计算数学丛书

解边值问题的迦辽金方法

李荣华编著

上海科学技术出版社

计算数学丛书

解边值问题的迦辽金方法

李荣华 编著

上海科学技术出版社

责任编辑　唐仲华

计算数学丛书

解边值问题的迦辽金方法

李荣华　编著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 8.25　字数 182,000

1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷

印数 1－5,000

ISBN 7-5323-0186-9/O·8

定价：2.90 元

出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校的计算数学教学的需要而组织的一套参考读物．读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考．

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果．每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解．

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《不动点算法》、《广义逆矩阵的基本理论和计算方法》、《非线性方程的区间算法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《曲线曲面的数值表示和逼近》、《舍入误差分析引论》、《解边值问题的迦辽金方法》、《非线性方程组迭代解法》、《外推法及其应用》、《蒙特卡罗方法》、《演化方程的有限元理论》、《数值解高维偏微分方程的分裂法》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版．

序　言

这是一本系统论述解边值问题的迦辽金(Galerkin)方法及其理论的书. 迄今,虽已出版了好些种有限元法的专著,但本书有它自己的特点:第一,本书用两章篇幅(第2、3章)系统地讨论了抽象变分原理、里兹-迦辽金(Ritz-Galerkin)方法及其误差估计,为有限元法及其它射影法奠定广泛、坚实的理论基础,在一定程度上包括并发展了 С. Г. Михлин 的如下经典著作的主要内容: «Вариационные Методы В Математической Физике»(1957年版). 第二,已有专著主要讨论标准有限元法,而本书则用两章(第5、6章)详细讨论了非标准有限元法——杂交有限元法和混合有限元法. 作者感到,标准有限元法的理论及应用已比较成熟(指解线性椭圆及抛物型偏微分方程),但非标准有限元法则还处在发展阶段. 写这两章的目的,一是总结一下已有的主要成果;二是为了引起我国青年数值分析学家对非标准有限元法的注意. 第三,在第7章,也就是本书最末一章,对近年发展起来的边界积分方程法作了一个简介,并列出较详尽的文献供读者查阅. 本书仅用不长的一章——第4章——介绍标准有限元法. 在叙述插值逼近理论时,我们采用初等的 Peano 核函数法,这就避免了使用 Sobolev 嵌入定理. 第1章 Hilbert 空间初步,介绍以后各章用到的 Hilbert 空间知识. 这章是为那些未学过泛函分析和 Sobolev 空间的读者写的,除嵌入定理和迹定理没有给出证明外,其他概念和定理都给出了详细论述.

本书是作者在为吉林大学数学系、数学所本科高年级学

生和研究生多次讲授选修课讲义的基础上修改、充实而成的. 读者只要具备数学分析、实变函数的知识, 便可顺利阅读本书. 如果教师准备选用本书作为选修课教材, 可以根据讲授对象和学时数按以下几种方式选材: (I)第1至第3章. (II)第1至第4章. (III) 第1至第5章. (IV) 第1至第6章. (V)第1章§1、§2及第7章.

本书经武汉大学雷晋干教授审阅, 他对本书提出许多有益的建议和修改意见, 在此向他深表谢意. 本书一定还有许多疏漏和不当之处, 敬请读者批评指正.

李荣华　1986年2月

目　录

序　言
第1章　Hilbert 空间初步 ……1
§1　Hilbert 空间 ……1
§2　Sobolev 空间 ……12
§3　线性算子……22
§4　紧算子与特征展开……27
参考文献 ……45
第2章　边值问题的变分形式……46
§1　抽象变分形式……46
§2　二次泛函的临界点……51
§3　二阶椭圆边值问题……55
§4　弹性理论的变分原理……68
§5　四阶椭圆方程的边值问题……78
参考文献 ……82
第3章　里兹-迦辽金(Ritz-Galerkin)方法……84
§1　极小化序列、Ritz 法 ……84
§2　紧算子方程的 Galerkin 解法 ……87
§3　一般线性算子方程的 Galerkin 法 ……92
§4　广义 Galerkin 法 ……99
§5　应用例子 ……104
§6　特征值问题 ……108
参考文献 ……115
第4章　有限元法 ……117
§1　有限元空间 ……117
§2　Sobolev 空间的插值逼近 ……124

§3　对二阶椭圆边值问题的应用 ……134
§4　非协调元 ……138
参考文献 ……148
第5章　杂交有限元法 ……150
§1　鞍点型变分问题 ……150
§2　Galerkin 逼近的误差估计 ……158
§3　二阶椭圆问题的基本杂交元 ……162
§4　线弹性问题的杂交有限元法 ……174
§5　板弯曲问题的杂交有限元法 ……187
参考文献 ……193
第6章　混合有限元法 ……195
§1　抽象误差估计 ……195
§2　二阶椭圆问题的混合有限元法 ……208
§3　平面弹性问题的混合有限元法 ……219
§4　四阶椭圆方程的混合有限元法 ……225
参考文献 ……231
第7章　边界积分方程法 ……234
§1　广义 Green 公式、基本解 ……234
§2　化 Laplace 方程为边界积分方程 ……241
§3　边界有限元法 ……247
参考文献 ……255

第 1 章

Hilbert 空间初步

§1 Hilbert 空 间

1-1 若干定义

首先回顾一下线性空间的概念.

定义 1.1 设 K 是复(或实)数域, H 是某些元素的集合. 如果对 H 中任何元素 x, y, 定义了一种所谓"加法"运算 $x+y$ 及 $\alpha\in K$ 与 $x\in H$ 的"乘法"运算 αx, 使 $x+y$, αx 属于 H, 且满足条件:

(I) H 是加法群, 即

(a) $x+y=y+x$(交换律),

(b) $(x+y)+z=x+(y+z)$(结合律),

(c) H 中存在元素 θ(称为零元素)使 $\theta+x=x$, $\forall x\in H$,

(d) 对任何 $x\in H$, 存在加法逆元素 $-x\in H$, 使 $x+(-x)=\theta$.

(II) 乘法与加法运算满足

(e) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$(结合律),

(f) $1x=x$,

(g) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$(分配律),

(h) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$(分配律),

则称 H 是一复(或实)线性空间或向量空间.

在线性空间里, 还可定义加法的逆运算"减法": $x-y=x+(-y)$. 平行于线性代数, 不难建立线性相关、线性无关、

子空间、同构、维数等概念.

定义1.2 设 H 为复(实)线性空间. 如果对 H 中每一元素 x,按某一规则对应一非负实数 $\|x\|$,满足条件:

(i) $\|x\|\geqslant 0$, $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=\theta$ (零元素),

(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$, α 是复数,

(iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$(三角不等式);

则称 H 为**线性赋范空间**,称 $\|x\|$ 为 x 的**范数**或**模**.

有了范数,就可以引进收敛、极限点、开集、闭集及基本序列等一系列概念.

如果线性赋范空间 H 中任一基本序列均有极限,则说 H 是**完全空间**.

定义1.3 一个线性、赋范、完全空间称为 Banach 空间.

在 n 维欧氏空间 R^n 中,不但可以定义向量的范数(即长度),而且可以定义二向量的内积. 对于一般抽象空间,我们按下列定义引进内积.

定义1.4 设 H 为复(实)线性空间,若对 $\forall x, y\in H$,恰有一复(实)数 (x, y) 和它对应,满足

(i) $(x, x)\geqslant 0$,又 $(x, x)=0$ 当且只当 $x=\theta$,

(ii) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$,

(iii) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$,

(iv) $(x, y)=\overline{(y, x)}$,

则称 (x, y) 为 x 与 y 的**内积**,而称 H 为**内积空间**.

在内积空间中,可定义 x 的范数:

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}.$$

显然 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$, $\|x\|\geqslant 0$ 且 $\|x\|=0$ 当且只当 $x=\theta$. 我们将证明三角不等式:

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|. \tag{1.1}$$

为此先建立 Schwarz 不等式:

$$|(x, y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|. \tag{1.2}$$

对于任意实参数λ,

$$(x+\lambda y,\ x+\lambda y)\geqslant 0,$$

即

$$(x, x)+\lambda[(x, y)+(y, x)]+\lambda^2(y, y)\geqslant 0. \tag{1.3}$$

设$(x, y)=re^{i\theta}$, 其中$r=|(x, y)|$, $i=\sqrt{-1}$是虚单位, 以$e^{-i\theta}x$代替(1.3)中之x, 得

$$\begin{aligned}&(e^{-i\theta}x,\ e^{-i\theta}x)+2\lambda|(x, y)|+\lambda^2(y, y)\\&\quad=(x, x)+2\lambda|(x, y)|+\lambda^2(y, y)\\&\quad\geqslant 0,\end{aligned}$$

从而判别式

$$|(x, y)|^2-\|x\|^2\|y\|^2\leqslant 0.$$

这就是 Schwarz 不等式(1.2).

由 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,\ x+y)\\&=(x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y)\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

两边开方便得三角不等式(1.1).

由此可见, 内积空间必为线性赋范空间, 但不一定是完全空间.

定义 1.5 一个完全的内积空间称为 **Hilbert** 空间.

显然 Hilbert 空间是 Banach 空间的特例, 它具有较 Banach 空间更丰富的性质.

例 1 m维欧氏空间R^m是 Hilbert 空间的特例(维数m有限).

例 2 考察复数序列 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2<+\infty$$

成立的集合，记作 l_2. 对于 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots)$ 和 $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i, \cdots)$，定义加法和乘法运算:

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_i+\eta_i, \cdots),$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots, \alpha\xi_i, \cdots).$$

x, y 的内积定义为:

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i,$$

则 l_2 为完全的内积空间，即 Hilbert 空间. l_2 空间是欧氏空间最自然的推广.

例 3 考察有限区间 (a, b) 上复值可测函数 $f(x)$ 使

$$\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$$

成立的函数类，记作 $L_2(a, b)$. 对 $f, g\in L_2(a, b)$，显然 αf, $f+g$ 均属于 $L_2(a, b)$，且内积

$$(f, g)=\int_a^b f\bar{g}\,\mathrm{d}x$$

有意义. 由实变函数论知道，$L_2(a, b)$ 是完全的内积空间，从而是 Hilbert 空间.

1-2 空间的完全化

设 M 是内积空间 H 的子集: $M\subset H$. 我们说 M 在 H 中稠密，如果对任何 $x\in H$，恒有 $x_n\in M$ 使 $x_n\to x$. 这时也称 M 为 H 的稠密子集. 若更设 M 为 H 的线性子空间，则称 M 为 H 的稠密线性子集. 我们证明任何一个不完全的内积空间，总可将它完全化，使之成为一个 Hilbert 空间. 详言之，有

定理1.1 任何内积空间 H 均可由添加新元素而作成一个 Hilbert 空间 $\overline{H}$，且使 H 为 $\overline{H}$ 的稠密线性子集.

证明 考虑 H 中所有基本序列组成的集合 $\overline{H}$. 对 $\overline{H}$ 中的元素 $\xi=\{x_n\}$ 和 $\eta=\{y_n\}$，若满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0,$$

则认为他们等同，记作 $\xi=\eta$. 对任一 $x\in H$，显然 $\bar{x}=(x, x, \cdots, x, \cdots)\in\overline{H}$，我们就认为 $\bar{x}=x$. 任一收敛到 x 的基本序列 $\{x_n\}$，按照我们的约定，均与 $\bar{x}$ 等同，这样就可将 H 看成 $\overline{H}$ 的子集.

现在规定 $\overline{H}$ 中的线性运算，使之成为一线性空间. 对 $\xi=\{x_n\}$，$\eta=\{y_n\}\in\overline{H}$ 和复数 α，定义 $\xi+\eta=\{x_n+y_n\}$ 和 $\alpha x=\{\alpha x_n\}$. 显然如此定义的加法及乘法运算有意义，$\overline{H}$ 关于这两个运算是线性空间，且 H 是 $\overline{H}$ 的线性子空间.

其次在 $\overline{H}$ 中定义内积. 对 $\overline{H}$ 中的 $\xi=\{x_n\}$，$\eta=\{y_n\}$，由于

$$\begin{aligned}&|(x_n, y_n)-(x_m, y_m)|\\&\quad\leqslant\|x_n-x_m\|\|y_n\|+\|x_m\|\|y_n-y_m\|\\&\quad\to 0, \qquad 当\ n, m\to\infty,\end{aligned}$$

序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 必有极限，于是定义 ξ，η 的内积为：

$$(\xi, \eta)=\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n). \tag{1.4}$$

为使 (ξ, η) 有意义，应证上式右端极限与 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的选取无关. 实际上，若 $\{x_n\}=\{\hat{x}_n\}$，$\{y_n\}=\{\hat{y}_n\}$，即 $\|x_n-\hat{x}_n\|\to 0$，$\|y_n-\hat{y}_n\|\to 0$，则

$$\begin{aligned}&|(x_n, y_n)-(\hat{x}_n, \hat{y}_n)|\\&\quad\leqslant\|x_n-\hat{x}_n\|\|y_n\|+\|\hat{x}_n\|\|y_n-\hat{y}_n\|\\&\quad\to 0,\ 当\ n\to\infty.\end{aligned}$$

显然当 ξ, η 属于 H 时，如此定义的内积和 H 的内积一致. 此外，内积(1.4)满足定义 1.2 的条件(i)～(iv). 因此 $\overline{H}$ 是内积空间, H 是 $\overline{H}$ 的子空间. 特别, $\overline{H}$ 是线性赋范空间.

今证 H 在 $\overline{H}$ 中稠密. 设 $\xi=\{x_n\}\in\overline{H}$. 取 $\bar{x}_n=(x_n, x_n, \cdots, x_n, \cdots)$ 则

$$\|\xi-\bar{x}_n\|=\lim_{j\to\infty}(x_j-x_n, x_j-x_n)^{\frac{1}{2}}=\lim_{j\to\infty}\|x_j-x_n\|, \tag{1.5}$$

而 $\|x_j-x_n\|\to0$ 当 $j, n\to\infty$，故 $\|\xi-\bar{x}_n\|\to0$ 当 $n\to\infty$. 这表明 H 于 $\overline{H}$ 稠密.

最后证明 $\overline{H}$ 完全. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots$ 是 $\overline{H}$ 中的基本序列. 由于 H 于 $\overline{H}$ 稠密, 故对每一 ξ_n, 必有 $\bar{x}_n=(x_n, x_n, \cdots, x_n, \cdots)\in H$ 使 $\|\xi_n-\bar{x}_n\|<\dfrac{1}{n}$. 从

$$\begin{aligned}\|\bar{x}_n-\bar{x}_m\|&\leqslant\|\bar{x}_n-\xi_n\|+\|\xi_n-\xi_m\|+\|\xi_m-\bar{x}_m\|\\&<\frac{1}{n}+\|\xi_n-\xi_m\|+\frac{1}{m}\to0\quad 当\ n, m\to\infty,\end{aligned}$$

可知 $\{\bar{x}_n\}$ 是 $\overline{H}$ 中的基本序列，从而 $\{x_n\}$ 是 H 中的基本序列. 记 $\xi=\{x_n\}=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in\overline{H}$, 则

$$\begin{aligned}\|\xi-\xi_n\|&\leqslant\|\xi-\bar{x}_n\|+\|\bar{x}_n-\xi_n\|\\&<\|\xi-\bar{x}_n\|+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

由(1.5),

$$\lim_{n\to\infty}\|\xi-\bar{x}_n\|=\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\|x_j-x_n\|=0,$$

故当 $n\to\infty$, $\xi_n\to\xi$. 证毕.

1-3 射影定理

设 H 为一 Hilbert 空间. 集合 $K\subset H$ 称为凸集, 如果当 x_1, x_2 属于 K 时，联结它们的线段 $tx_1+(1-t)x_2$ $(0\leqslant t\leqslant1)$

也属于 K.

定理 1.2 设 K 为一凸闭集，$x_0\in H$，则有 $y\in K$ 使

$$\|x_0-y\|=\inf_{z\in K}\|x_0-z\|. \tag{1.6}$$

证明 令 $d=\inf\limits_{z\in K}\|x_0-z\|$. 显然有"极小化"序列 $\{z_j\}$ 使

$$\lim_{j\to\infty}\|x_0-z_j\|=d. \tag{1.7}$$

今证 $\{z_j\}$ 是基本序列. 因 K 是凸集，故 $\frac{1}{2}(z_n+z_m)\in K$. 于是

$$\|z_n+z_m-2x_0\|\geqslant 2d.$$

由平行四边形公式:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

我们有

$$\begin{aligned}\|z_n-z_m\|^2&=\|(z_n-x_0)-(z_m-x_0)\|^2\\&=2(\|z_n-x_0\|^2+\|z_m-x_0\|^2)\\&\quad-\|(z_n-x_0)+(z_m-x_0)\|^2\\&\leqslant 2(\|z_n-x_0\|^2+\|z_m-x_0\|^2)-4d^2\\&\to 0,\qquad \text{当 } n,\ m\to\infty,\end{aligned}$$

所以 $\{z_j\}$ 是基本序列. 而 K 是闭集，必有 $y\in K$ 使 $\lim\limits_{j\to\infty}z_j=y$. 于是由(1.7)推得(1.6). 证毕.

设 $\mathfrak{M}$ 是 H 的子空间(即闭线性子空间). 定义

$$\mathfrak{M}^\perp=\{y\in H:(y,x)=0,\ \forall x\in\mathfrak{M}\},$$

称之为 $\mathfrak{M}$ 的直交补. 易证 $\mathfrak{M}^\perp$ 也是 H 的子空间，且 $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}^\perp=\{\theta\}$.

定理 1.3 (射影定理)设 $\mathfrak{M}$ 是 H 的子空间，则每个 $x\in H$ 可唯一表成

$$x=y+z, \tag{1.8}$$

其中 $y\in\mathfrak{M}$, $z\in\mathfrak{M}^{\perp}$.

令 $y=Px$, 称 y 为 x 在 $\mathfrak{M}$ 上的正射影, P 是正射影算子. 显然 $(y, z)=0$, $\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$.

证明 若 $x\in\mathfrak{M}$, 则取 $y=x$, $z=\theta$. 今设 $x\overline{\in}\mathfrak{M}$, 由定理 1.2, 必有 $y\in\mathfrak{M}$ 使

$$\|x-y\|=\inf_{z\in\mathfrak{M}}\|x-z\|.$$

对任何 $h\in\mathfrak{M}$ 和实参数 λ, 函数

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)&=\|x-y+\lambda h\|^2\\&=\|x-y\|^2+2\mathrm{Re}(x-y,\ h)\lambda\\&\quad+\lambda^2\|h\|^2\end{aligned}$$

(Re 表示取实部)于 $\lambda=0$ 取极小. 于是 $\phi'(0)=0$, 即

$$\mathrm{Re}(x-y,\ h)=0,\ \forall h\in\mathfrak{M}.$$

设 $(x-y,\ h)=re^{i\theta}(r\geqslant 0)$, 以 $e^{-i\theta}h$ 代替上式中的 h, 则

$$|(x-y,\ h)|=r=\mathrm{Re}(x-y,\ e^{-i\theta}h)=0.$$

这说明 $(x-y)\in\mathfrak{M}^{\perp}$. 令 $z=x-y$, 即得(1.8).

最后证明唯一性. 设

$$x=y+z=y'+z',$$

其中 $y,\ y'\in\mathfrak{M}$, $z,\ z'\in\mathfrak{M}^{\perp}$, 则 $y-y'=z'-z\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}^{\perp}$, 从而 $y=y'$, $z=z'$. 证毕.

1-4 Riesz 表现定理

设 $f(x)$: $H\to K$ 是定义在 H 上取值在数域 K 上的泛函. 若 $\forall x,\ y\in H$ 和 $\forall\alpha,\ \beta\in K$, 恒有

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\quad (\text{特别 } f(\theta)=0),$$

则称 $f(x)$ 为线性泛函. 若更设 $f(x)$ 连续, 即由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 恒有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x),$$