

电机电磁场教程

罗荣杰 编著

浙江大学出版社

87-11
703)

(浙)新登字 10 号

内容简介

本书以有限元法为重点对电机内的电磁场(包括二维的线性、非线性、恒定及交变电场)问题进行分析与研究。着重介绍有限元法的基本原理、实施过程以及在求解电机电磁场问题时的具体步骤及注意事项。在此基础上讨论了三维、准三维有限元法及应用实例,同时也介绍了边界元法,它在某些场合(如伸展到无穷远的区域),可弥补有限元法的不足。

本书对电机内的电磁场问题作深入讨论,内容力求深入浅出,联系实际,重在实用。收集了许多分析实例,以供学习。附录给出有限元法计算程序,便于读者在小型机(IBM 机)上使用。

本书基本上按电机专业选修课《电机电磁场的分析与计算》教学大纲所规定的范围编写并有所增强(增加的部分主要是近期的研究成果),因此,本书既适于作为电机专业本科教材,也可供研究生学习参考,同时也可供电类专业各级学校的教师和广大工程技术人员参考。

电机磁场教程

罗荣杰 编著

责任编辑: 蔡建勋

浙江大学出版社出版
德清第二印刷厂印刷

浙江新华书店发行

* * *

850×1168 32开 10印张 251千字

1993年2月第1版 1993年2月第1次印刷

印数: 0001—1500

ISBN 7-308-01158-5/TM·016 定价: 3.30元

前 言

本书是编者在浙江大学多年讲授《电机电磁场》课程的讲稿及讲义的基础上进行适当增删、重新编写而成。

本书以有限元法为重点对电机内的各种电磁场(包括二维的线性、非线性恒定及交变电磁场)问题进行分析与研究。着重介绍有限元法的基本原理、实施过程以及在求解电机电磁场问题时的具体步骤和注意事项。在此基础上,讨论了三维、准三维的有限元法及其应用。同时,还介绍边界元法,在某些场合(如伸展到无穷远的区域),它可弥补有限元法的不足。

鉴于近二十多年来,数值计算在电机电磁场中的应用范围越来越广,新的分析方法在不断涌现,因此,本书尽量收集当前最新的应用成果(包括编者在近年来的研究成果),使读者早日接触到本学科的前沿,以满足进一步发展科学技术的需要。此外,编者认为,虽然分析计算的方法众多,但电磁场的基本理论是相同的,掌握了它,才可有效地适应发展的需要。为此,本书通过介绍若干实例说明场的基本理论在解决工程实际问题中的应用,抓住如何建立数学模型(这是各种不同分析方法的共同需要)这个重要环节,进行剖析示范,举一反三,使读者更牢固地掌握场的基本理论。同时也介绍一些典型的解析法实例,以丰富读者对电机内电磁场的感性认识,这一点对培养与提高解题能力是有益的。

本书对电机电磁场问题作深入讨论,内容力求深入浅出,联系实际,重在实用。涉及到的电机电磁场问题较广,计有电机槽漏磁场、气隙磁场、端部磁场、同步机转子阻尼条中的电磁场,此外,还有大型发电机定子铁芯中的温度场等等。收集了许多分析实例,包

括近期的研究成果。附录给出有限元法计算程序,可供读者上机使用。

本书的编写工作得到了许大中教授的支持和鼓励,方正瑚教授对本书提出许多宝贵意见,在此,特向他们表示感谢。

由于编者水平有限,书中差错难免,敬请读者指正。

编 者

1992年6月

目 录

第一章 电机电磁场的理论基础	1
§ 1-1 麦克斯韦方程组的微分形式	1
§ 1-2 麦克斯韦方程组的积分形式和边界条件	5
§ 1-3 场矢量的微分方程	9
第二章 二维恒定磁场的解析法(一)	
(直接求解拉氏方程和泊松方程)	14
§ 2-1 标量磁位 φ 及其微分方程	14
§ 2-2 界面上标量磁位的连续性	18
§ 2-3 矢量磁位 \vec{A} 及其微分方程	22
§ 2-4 矢量磁位的连续性	28
§ 2-5 用分离变量法求解二维恒定磁场	31
§ 2-6 单重傅立叶级数法(罗果夫斯基法)	38
第三章 二维恒定磁场的解析法(二)	
(用许-克变换法求解)	45
§ 3-1 许-克变换	45
§ 3-2 许-克变换法的应用	54
第四章 线性二维恒定磁场的有限元法	64
§ 4-1 泛函和变分原理的简介	64
§ 4-2 具有齐次二类边界条件的平面恒定 磁场的有限元法	72

§ 4-3	具有非齐次自然边界条件的平面恒定磁场的有限元法	94
§ 4-4	周期性条件的处理	101
§ 4-5	轴对称恒定磁场的有限元法	104
§ 4-6	线性二维恒定磁场的有限元计算程序与框图	111
§ 4-7	伽辽金法(Galerkin Method)	122
附录 I	面积坐标	128
附录 I	线性恒定磁场的有限元法计算程序	129
第五章	非线性二维恒定磁场的有限元法	142
§ 5-1	非线性恒定磁场问题的有限元法	142
§ 5-2	用有限元法计算永磁电机磁场	156
附录	非线性恒定磁场的有限元法计算程序	165
第六章	电机内的平面交变电磁场	182
§ 6-1	用场量表示的涡流方程	182
§ 6-2	动态位及其微分方程	184
§ 6-3	边界条件和解的唯一性	189
§ 6-4	矩形槽内导体的电流集肤效应	190
§ 6-5	线性二维似稳交变电磁场的有限元法	196
§ 6-6	非线性二维似稳交变电磁场的有限元法	210
第七章	边界单元法(Boundary Element Method)	218
§ 7-1	泊松方程的格林解式	219
§ 7-2	用边界单元法计算二维恒定磁场问题	224
§ 7-3	用边界单元法计算二维正弦电磁场问题	238
§ 7-4	边界元法与有限元法的联合应用	250

第八章 三维恒定场的有限元法	258
§ 8-1 概述	258
§ 8-2 用三维有限元法计算大型汽轮发电机定子 铁芯稳态的温度场问题	260
§ 8-3 用有限元法分析电机三维恒定磁场	272
附录 恒定磁场问题的变分表达式	281
第九章 准三维有限元法	284
§ 9-1 概述	284
§ 9-2 基本方程及边界条件	285
§ 9-3 用 $\vec{A}-\varphi$ 法分析的准三维加权余量 积分方程	286
§ 9-4 用 $\vec{A}-\varphi$ 法分析的准三维有限元法 的离散化方程	292
§ 9-5 用电磁位 $\vec{T}-\varphi$ 分析的准三维有限元法	299
参考文献	305

第一章 电机电磁场的理论基础

§ 1-1 麦克斯韦方程组的微分形式

麦克斯韦方程是电磁场的基本方程,是研究电机电磁场的理论基础,其微分形式如下:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1-1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1-2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1-3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1-4)$$

上述各式中的符号意义如下:

\vec{H} —— 磁场强度(安 / 米);

\vec{j} —— 传导电流密度(安 / 米²);

\vec{E} —— 电场强度(伏 / 米);

\vec{B} —— 磁通密度(特斯拉);

\vec{D} —— 电位移(库仑 / 米²);

ρ —— 自由电荷的体密度(库仑 / 米³)。

麦克斯韦方程组是麦克斯韦在提出的位移电流的假设下,全面总结电生磁和磁生电现象后提出来的。方程组的意义简述如下:

第一方程[式(1-1)]表示传导电流和变化电场是磁场的“漩涡源”,它表示了变化电场能够产生磁场这个重要的客观现象。第

二方程[式(1-2)]表示变化磁场产生电场这个重要事实。第三方程[式(1-3)]表示磁场无“通量源”，即磁场不可能由磁荷产生。第四方程[式(1-4)]表示电场有通量源的场。麦克斯韦方程是宏观电磁现象的基本规律，可适用于恒定电磁场，似稳电磁场和高频交变电场等不同情况。

在恒定电磁场中所有的量均不随时间 t 而变化。所谓似稳电磁场，它是一种低频的交变电场，当频率 f 很低，而场源和观察点之间的距离较波长短得多时，就可以不考虑电磁波传播的滞后位问题，此时位移电流与传导电流相比，数值上较小因而可以忽略。电机中的交变电场为似稳电磁场，因为一般交流电机的频率均在工频到中频的范围内，故在足够精确的程度内都能满足似稳条件。此外，电机中一般不存在静止的电荷，因此，在不计 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 和 ρ 的情况下，麦克斯韦方程组可简化为

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (1-5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1-6)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1-7)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (1-8)$$

麦克斯韦方程组适用于各种正交坐标系。电机电磁场中常用的是直角和圆柱两种坐标系，其旋度和散度的表达式分别如下：

在直角坐标系中

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (1-9)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-10)$$

在圆柱坐标系中

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r \frac{1}{r} & \hat{a}_\theta & \hat{a}_z \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\theta & H_z \end{vmatrix} \quad (1-11)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-12)$$

一般形式的麦克斯韦方程适用于随时间按任何规律变化的电磁场。在电机的工程实践中，经常研究的是随时间按正弦律变化的电磁场（如果是非正弦变化的，可以分解为基波和各次谐波来分别处理），以磁场强度为例，如果

$$\begin{aligned} \vec{H}(x, y, z, t) = & \hat{i}H_{m_x}(x, y, z) \cdot \cos[\omega t + \varphi_x(x, y, z)] \\ & + \hat{j}H_{m_y}(x, y, z) \cdot \cos[\omega t + \varphi_y(x, y, z)] \\ & + \hat{k}H_{m_z}(x, y, z) \cdot \cos[\omega t + \varphi_z(x, y, z)] \end{aligned} \quad (1-13)$$

则称该磁场为正弦磁场。式中各坐标分量的振幅值 H_{m_x} 、 H_{m_y} 、 H_{m_z} 以及相位 φ_x 、 φ_y 、 φ_z 都不随时间变化只是空间位置的函数。我们可以把式(1-13)中每一个分量用复数的实数部分表示，即取

$$\begin{cases} H_x = R[H_{m_x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}] \\ H_y = R[H_{m_y} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_y)}] \\ H_z = R[H_{m_z} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_z)}] \end{cases}$$

式中的 R 表示取括号中复数的实部。上式可以进一步简化为

$$\begin{cases} H_x = R_x[H_x \cdot e^{j\omega t}] \\ H_y = R_y[H_y \cdot e^{j\omega t}] \\ H_z = R_z[H_z \cdot e^{j\omega t}] \end{cases} \quad (1-14)$$

其中

$$\begin{cases} H_x = H_{m_x} e^{j\varphi_x} \\ H_y = H_{m_y} e^{j\varphi_y} \\ H_z = H_{m_z} e^{j\varphi_z} \end{cases} \quad (1-15)$$

称为磁场强度各分量的相量。相量是一个复数，它的模表示正弦

(简谐) 时间函数振幅, 而幅角表示初相。于是磁场强度矢量便可记为:

$$\dot{\mathbf{H}} = R[\dot{i}H_x e^{j\omega t} + \dot{j}H_y e^{j\omega t} + \dot{k}H_z e^{j\omega t}] = R[\dot{\mathbf{H}} \cdot e^{j\omega t}] \quad (1-16)$$

称为矢量 $\dot{\mathbf{H}}(x, y, z, t)$ 的复数表示式, 式中

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{i}H_x + \dot{j}H_y + \dot{k}H_z \quad (1-17)$$

称为磁场强度的复矢量, 或称复振幅。

于是式(1-1)可以表示为如下形式:

$$R[\text{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot e^{j\omega t}] = R[(\dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}}) e^{j\omega t}] \quad (1-18)$$

$$\text{得 } \text{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} \quad (1-19)$$

从而得到复数形式的麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\mathbf{H}} &= \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} \\ \text{rot} \dot{\mathbf{J}} &= j\omega \dot{\mathbf{B}} \\ \text{div} \dot{\mathbf{B}} &= 0 \\ \text{div} \dot{\mathbf{D}} &= 0 \end{aligned} \quad (1-20)$$

上述麦克斯韦方程组, 不管有关材料的性质如何, 在工程上都是适用的。但在具体计算时, 将遇到许多问题。其中之一就是方程式少而要求的未知量多。因为在方程组中共有四个方程式, 但却有五个不同的矢量。由于其中有两个偏微分方程是矢量方程, 这意味着事实上总共有八个标量方程十五个独立的矢量分量, 但是, 上述的八个标量方程并非全部独立的, 其中两个散度方程可以分别从两个旋度方程及电流连续方程

$$\text{div} \dot{\mathbf{J}} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1-21)$$

推导出来(参看文献[1])。故由式(1-1)、(1-2)和(1-21)所示的三个独立方程等效于七个标量方程, 而其中却包含有十六个标量, 相形之下, 方程的个数太少了, 这显然是无法求解的。要使方程的数

目增加,还必须利用成分方程,若媒质是各向同性的,则它在电磁场作用下,其宏观电磁特性关系式,为

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}\end{aligned}\quad (1-22)$$

其中 ϵ ——介电常数(法/米²);

ϵ_r ——相对介电常数;

ϵ_0 ——真空介电常数(8.85×10^{-12} 法/米);

σ ——电导率(1/欧米);

μ ——磁导率(亨/米);

μ_r ——相对磁导率;

μ_0 ——真空磁导率($4\pi \times 10^{-7}$ 亨/米)。

对于线性介质,它们是常数,对于非线性介质,它们随场强的变化而变化。

式(1-22)提供了九个独立的标量方程,它们和麦克斯韦方程组合在一起,就足以求解所需要的未知量。但是,从计算的观点来看,极少用麦克斯韦方程去直接求解。因为方程中待求的量毕竟太多。如果以位函数来描写场,例如用标量位或矢量位,待求量的数目可以减少,较为有利。究竟选择何种形式来表示电磁场才算合适,做到待求的物理量数最少,因而是最经济的,目前尚未有定论,一般要根据实际情况才能决定。当前在应用数值算法(如有限元法)计算三维涡流场过程中,物理量的选择仍然成为整个计算的先决问题,具有重要意义。这个问题打算留到后面再做进一步的讨论。

§ 1-2 麦克斯韦方程组的积分形式和边界条件

麦克斯韦方程组的微分形式,只适用于媒质的物理性质(由

μ 、 ϵ 和 σ 等参数来表征) 处处连续的空间。但是在电机中经常要遇到媒质的性质在一个或多个界面处有突变的情况。因而不同媒质的分界面(例如空气与铁的分界面)处的场矢量 \vec{E} 、 \vec{H} 、 \vec{B} 和 \vec{D} 也会有不连续的突变情况出现。所以,对于这些交变界面上的各点来说,麦克斯韦方程组的微分形式已失去意义而必须去考虑有限空间中场量之间的关系,这种关系是由麦克斯韦方程组的积分形式所制约的。电磁场的边界条件即可由之而导出。从电工基础课程中知道,麦克斯韦方程组的积分形式是

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = i = \int_a (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{a} \quad (1-23)$$

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_a \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (1-24)$$

$$\oint_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (1-25)$$

$$\oint_a \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_v \rho dv \quad (1-26)$$

在式(1-23)和式(1-24)中 s 为闭合回线, a 为由 s 所界定的曲面;在式(1-25)和式(1-26)中, a 为闭合曲面, v 为 a 所界定的体积。我们利用上述各式推导边界条件。设有一个无限小的圆柱横跨电磁性质不同的两种媒质的分界面,其顶面和底面平行,见图(1-1a),于是,由式(1-25)可得

$$\oint_a \vec{B} \cdot \vec{n} da = 0$$

若上、下底的面积为 Δa , 当其充分小时,可认为在 Δa 上的 \vec{B} 是一常数,若柱高 $\Delta h \rightarrow 0$, 则可不计圆柱侧面的贡献,于是上式可写为

$$(\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2) \Delta a = 0$$

用 \vec{n} 表示从 2 到 1 并垂直于 Δa 的单位法向矢量,由于 $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}$, 故得到

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (1-27)$$

这表明,在不同媒质的交界面两边,磁通密度 \vec{B} 的法向分量是连续的。

对于电位移 \vec{D} 亦可用类似的方式进行讨论。按式(1-26)有

$$\oint_a \vec{D} \cdot \vec{n} da = q$$

式中 $q = \rho \Delta h \Delta a$ (1-28)

当 $\Delta h \rightarrow 0$ 时, $\rho \rightarrow \infty$, 于是,我们把乘积 $\rho \Delta h$ 的极限定义为面电荷密度 ρ_s 。因此,在不同媒质交界面处, \vec{D} 的关系可表达为

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_s$$
 (1-29)

即,处在交界面处的面电荷,会使矢量 \vec{D} 的法向分量产生突变。为了研究场矢量在交界面上切线方向的性质,我们研究跨越边界的一个矩形闭合回路,如图(1-1b)所示。设该矩形与交界面平行的两个边长为 Δl , 穿过交界面的边长为 Δh , 矩形的面积为 Δa 。按式(1-23)有

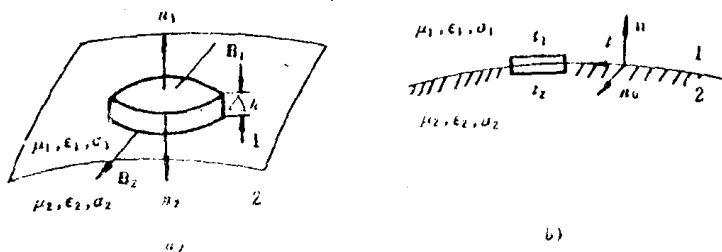


图 1-1

$$\oint_a \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_a (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \vec{n}_0 da$$
 (1-30)

式中 \vec{n} 为面积元 Δa 的正法向单位矢量, 设 \vec{i}_1 和 \vec{i}_2 分别为矩形上、下两个边的单位切向矢量, 当 $\Delta h \rightarrow 0$ 时, 侧边的贡献量可略去不

计,于是式(1-30)可近似写为

$$(\vec{H}_1 \cdot \vec{i}_1 + \vec{H}_2 \cdot \vec{i}_2) \Delta l = \vec{J} \cdot \vec{n}_0 \Delta l \Delta h + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n}_0 \Delta l \cdot \Delta h \quad (1-31)$$

仍以 \vec{n} 表示媒质交界面的单位法向矢量,并以 2 到 1 为正向,则单位切向矢量 \vec{i} 可定义为

$$\vec{i} = \vec{n}_0 \times \vec{n} \quad (1-32)$$

$$\text{而 } \vec{n}_0 \times \vec{n} \cdot \vec{H} = \vec{n}_0 \cdot \vec{n} \times \vec{H} \quad (1-33)$$

式(1-31)在取极限后成为

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \Delta h \quad (1-34)$$

当 $\Delta l = 0, \Delta h = 0$ 时, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 为有限值,故上式右方第二项为零。设通过矩形的电流 $I = \vec{J} \cdot \vec{n}_0 \Delta h \Delta l$ 在表面上形成厚度为无限小, $J \rightarrow \infty$ 的电流层。我们将乘积 $J \Delta h$ 的极限定义为电流层的线密度 J_l ,则式(1-34)可写成

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_l \quad (1-35)$$

同理,可得

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (1-36)$$

为了方便,将上述(1-27)、(1-28)、(1-29)、(1-35)、(1-36)等四式分别写成标量形式,即

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad (1-37)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (1-38)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_l \quad (1-39)$$

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad (1-40)$$

根据上面的分析,可以得到结论:矢量场的面散度源可能引起场的法向分量突变,面旋度源可能引起切向分量突变,所以无散场的法向分量一定连续,无旋场的切向分量一定连续。调和场则两种突变都不存在。

§ 1-3 场矢量的微分方程

在实际问题中,为了减少计算的复杂性,常用一个二阶,但仅包含一个矢量变量的微分方程去代替至少含有两个独立矢量变量的一阶微分方程组。这种方程通常为广义波动方程,或称为电报方程。先推导关于 \vec{H} 的方程。设电磁介质均匀、线性而且是各向同性,则由对麦克斯韦的磁旋度方程的两边各取旋度之后,得

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{rot } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{D} \quad (1-41)$$

将 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ 和 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 代入上式,可得

$$\text{rot rot } \vec{H} = \sigma \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \cdot \text{rot } \vec{E})$$

将 $\text{rot } \vec{E}$ 用等价的磁矢量去代替,结果为

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1-42)$$

最后,将 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 代入,即可得到完全用磁场矢量 \vec{H} 表示的单一方程

$$\text{rot rot } \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (1-43)$$

在考虑了恒等式

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} \quad (1-44)$$

及 $\text{div } \vec{H} = 0$ 之后,得

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (1-45)$$

当求解区域内没有自由电荷时,得到:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1-46)$$

$$\nabla^2 \vec{D} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (1-47)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1-48)$$

由于式(1-45) ~ 式(1-48) 具有相同的数学形式,故可合并写成

$$\left(\nabla^2 - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{Bmatrix} \vec{H} \\ \vec{E} \\ \vec{B} \\ \vec{D} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-49)$$

上述电磁场矢量的微分方程还可以进一步简化,现在分几种情况讨论。

一、在绝缘良好的电介质中

此时因 $\sigma = 0$,则式(1-49) 可写成

$$\left(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{Bmatrix} \vec{H} \\ \vec{E} \\ \vec{B} \\ \vec{D} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-50)$$

式(1-50) 称为波动方程或达朗贝尔方程。

$$\begin{aligned} \therefore \epsilon_0 \mu_0 &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \text{ 法拉亨利}}{4\pi \times 9 \times 10^9 \text{ 米 米}} = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \frac{\text{秒}^2}{\text{米}^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\text{秒}^2}{\text{米}^2} \end{aligned}$$

其中 $c = 3 \times 10^8$ 米 / 秒 —— 在真空中的光速。

令 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ —— 波的传播速度,则式(1-50) 可改写成

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{Bmatrix} \vec{H} \\ \vec{E} \\ \vec{B} \\ \vec{D} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-51)$$

二、在导电媒质内

在导电媒质内,若将位移电流忽略,则式(1-49) 可简化为