微积分学初步

WEIJIFENXUE CHUBU

天津科学技术出版社

微积分学初步

刘立民　　黄玉民

天津科学技术出版社

微积分学初步

刘立民　黄玉民

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

天津市新华书店发行

*

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 8 3/8 字数 172,00

一九八〇年二月第一版

一九八〇年二月第一次印刷

印数：1—33,000

统一书号：13212·1　定价：0.88元

前　言

中、小学数学课程的主要内容，诸如算术、代数、几何、三角等统称为初等数学，在此基础上登上高等数学的第一个台阶就是微积分。由此可以看出微积分的出现在数学发展史上是一件划时代的大事，它的产生和发展不仅构成了从十七世纪到十九世纪近代数学的主要内容，而且也对一百年来现代数学的发展起了决定性的影响。不熟悉微积分，要想掌握高等数学的任何一个分支都是不可能的。当然由于数学对整个自然科学的基础作用，微积分的意义绝不仅限于此，它已经扎根于近代自然科学的各个领域，成为人类认识自然、改造自然的有力武器。现在学习任何一门自然科学，掌握任何一种工程技术，微积分都是必不可少的基础。因此在中学的数学课程里讲一点微积分，使得凡是上过中等学校的人都能了解微积分的一些基本概念，初步学会运用微积分的思想解决一些实际问题，这对于提高整个中华民族的科学文化水平，加速实现“四个现代化”一定能够起到积极作用。

提起微积分的历史，人们自然会想到牛顿(Newton1642—1727）和莱伯尼茨（Leibnitz1646—1716），认为微积分是由他们发明的，这主要是指的他们分别在1665—1666年和1673—1676年的工作，提出了微积分的基本概念和运算方法，指出了微分与积分的内在联系，建立了著名的牛顿—莱伯尼茨公式。他们对微积分建立的历史功绩是不容置疑的，但是不能由此而把微积分的发明完全归功于他们两个人。在牛顿和莱伯尼茨之前，人们为建立微积分经历了一个世纪的孕育和

酝酿，在他们之后又经历了二百年的努力，才建立了微积分严格的逻辑基础。如果追溯它的思想渊源，就十分清楚地表明微积分的建立是人类在长期的生产斗争和科学实验中，经过多少代人的辛勤工作，所建立起来的精神财富。

在微积分建立前的一百年间，欧洲正是资本主义萌芽和兴起的时期，由于生产力的发展，推动了天文学、光学、力学等自然科学的发展，这就为数学提出了大量新的研究课题：例如计算天体运行的轨道和周期，求曲线的切线，求面积问题以及一系列极大、极小问题。总之，变量进入了数学研究的领域，另一方面，两千多年来初等数学的发展为解决这些问题提供了丰富的思想材料，使得许多科学家致力于这些工作，取得了丰富的成果，尤其应该指出的是费尔马(Fermat)和巴罗（Barrow1630—1677）的工作。费尔马善于解析方法，他用几乎是现在微分学的方法得出了求极大、极小值的公式，并用它去解决求曲线的切线问题。从他对求面积问题的研究可以看到定积分的雏形，特别是他第一次采用相当于今天微分学的方法，而不是用类似于积分中求和的方法，求出了物体截段的重心，这里已经蕴含着微分与积分的内在联系。巴罗是牛顿的老师，他在几何学上得出的结果与微积分得出的结果从本质上十分相近，不仅包含了求面积和求切线的许多定理，而且他系统地把切线的逆问题化为求面积的问题，已经显现出微分与积分的互逆关系。微积分的这些先驱者，虽然作出了许多科学成就，但是他们的工作往往是针对具体问题的，没有一个人能够从这些具体方法中抽象出一般的规律。由于变量进入了数学，这就需要建立与初等数学有本质不同的概念和方法，也可以说是需要创立前所未有的新

的数学，遗憾的是当时谁也没有意识到这一点，从而摆在他们面前的是一座令人困惑的迷宫，缺少的是引出这个迷宫的一条线。

牛顿和莱伯尼茨继承了前人的工作，又努力地迈出了关键的一步，终于达到了前人所未达到的境界。牛顿把变量的变化率称为流数，而把变化的量称为流量。他从流数这个概念出发，得到求积问题是求流数的逆运算这一重要的结果。莱伯尼茨是从变量的有限差出发，提出微分的概念，以此也得到微分与积分的互逆关系。科学家的牛顿和哲学家的莱伯尼茨虽然出发点不同，主要研究的侧面也不相同，但是得到了本质相同的结果。他们高于前人的是得到了一般的概念和方法，他们都意识到这一工作不是以前数学法则的简单改进，而是创立一个新的学科，这一点莱伯尼茨表现得更为明显，但是由于历史条件的局限，无论是牛顿或者是莱伯尼茨都没有给微积分建立令人满意的逻辑基础。莱伯尼茨虽然成功地运用无穷小量的概念得出微分的运算法则，但无穷小量究竟是什么？莱伯尼茨只能从哲学上加以解释，而不能从数学上给出确切的定义。牛顿虽然尽量避免用无穷小量的术语，但是他定义流数时也不得不运用这一概念。正因为如此，牛顿和莱伯尼茨虽然大体上完成了微积分的建设，但导数、微分、积分这些基本概念由于缺乏严格的逻辑基础，因此就披上一件神秘的外衣。无论是牛顿的流数，最初比与最终比，或者是莱伯尼茨的从两个微分之比得出有限值，都是含混不清的。在相比的过程中，那些量应当保留，那些量应该抛弃，没有严格的科学法则，表面上看来是随意的，这一点正是微积分建立时的严重缺陷。

微积分的建立相对于初等数学是一个质的飞跃，尽管它诞生时有严重的缺陷，但有极强的生命力。在十八世纪，经欧拉(Euler)，拉格朗日(Lagrange)，拉普拉斯 (Laplace)等许多人之手，把微积分运用于数学和其它自然科学上，取得了辉煌的成就。在此过程中微积分理论本身也得到了很大的发展，致使当时谁也无法否认微积分的重要意义和作用。

数学上一座空前宏伟的大厦建筑在令人难以理解的基础之上，这种严重的缺陷，不仅招致墨守初等数学成规之人的非难，而且也遭到牧师们的疯狂攻击。当时英国的极端主观唯心主义者，红衣主教贝克莱 (Berkeley) 就抓住牛顿流数法的弱点，提出“探讨近代分析学的对象，原则和推论是否比宗教教义和信条更清楚地表达出来，或更明显地推导出来的问题”，一方面攻击微积分的倡导者，另一方面为神学辨解。更为严重的是，由于微积分建立时基础概念的神秘莫测和逻辑混乱，在它发展的过程中，矛盾就越来越突出。例如无穷级数的理论作为微积分的应用和工具，在十八世纪得到很大的发展。但是一些最基本的概念，比如无穷级数的和是什么意义，却一直含混不清，致使出现许多今天看来明显的错误，这些都要求建立微积分的严格基础，在十八世纪的一百年间，许多有名的数学家为此而努力，主要是企图克服由令人难以捉摸的无限小量所带来的困难。由于变量进入了数学而产生了微积分，要研究变化的量必然会遇到有限与无限这对矛盾。为处理这对矛盾，莱伯尼茨广泛运用无限小的概念建立了微分法。牛顿表面回避实际悄悄引用这一概念建立了流数法。但是无限小量的概念，在当时没有严格的逻辑基础，看起来好象是人们拟想的，而要取掉这一概念就要出现导的严重困

难。这个困扰人们的问题，吸引了许多数学家。在十八世纪特别值得提出的是达朗贝尔（d'Alembert 1717—1783）和拉格朗日。达朗贝尔提出极限的概念做为微积分的基本概念，把无限小理解为无限地小。极限概念发源于古代的“穷竭法”。牛顿对此也做过阐述，但是直到达朗贝尔以及以后的一段时间，极限往往是建筑在几何直观的基础上，缺乏精确的表达形式，因此达朗贝尔的极限概念如同无限小一样，也陷入一套不能理解的抽象理论之中。拉格朗日对无限小抱怀疑态度，对极限的态度也很冷淡，他企图用简单的代数方法建立微积分令人满意的基础。在1772年发表的论文“关于变量的求导与求积分计算的一种新类型”中，表达了他的思想，他从函数的泰洛（Taylor）展开式出发，避免了极限或者无限小的概念，把微分学转化为代数运算，从逻辑上看好象比较严格，但是他忽略了一个根本的问题，一个函数能够展成泰洛级数是有条件的，同时无穷级数的基本概念同微积分基本概念一样在当时是很不明确的。在建立微积分严格基础的问题上，拉格朗日搞错了方向，达朗贝尔虽然努力把极限思想表达为微积分的基础概念，但是由于他没有摆脱几何直观的束缚，从而不能从分析上精确表达极限概念，因此他也没有建立令人满意的微积分基础。

微积分的严格基础是在十九世纪才完成的。主要是由于波尔察诺（Bolzano1771—1848），柯西（Cauchy 1789—1857）和维尔斯特拉斯（Weierstrass1815—1897）进行许多的工作。他们都力图摆脱几何直观的纠缠，严格从分析上建立微积分的基础，波尔察诺做过许多出色的工作，例如他第一次把连续函数的定义建筑在极限概念的基础上，并且第一

个作出了处处不可微的连续函数的例子，澄清了自微积分建立以来人们从直观所造成的错觉：认为连续函数除个别以外都是可微的。他用有限差比的极限来定义导数，并对极限做了进一步明确的说明。但是由于他的工作湮没了半个世纪才被人发现，因此他的观点对当时微积分的发展并未起决定影响。对建立微积分严格基础做出最大贡献的是柯西，其主要工作见于他的三大著作：《工科大学分析教程》（1821）、《无限小计算概要》（1823）与《微分学讲义》（1829），柯西摆脱了几何直观的牵连，从分析上给出极限比较精确的定义："若代表某变量的一串数值无限地趋向于某一固定数值时，其差可随意小，则该固定值称为这一串数值的极限"。他从函数，变量以及变量的极限出发，建立了连续性、无穷级数、导数、微分和积分的理论。通过他的讲演和教科书的广泛流传，他对微积分的解释被普遍采纳，并且沿用至今。因此人们称他为微积分严格基础的奠基人。尽管柯西是以严格、细心著称的数学家，但是在他的工作中仍有缺陷：首先对极限概念的叙述仍然残存直观的痕迹。例如"无限地趋近"，"要怎样小就怎样小"这些含混的表达，只有用极限概念才能准确的理解和运用，这就陷入了逻辑上的矛盾。为了弥补这一缺陷，维尔斯特拉斯提出了精确描述极限概念的方法，现在通常称之谓"ε-N"和"ε-δ"方法。柯西工作的另一个缺陷是对实数的论述。微积分是在实数范围内研究变量的，因此要建立微积分的严格基础就必须建立严格的实数理论。实数是有理数与无理数的全体，无理数虽然早在两千多年以前已被人发现，但是到19世纪70年代以前对无理数的概念和实数的基本性质—连续性，都没有严格的科学定义。柯

西把无理数定义为有理数的极限，但潜在着首先必须承认无理数的存在，这又需要求助于几何的直观，不然就要陷入逻辑矛盾的恶性循环。在寻求微积分严格基础的过程中，到了十九世纪七十年代几种关于实数的等价定义应运而生。尤其是犹德金（Dedekind1831—1916）和康托尔（Cantor1845—1918）的工作，给出了无理数的定义，而且深刻地刻划了实数的重要性质，即有序性，稠密性和完备性（或者连续性）。这些不仅成为微积分的严格基础，而且发展为现代分析的重要概念。他们两人，特别是康托尔在建立实数理论的过程中，总结了在数学发展的长河中，人们对有限和无限认识的历史，建立了“集合论”，可以集合论的建立标志着现代数学的开端，把数学的一切分支都最终建筑在集合论的基础之上，这一点成为现代数学的主要特色。还有一个需要提到的问题是莱伯尼茨在建立微分法时运用了无限小量的概念，但是他没有弄清无限小量的本质，招致数学界围绕无限小量的问题研究、争论了近二百年。微积分的严格基础建立之后，仍然袭用无限小量的术语，但这时是把无限小量定义为以零为极限的变量，因此它是潜在的，而不是实在的，近十几年来，由于数理逻辑的发展，逻宾逊（Robinson）等人，在严格逻辑的基础上，解决了实数域的扩充问题，建立了实无限小的模型。以此为基础的微积分被称为“非标准分析”，现在还有一些数学家从事这方面的工作。

以上我们简要回顾了微积分的发展历史，从中可以看出：数学研究的对象和特点要求它的理论有严格的逻辑基础，但是一个数学理论从建立到逻辑基础的完善，往往经历一段发展的过程，这反映人们对客观世界的数量关系由浅入深，由

表及里的认识过程，由于实践的需要，产生新的概念，开始时常常不能摆脱直观的影响，看起好象不很严格，如果因此而排斥这些启发性的概念，就会大大障碍数学的发展；但是另一方面，因新概念的成功发展而忽视逻辑基础的缺陷，不去努力抛弃那些非数量关系的影响，抓住纯数量关系的本质，寻求理论的严格基础，这也会障碍数学的发展。理解这一点对于学习数学也是必要的。一个数学概念有它的来源和生动而具体的内容，又有形式化的精确描述，二者是辩证统一的。我们只有抓住这两个方面，才能真正理解概念的本质。

我们这本小册子仅介绍了一元函数微积分的基本内容，对于整个微积分的理论，这些内容无论从深度或者广度都是远远不够的。但是由于一元函数的微积分体现了微积分的基本思想和方法，因此我们希望这本小册子对初学者有所帮助，并能为进一步学习打下一定的基础。由于我们水平所限，书中难免有不少谬误，希读者批评指正。

刘立民　黄玉民

一九七八年九月

目　录

第一章　分析引论

§1. 函　　数

一、函数

1.函数的概念

在初等数学（算术、代数、几何、三角）中，无论是加减乘除的计算，或者是代数方程的求解，或者是求三角形的边长、角度等问题，在所研究的过程中，基本上都是保持不变的量。象这样在某个研究过程中保持不变的量叫常量。但是在客观世界，事物总是在不断地运动、变化和发展的。我们要认识客观世界（或某个客观事物），就必须研究其变化、发展的过程和规律。这样，研究常量的初等数学就远远不能满足要求了，而必须研究变化着的量即变量。恩格斯指出“变量是数学中的转折点，因此运动和辩证法便进入了数学，因此微分和积分就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生出来。”变量的引进和研究，对数学的发展具有决定性的作用。

什么叫变量呢？我们先看看下面的例子。

在研究自由落体运动时，物体运动的时间 t（从开始下落时算起，到落地时止）是在不断地变化的。物体下落的路程 s（从开始下落的位置算起，到落地时为止）也是在不断地变化的。随着时间 t 的增加，路程 s 也在增加，它们之间的相互依赖关系是$s=\frac{1}{2}gt^2$，其中g是重力加速度，$g=9.8$米/秒^2。

当$t=1$(秒)时，$s_1=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1^2=4.9$(米).

当$t=2$(秒)时，$s_2=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2=19.6$(米).

当$t=3$(秒)时，$s_3=\frac{1}{2}\times 9.8\times 3^2=44.1$(米).

…………。

在上述研究自由落体的过程中，$\frac{1}{2}$和g都是常量，而t和s是变化着的量，即它们可以取各种不同的值，这样的量，称之为变量。

综上所述，在研究某个客观事物的过程中，始终保持不变的量叫常量，而变化着的量，即可以取不同值的量，叫变量。

在研究自由落体运动时，虽然s和t都是变量，但它们不是彼此孤立毫无联系的。它们之间有着紧密的、内在的联系，即s是按照一定的规律随t的变化而变化（这规律就是$s=\frac{1}{2}gt^2$）.当t由0变到t_0时，s由0变到$\frac{1}{2}gt_0^2$。换言之，每当t取一个确定的值时，s都按照一定的规律（即$s=\frac{1}{2}gt^2$）有一个确定的值与之对应。我们把变量之间的这种相互依赖关系（或相互对应关系）称之为函数关系。

定义. 在某个变化过程中，有两个互相联系的变量x和y，如果当x每取定某一值时，变量y都按一定的规律有一个确定的值与之对应，则称y是x的函数，记为

$$y=f(x),$$

其中 x 叫自变量，y 叫 x 的函数（或因变量）。

函数记号中的字母 f 表示 x 和 y 之间的某种对应关系。在同一个问题中，如果要同时讨论几个函数，为了避免混淆起见，要用不同的字母表示不同的函数，例如 $y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=\varphi(x)$ 等等。

例如在自由落体运动中，$s=\frac{1}{2}gt^2$ 就是一个具体的函数。t 是自变量，s 是因变量或函数。当自变量 t 取定值后，s 就对应地取值为重力加速度的一半乘 t 的平方。又如 $y=\sin x$ 也是一个具体的函数。其中 x 是自变量，y 是函数。当自变量 x 取定值后，y 就对应地取值为 x 的正弦值。又如 $y=1$ 也是一个函数。它表示自变量 x（虽然它在 $y=1$ 中表面上没有出现，但是可以理解为，譬如 $y=0x+1$）取任何值时，y 总是对应地取值为 1。再例如

$$y=\begin{cases}1 & 当\ x>0\ 时;\\ 0 & 当\ x=0\ 时;\\ -1 & 当\ x<0\ 时,\end{cases}$$

也是一个函数。因为当 x 取值小于 0 时（无论是-1，-5等什么负值），y 总是对应地取值为-1；当 x 取值为 0 时，y 对应地取值为 0；当 x 取值大于 0 时，y 总是对应地取值为1。这样，每当 x 取定一个值后，y 就取一个确定的值与之对应，因而 y 是 x 的函数。这个函数通常称为符号函数或克朗涅克尔（Kronecker）函数，记为 $y=\operatorname{sgn}x$。

在函数关系中，自变量的取值范围叫函数的定义域，因变量的取值范围叫函数的值域。只有当自变量在定义域中取值时，函数才有确定的对应值。因此在研究函数关系时，必