每天运出水泥 20 包，那么三天前仓库的水泥比今天多 60 包．列成算式是

$$(-20)\times(-3)=60.$$

由上述四种情况，可得到有理数的乘法法则：

(1) 同号两数相乘，取“＋”号，并把绝对值相乘．

(2) 异号两数相乘，取“－”号，并把绝对值相乘．

(3) 零同任何一个数相乘，都得零．

和算术里的除法一样，有理数的除法，也是乘法的逆运算．例如

(1) 计算 $(-18)\div(-6)$

$\because\ (-6)\times3=-18\qquad\therefore\ (-18)\div(-6)=3.$

(2) 计算 $(-18)\div(+6)$

$\because \quad (+6)\times(-3)=-18,$

$\therefore \quad (-18)\div(+6)=-3.$

从而得出有理数除法法则:

(1) 同号两数相除,取"+"号,并把绝对值相除.

(2) 异号两数相除,取"−"号,并把绝对值相除.

(3) 零除以任何一个不等于零的数都得零.

有理数的乘法和除法,也可以互相转化. 例如

$$a\div b=a\times\frac{1}{b}.$$

3. 乘方 在乘法运算中,还会遇到乘数相同的特殊情况. 例如

(1) 边长是 2 米的正方形,它的面积是 2×2 平方米.

(2) 边长是 1.4 米的正方体,它的体积是 $1.4\times1.4\times1.4$ 立方米.

这里的 2×2 和 $1.4\times1.4\times1.4$ 都是相同的乘数的积. 为了表达和计算方便,我们把

2×2 写成 2^2,读作二的二次方,或二的平方;

$1.4\times1.4\times1.4$ 写成 1.4^3,读作 1.4 的三次方,或 1.4 的立方.

一般地, $\overbrace{a\times a\times a\cdots\cdots\times a}^{n\text{个}}=a^n$. 读作 a 的 n 次方.

几个相同因数的积叫做幂,求相同因数的积的运算叫做乘方. 相同的因数叫做底数,相同因数的个数叫做指数.

根据有理数乘法的法则可以知道:

正数的任何次幂都是正数;负数的奇次幂是一个负数,负数的偶次幂是一个正数;零的任何次幂都等于零.

计算一个数的平方或立方时，为了提高计算速度，劳动人民创造了“平方表”和“立方表”(见《中学数学用表》)，我们可以在表上查出一个数的平方或立方的近似值，查法详见《中学数学用表》里的“平方表”和“立方表”中的说明.

三、有理数的运算定律和顺序

算术里的加法和乘法满足交换律、结合律和分配律，对有理数的加法和乘法来说，这些运算定律也同样适用：

① 加法的交换律：对任意二个有理数 a, b 都有

$$a+b=b+a.$$

② 加法的结合律：对任意三个有理数 a, b, c 都有

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

③ 乘法的交换律：对任意二个有理数 a, b 都有

$$ab=ba$$

④ 乘法的结合律：对任意三个有理数 a, b, c 都有

$$a(bc)=(ab)c.$$

⑤ 乘法对加法的分配律：对任意三个有理数 a, b, c 都有

$$a(b+c)=ab+ac.$$

以上运算定律的成立是显然的，可以通过一些例子加以验证.

还有几个运算性质是常用的：

⑥ 对任意三个有理数 a, b, c 都有：

$$a(b-c)=ab-ac.$$

证明：$a(b-c)=a[b+(-c)]$ （减法）