分析力学

FENXILIXUE

刘书振　陈书勤　罗绍凯　编著

河南大学出版社

分析力学

● 刘书振　陈书勤　罗绍凯

● 河南大学出版社

内 容 提 要

本书是在作者自编《分析力学》讲义的基础上修改、补充而成的，它既反映了作者的教学经验和研究成果，又突出了我国学者在分析力学研究方面的贡献。

全书共分九章，内容包括哈密顿原理和拉格朗日方程、平衡位形附近的小振动、刚体的定点转动、正则方程、正则变换、哈密顿—雅可比方程、变质量系分析动力学、非完整系的动力学方程及中国在分析力学研究方面取得的进步。为适应教学，每章选有一定数量的例题和习题，书后附有名人简介及各章习题略解。

本书采用1988年全国自然科学名词审定委员会审定公布的物理学名词。

本书适合作为综合性大学和高等师范院校物理专业选修课教材或研究生教材，也可供其它院校有关专业教师、高年级学生和科研工作者参考。

分 析 力 学

刘书振、陈书勤、罗绍凯 编著

责任编辑 姜伟林

河南大学出版社出版

（开封市明伦街85号）

河南省新华书店发行

中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：12.25 字数：307千字

1992年11月第1版 1992年11月第1次印刷

印数：1—1000 定价：（平）4.05元 （精）7.00元

ISBN 7-81018-803-8 /O·45

（豫）新登字第09号

代　序

1788 年伟大科学家 J. L. Lagrange 发表不朽名著《分析力学》，200 年过去了. Lagrange 以及后来的 Hamilton, Jacobi, Poincaré, Ляпунов 等人的著作是那样完美，以致使众多聪明的后人认为再也没有什么本质的东西可以补充到有限自由度系统动力学中去了.

上一世纪末开始的经典非完整动力学研究，100 年来取得重要进展，这些成果无疑地将 Lagrange, Hamilton 的成果推进了一大步. 近 30 年发展起来的近代分析力学(几何动力学)研究，充分体现了现代数学中的内蕴几何和大范围分析的深刻思想，使经典分析力学的理论上升到一个新的高度.

分析力学既是数学、力学、物理学这三大学科的基础，又是许多新兴学科的生长点. 分析力学不仅是研究科学与技术中多种复杂问题的精美工具，而且其运动规律的独特表达形式远远超出了经典力学的限制. 在数学物理学科中找不到任何一个分支能够像分析力学那样把抽象的数学与具体的物理内容如此紧密地结合起来.

国内外已出版多种分析力学的教材和专著，都有其自己的特色.

由刘书振、陈书勤、罗绍凯同志编著的《分析力学》是一本很有自己特色的书. 本书在数学与物理学的结合上做得相当好；兼顾完整系统与非完整系统，兼顾常质量系统与变质量系统，兼顾非

相对论力学与相对论性力学；突出了作者们和我国其他研究者的贡献. 本书最后一章还综述了我国近30年来在分析力学研究方面取得的进步，这是整理得较为齐全的、具有很好参考价值的资料.

愿分析力学永远前进，愿我国分析力学的教学与科研取得更大进步.

梅凤翔

1991年2月

前　言

18 世纪和 19 世纪，随着工业革命的迅速发展，在工程技术上迫切需要解决相互约束的许多物体组成的系统的力学问题，分析力学就是在解决这些问题的过程中发展起来的．法国学者拉格朗日（J．L．Lagrange 1736—1813）1788 年发表了名著《分析力学》．他以广义坐标为描述质点系的变量，以虚位移原理和达朗贝尔原理为基础，运用数学分析的方法推导出拉格朗日方程，给出了质点系问题的一般处理方法，为这门学科奠定了基础．英国数学家、力学家哈密顿（W．R．Hamilton 1805—1865）1834 年提出了用偏微分方程表示的动力学方程，但用此方程求解动力学问题时尚需雅可比（C. G. J. Jacobi 1804—1851）定理，后被称为哈密顿—雅可比方程．1834 年和 1843 年哈密顿又分别建立了哈密顿原理和正则方程，把分析力学向前推进一步．法国数学家泊松（S．D．Poisson 1781—1840）在研究正则变换时，为简化运算提出了泊松括号．俄国力学家李亚普诺夫（A．M．Ляпунов 1857—1918）1892 年提出了解决运动稳定性的李亚普诺夫方法，并卓有成效地建立起一系列比较完整的稳定性理论，李亚普诺夫稳定性理论在科学技术领域中获得广泛应用和很大发展．德国著名科学家赫兹（H．R．Hertz 1857—1894）1894 年提出将约束和系统分成完整和非完整的两大类，从此开始了非完整系分析力学的研究．法国学者阿佩尔（P. E. Appell 1855—1930）于 1898 年得到了本质上不同于其他人的一阶线性非完整系的阿佩尔方程．这个方

程既适用于完整系又适用于非完整系．近 20 年来，又产生出用近代微分几何观点来研究分析力学的原理和方法．当前由拉格朗日和哈密顿所奠基的分析力学是一门已经成熟发展的学科，它是经典物理学的基础之一，也是整个力学的基础之一．它广泛应用于结构分析、机器动力学与振动、航天力学、多刚体和机器人动力学以及各种工程之中，也被推广应用于连续介质力学和相对论力学．分析力学的研究不仅有理论价值，也有着巨大的实用意义．

河南大学物理系自 1987 年以来开设了分析力学选修课．本书就是在自编分析力学选修课讲义的基础上修改、补充而成的．它适合作为综合性大学和高等师范院校物理专业的选修课教材或研究生教材．考虑到学生在理论力学课程中已初步接触了分析力学的基础理论和方法，作为一门高年级的提高课程，用分析力学的方法比较系统地处理了有心力运动、小振动、刚体的定点转动和几种不同的变质量系的运动．非完整系动力学是近百年来国内外分析力学研究者所瞩目并取得一系列进展的热门课题之一，本书以适当的篇幅作了扼要的介绍．由于分析力学具有数学推导较多的特点，往往易使初学者忽略其物理本质．为了解决这一问题，我们特别注意了分析力学处理问题的基本方法，尽可能使推导简单明了，力求论述深入浅出，并注意了结论物理意义的阐述．

本书第一章至第六章由刘书振、陈书勤执笔，第七、八、九章由罗绍凯执笔（署名按执笔章节为序）．北京理工大学应用力学系教授、法国国家科学博士、博士生导师梅凤翔先生在百忙中审阅了本书初稿，并提出了许多宝贵的修改意见．河南省教育委员会对本书的出版也给予了大力支持．在此一并表示衷心的感谢．

限于水平，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评和指正．

作　者

1991 年 3 月于河南大学

目　录

第一章
哈密顿原理和拉格朗日方程

哈密顿原理是力学变分原理的积分形式，是力学的一条公理．力学变分原理是在基本定律的基础上用变分法得到的，它是经典力学发展到成熟阶段的产物，对于力学及理论物理的进一步发展起了非常重要的作用．力学变分原理可分为两类：(一)微分原理．它是研究在任一瞬时区分真实运动与可能运动的准则，如虚位移原理、若丹原理；(二)积分原理．它是研究在任一有限时间历程中区分真实运动与可能运动的准则，如哈密顿原理、最小作用原理．

本章我们从变分原理入手，引出哈密顿原理和哈密顿作用量，导出拉格朗日方程，作为拉格朗日方程的应用，讨论有心运动．

§1.1 变分法

一、变分法和变分问题

设x为独立变量，y是x的函数，即$y=y(x)$，y'是y对x的导数$\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$．当函数的形式为$f(x, y, y')$时，作由$x_1$到$x_2$的

积分，则

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.1}$$

在(1.1.1)式中，如果 $y=y(x)$ 的形状发生变化，积分 I 的值也随之发生变化．象这样，积分 I 的值是由函数 $y=y(x)$ 来决定的问题中，将 I 称为函数 $y(x)$ 的**泛函**，记作 $I[y(x)]$．所谓**变分法**就是求泛函极值的方法．凡有关求泛函的极值问题都叫做**变分问题**．

当积分的两个端点 x_1 和 x_2 处的 y 值 $y(x_1)$ 和 $y(x_2)$ 不发生变化，仅中间对应于 x 的 y 值发生各种各样的变化时，积分 I 的值也变化．我们的兴趣是研究通过固定点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 的一切可能运动中，使 I 取极值的运动．

在图1—1中，$y=y(x)$ 用实线表示．当 x 值保持不变时，从这曲线上的 $P(x,y)$ 点出发，仅 y 值发生一个微小的变化到 P' 点，即 $P'(x,y+\delta y)$．将由 P 点到 P' 点的变化写作 δy，把 δy 称作 y 的**变分**．因从 A 点到 B 点对应所有的 x 值，y 都有象 δy 一样的变化，显然，δy 是 x 的函数，即 $\delta y=\delta y(x)$．注意它和函数增量 Δy 的区别：变分 δy 反映的是整个函数的改变；增量 Δy 反映的是同一函数 $y(x)$ 因 x 取不同值而产生的差异．假设与实线邻近的一条可能轨道为 C'（图1—1中虚线），则由实线到虚线移动时，I 的变分为

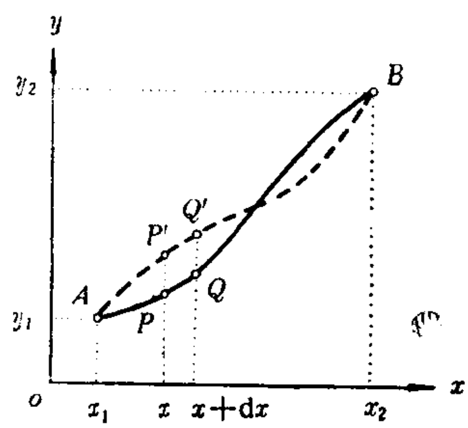

图 1—1

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x. \tag{1.1.2}$$

(1.1.2)式右边被积函数的第二项，意味着对应 y' 的变分是 $\delta y'$．

二、变分的运算法则

变分的运算法则，在很多地方和微分的运算法则非常相近，因为二者的改变量都很微小.

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ \delta(y_1+y_2)=\delta y_1+\delta y_2;\\
&(2)\ \delta(y_1y_2)=y_1\delta y_2+y_2\delta y_1;\\
&(3)\ \delta\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=\frac{y_2\delta y_1-y_1\delta y_2}{y_2^2};\\
&(4)\ \delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y;\\
&(5)\ \delta\int_{x_1}^{x_2} y\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\delta y\mathrm{d}x;\\
&(6)\ \Delta\int_{t_1}^{t_2} 2T\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}[\Delta(2T)+2T(\Delta t)^{\cdot}]\mathrm{d}t.
\end{aligned}\right\}\qquad(1.1.3)$$

δ 是等时变分符号，Δ 是不等时变分符号(全变分符号). 对于任意函数 f

$$\Delta f=\delta f+\dot{f}\Delta t.\qquad(1.1.4)$$

下面我们仅对(1.1.3)式中的(4)(5)两个法则给予证明.

法则(4)的证明:

图 1—2 是图 1-1 中的局部放大，设 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是 P 点处曲线的斜率，$y'+\delta y'$ 是 P' 点处曲线的斜率. 根据变分法知，斜率的变化只是 $\delta y'$. 由图 1—2 可知

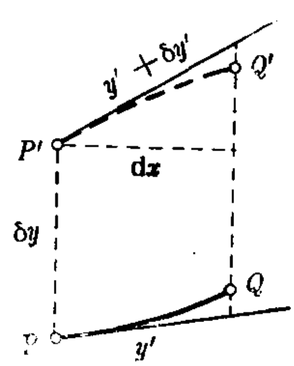

图 1—2

$$\begin{aligned}QQ'&\approx\delta y+(y'+\delta y')\mathrm{d}x-y'\mathrm{d}x\\&=\delta y+\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}\qquad(1)$$

又 QQ' 是 $x+\mathrm{d}x$ 处 y 的变分，即

$$QQ' = (\delta y)_{x+\mathrm{d}x} \approx \delta y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由（1），（2）两式可得

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y).$$

这说明 δ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的先后次序是可以互相对易的。

法则（5）的证明：

因 $\quad \delta\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

上式积分上下限和积分变量都一样，按照积分运算规则，可合并为

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y+\delta y,y'+\delta y')\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [f(x,y+\delta y,y'+\delta y') - f(x,y,y')]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

所以 $\quad \delta\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x,y,y')\mathrm{d}x.$

说明 δ 和 $\int$ 的先后次序是可以互相对易的。但应注意，上面的证明，已把 $f(x,y+\delta y,y'+\delta y')$ 看作是 $f(x,y,y')$ 的一个可变函数。

三、欧拉方程

根据变分的运算法则(1.1.3)式（4），(1.1.2)式右边第二项